Mathématiques

Guy Abossolo foh

71 rue Guy de Maupassant
69500 Bron

Résumé

Agrégation et Licence de Mathématiques Résumé de Cours http://www.scientificware.com

Chapitre 1
L'alphabet grec

α	β	γ	δ	ε	ζ
A	B	Γ	Δ	E	Z
alpha	bêta	gamma	delta	epsilon	dzeta
η	θ	ι	κ	λ	μ
H	Θ	I	K	Λ	M
êta	têta	iota	kappa	lambda	mu
ν	ξ	o	π	ρ	σ
N	Ξ	O	Π	P	Σ
nu	xi	omicron	pi	rhô	sigma
τ	υ	φ	χ	ψ	ω
T	Υ	Φ	X	Ψ	Ω
tau	upsilon	phi	chi	psi	omega

Chapitre 2
Notions fondamentales sur les ensembles

2.1 Divers

Ecrire la définition d'une famille (voir Monier) et corriger tous les énoncés où ensemble est employé à la place de famille.

$x \in A \cup B \Leftrightarrow x$ appartient à A ou B c'est un ou inclusif.

$x \in A \Delta B \Leftrightarrow x$ appartient à A ou B exclusivement c'est un ou exclusif.

Comment se ramène-t-on d'un calcul sur $\mathcal{P}(E)$ avec $\Delta ; \cup ; \cap ; -$ à un calcul algébrique, à lire pour savoir où il faut l'intégrer (évidement pour faciliter les opérations sur $\Delta ; \cup ; \cap ; -$).

Sur $\mathcal{P}(E)$, on peut définir une structure d'anneau au sens algébrique (voir livre J. Genet page 12). On définit 2 lois $+ : (A, B) \mapsto A + B = A \Delta B$; $\times : (A, B) \mapsto A \times B = A \cap B$.

A retenir :

$A \Delta B = A + B$

$A \cap B = A \times B$

$A - B = A + A \times B$

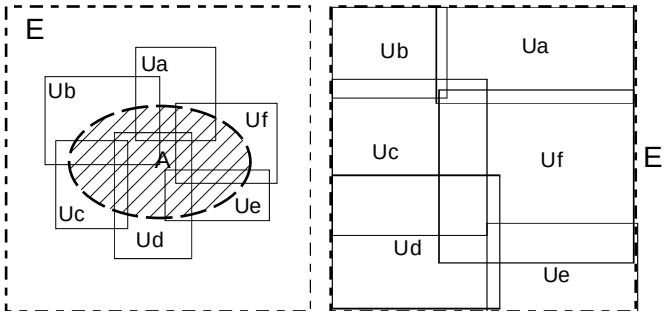
$A \cup B = (A + B) + A \times B$

$A \times A = A$

$A + A = \varnothing$

Trouver toutes les relations entre $\mathcal{C}_E, \cup, \cap, -, \Delta$.

2.2 Recouvrement



Définition 2.1. *Soit E un ensemble et A une partie de E.*

On appelle ***recouvrement*** *de A, une famille $(U_i)_{i \in I}$ de parties de E telle que :*

$A \subset \bigcup_{i \in I} (U_i)_{i \in I} \subset E$.

Définition 2.2. *Le recouvrement est dit fini si et seulement si I est fini.*

Remarque 2.3.

1. Un recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ de E vérifie : $E = \bigcup_{i \in I} (U_i)_{i \in I}$.
2. En topologie, on définit la notion de recouvrement ouvert (voir chapitre Topologie).

Définition 2.4. *Soit E un ensemble et $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement d'une une partie A de E.*

On appelle ***sous-recouvrement*** *de $(U_i)_{i \in I}$ toute sous-famille $(U_j)_{j \in J}$ avec $J \subset I$.*

2.3 Relations sur des ensembles

Proposition 2.5. *Soit $f: E \to E'$ une application, A et B deux parties de E.*

- $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$,
- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
- $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$, *il y a égalité si f est injective.*

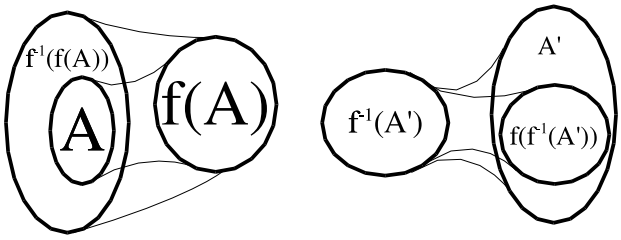
Proposition 2.6. *Soit $f: E \to E'$ une application, A' et B' deux parties de E'.*

- $A' \subset B' \Rightarrow f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$,
- $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$,
- $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$,
- $f^{-1}(A^c) \subset \big(f^{-1}(A)\big)^c$. *Démonstration ?*

Proposition 2.7. *Soit $f: E \to E'$ une application, A et A' deux parties de E et E'.*

- $A \subset f^{-1}(f(A))$,*Démonstration, voir Monier ?*
- $f(f^{-1}(A')) \subset A'$. *Idem*

Justification : 1 seule image mais plusieurs antécédents. Dans quelles conditions y-a-t-il égalité : f injective ou f bijective je pense que c'est f injective car dans ce cas $f: A \mapsto f(A)$ est une bijection !



Proposition 2.8. *Soit $f: E \to E'$ une application et $(A_i)_{i \in I}$ un famille de parties de E.*

- $f\big(\bigcup_{i \in I} A_i\big) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$,
- $f\big(\bigcap_{i \in I} A_i\big) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i)$, *il y a égalité si f est injective.*

Proposition 2.9. *Soit $f: E \to E'$ une application et $(A_i)_{i \in I}$ un famille de parties de E'.*

- $f^{-1}\big(\bigcup_{i \in I} A_i\big) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i)$,
- $f^{-1}\big(\bigcap_{i \in I} A_i\big) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(A_i)$.

2.4 Quelques notations usuelles

Soit Ω un ensemble et f, g deux applications $\Omega \to \bar{\mathbb{R}}$. On définit les ensembles suivants :

- $[f < g] = \{x \in \Omega;\, f(x) < g(x)\}$,
- $[f \leqslant g] = \{x \in \Omega;\, f(x) \leqslant g(x)\}$,
- $[f = g] > \{x \in \Omega;\, f(x) = g(x)\}$.

Cas particulier : $f: \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ et $\alpha, \beta \in \bar{\mathbb{R}}$

- $[f < \beta] = f^{-1}([-\infty; \beta[)$,

- $[\alpha \leqslant f < \beta] = f^{-1}([\alpha;\beta[)$,
- $[f \geqslant \beta] = f^{-1}([\beta;+\infty])$,
- ...

2.5 Dénombrement

2.5.1

Rajouter le chapitre sur le dénombrement du cours de calcul intégral de M. Goldman (licence de mathématiques)

Soient E, f avec $F \subset E$ alors $\mathcal{C}_F M = (\mathcal{C}_E M) \cap F$.

si $E = E_1 \times E_2$ et $F = F_1 \times F_2$ alors $E \cap F = (E_1 \cap F_1) \times (E_2 \cap F_2)$

2.5.2 Ensembles finis

Proposition 2.10. *Si E est un ensemble fini, alors :*
$F \subset E \Rightarrow F$ *finie et* $\mathrm{Card}(F) \leqslant \mathrm{Card}(E)$.

Proposition 2.11.

1. *Soit E, F deux ensembles finis, alors :*
   $\mathrm{Card}(E \cup F) = \mathrm{Card}(E) + \mathrm{Card}(F) - \mathrm{Card}(E \cap F)$.
2. *Soient $E_1, ..., E_n$ des ensembles finis, $n \in \mathbb{N}^*$, alors :*
   a) *(Formule du crible ou de Poincaré ou principe d'exclusion-inclusion)*
   $\mathrm{Card}\big(\bigcup_{i=1}^n E_i\big) = \sum_{k=1}^n \Big((-1)^{k-1} \sum_{I \in \mathcal{P}_k} \mathrm{Card}\big(\bigcap_{i \in I} E_i\big)\Big)$.
   $\mathcal{P}_k$ *l'ensemble des parties à k éléments de* $\{1, ..., n\}$
   b) *si les E_i sont deux à deux disjoints alors :*
   $\mathrm{Card}\big(\bigcup_{i=1}^n E_i\big) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Card}(E_i)$.

Exemple 2.12. $n = 3$, $\mathrm{Card}(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = (-1)^{1-1}(\mathrm{Card}(E_1) + \mathrm{Card}(E_2) + \mathrm{Card}(E_3)) + (-1)^{2-1}(\mathrm{Card}(E_1 \cap E_2) + \mathrm{Card}(E_1 \cap E_3) + \mathrm{Card}(E_2 \cap E_3)) + (-1)^{3-1}(\mathrm{Card}(E_1 \cap E_2 \cap E_3)) = \mathrm{Card}(E_1) + \mathrm{Card}(E_2) + \mathrm{Card}(E_3) - \mathrm{Card}(E_1 \cap E_2) - \mathrm{Card}(E_1 \cap E_3) - \mathrm{Card}(E_2 \cap E_3) + \mathrm{Card}(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$

Proposition 2.13.

1. *Soit E, F deux ensembles finis, alors :*
   $\mathrm{Card}(E \times F) = \mathrm{Card}(E) \times \mathrm{Card}(F)$
2. *Soient E ; $E_1, ..., E_n$ des ensembles finis, $n \in \mathbb{N}^*$, alors :*
   a) $\mathrm{Card}\big(\prod_{i=1}^n E_i\big) = \prod_{i=1}^n \mathrm{Card}(E_i)$.
   b) *En particulier* $\mathrm{Card}(E^n) = \mathrm{Card}(E)^n$.

Rajouter : inf,sup,max,min

Chapitre 3
Topologie générale

3.1 Espaces topologiques

Il existe deux manières de définir une topologie : par les ouverts ou par les voisinages (voir encyclopédie de mathématiques P.U.F.).

3.1.1 Topologies, ensembles Ouverts et Espaces Topologiques

Définition 3.1. *Soit E un ensemble non vide.*
Une famille $\mathcal{O}$ de parties de E est une ***topologie*** *sur E si et seulement si :*

- *$E \in \mathcal{O}$ et $\varnothing \in \mathcal{O}$*
- *La réunion d'une famille quelconque d'élément de $\mathcal{O}$ appartient à $\mathcal{O}$[axiome de stabilité par réunion quelconque].*
- *L'intersection d'une famille finie d'élément de $\mathcal{O}$ appartient à $\mathcal{O}$ [axiome de stabilité par intersection finie].*

Définition 3.2. *Les éléments d'une topologie $\mathcal{O}$ sont appelés ensembles* ***$\mathcal{O}$-ouverts*** *ou* ***ouverts****.*

Définition 3.3. *Soit E un ensemble et $\mathcal{O}$ une topologie sur E. On appelle* ***espace topologique*** *le couple $(E, \mathcal{O})$.*

Exemple 3.4.

1. Toute espace métrique E est un espace topologique : Considérons $\mathcal{O}$ l'ensemble des pearties V de E
   - ∗. qui sont vides : $V = \varnothing$
   - ∗. ou telles que pour tout point x, il existe une boule ouverte de centre x et contenue dans une boule ouverte de centre x et de rayon $r > 0$ elle même contenue dans cette partie V : $\forall x \in V ; \exists r > 0 ; \mathcal{B}(x; r) \subset V$

   alors $\mathcal{O}$ est une topologie sur E.

   Démonstration. Cours TCD Benabdallah page 3 □
2. Soit E un ensemble. La famille $\mathcal{O} = \{\varnothing, E\}$ est une topologie sur E, appelée topologie grossière. C'est la topologie qui contient le moins d'ouverts. $(E, \mathcal{O})$ est appelé espace topologique grossier.
3. Soit E un ensemble. La famille $\mathcal{O} = \mathcal{P}(E)$ est une topologie sur E, appelée topologie discrète. C'est la topologie qui contient le plus d'ouverts. $(E, \mathcal{O})$ est appelé espace topologique discret.

3.1.2 Ensembles Fermés

Définition 3.5. *Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique et A un partie de E. On dit que A est un* $\mathcal{O}-$**fermé** *ou un* ***fermé*** *si et seulement si son complémentaire dans E est un ouvert.*
(« A fermé ») $\Leftrightarrow$ (« $\mathcal{C}_E A$ ouvert »).

Proposition 3.6. *Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique*

a) E et $\varnothing$ sont également des fermés.

b) L'intersection quelconque de fermé est un fermé.

c) La réunion finie de fermés est un fermé.

Démonstration.

a) Passage au complémentaire.

b) $\bigcap_{i\in I} F_i = \bigcap_{i\in I} \overline{A_i} = \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$. F_i fermé, posons $\overline{A_i} = F_i$ alors A_i ouvert donc $\bigcup_{i\in I} A_i$ ouvert et $\overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$ fermé.

c) $\bigcup_{i=1}^{n} F_i = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i} = \overline{\bigcap_{i=1} A_i}$. $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ est un ouvert donc $\overline{\bigcap_{i=1} A_i}$ est un fermé. □

Note 3.7. On aurait donc pu définir, la topologie par les fermés ?

3.1.3 Comparaison de topologies : topologies plus ou moins fines

On a vu que sur un ensemble donné, il est parfois possible de définir plusieurs topologies. Il peut être utile de disposer d'un argument de comparaison.

Définition 3.8. *Soit $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ deux topologies sur un ensemble non vide E.*

1. *On dit que **$\mathcal{T}_1$ est moins fine que $\mathcal{T}_2$** ou que $\mathcal{T}_2$ est **plus fine** $\mathcal{T}_1$ si et seulement si $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$. (Autrement dit : tout ouvert de $\mathcal{T}_1$ est également un ouvert de $\mathcal{T}_2$ ou encore $\mathcal{T}_1$ est plus petit que $\mathcal{T}_2$).*
2. *On dira qu'elles ne sont **pas comparables** si l'une n'est ni plus fine, ni moins fine que l'autre.*

3.1.4 Recouvrement ouvert

Définition 3.9. *Soit E un espace topologique et A une partie de E.*

On appelle recouvrement ouvert de A, un recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ de A, où chaque U_i est un ouverts de E.

3.1.5 Voisinage d'un point et d'une partie

Définition 3.10. *Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique, N et A deux parties de E et p un point de E. On dit que N est un **voisinage** de p [rep. A] si et seulement si elle contient un ouvert contenant p [resp. A].*

Proposition 3.11. *Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique :*

$V \subset E$ est un voisinage de chacun de ses points $\Leftrightarrow$ V est un ouvert dans E .

Démonstration. Cours de Benabdallah page (5) TCD □

Proposition 3.12. *Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique et x un point de E:*

1. *Si V et V' sont 2 voisinages de x dans E alors $V \cap V'$ est un voisinage de x dans E.*
2. *Si V est un voisinage de x dans E et $V \subset W \subset E$ alors W est un voisinage de x dans E.*

Démonstration. Cours de Benabdallah page (5) TCD □

Définition 3.13. *Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique, et p un point de E. On appelle **système de voisinage** d'un point p dans E, l'ensemble des voisinages de p dans E, on le note $\mathcal{V}_p$.*

Définition 3.14. *Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique, et p un point de E. On appelle **système fondamentale de voisinage** d'un point p dans E : une partie $\mathcal{B}$ du système de voisinage $\mathcal{V}_p$ de p dans E (autrement dit une famille $\mathcal{B}$ de voisinage de p dans E), telle que pour tout voisinage V de p, il existe un éléments de $\mathcal{B}$ contenu dans V.*

Remarque 3.15. Si on connait un système fondamental de voisinage de x dans E, on connait tous les voisinages de x dans E.

Exemple 3.16. Dans un espace métrique E,

1. la famille des boules ouvertes $\mathcal{B}_n\Big(x,\ \frac{1}{n}\Big)$ est un système fondamental de voisinage de x dans E.
2. la famille des boules fermées $\mathcal{B}'_n\Big(x,\ \frac{1}{n}\Big)$ est un système fondamental de voisinage de x dans E.

3.1.6 Point d'Accumulation ou Limite, Ensemble Dérivé

Définition 3.17. *Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique, A une partie de E et p un point de E. On dit que p est un* ***point d'accumulation*** *ou* ***point limite*** *de A si et seulement si tout ouvert contenant p contient un point de A différent de p.*

Remarque 3.18. Un ensemble fini n'a pas de point d'accumulation.

Définition 3.19. *Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique, A un partie de E. On appelle ensemble dérivé de A, l'ensemble des points d'accumulations de A. On le note A'.*

3.1.7 Point Isolé

Définition 3.20. *Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique, A un partie de E et p un point de E. On dit que p est un point isolé de A si et seulement si il existe un voisinage V_p de p ($V_p \in \mathcal{V}_p$) tel que $V_p \cap A = \{p\}$.*

Proposition 3.21. *Soit E un espace topologique, $F \subset E$.*
«L'espace topologique F est discret» $\Leftrightarrow$ «tout point de F est isolé».

Exemple 3.22. Si $A = \left\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\} \subset \mathbb{R}$ alors A n'a qu'un seul point d'accumulation qui est 0. Tous les points de A sont isolés donc A est discret.

3.1.8 Adhérence, Intérieur, Extérieur et Frontière d'un ensemble

3.1.8.1 Point Adhérent, Adhérence ou Fermeture d'un ensemble

Définition 3.23. *Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique, A un partie de E et p un point de E. On dit que p est un* ***point adhérent*** *de A si et seulement si : Tout voisinage de p dans E rencontre A.*

Proposition 3.24. *p est un point adhérent de A si et seulement si p est un point de A ou un point d'accumulation de A ($p \in A \cup A'$).*

Remarque 3.25. Un point d'accumulation est un point adhérent particulier.

Définition 3.26. *Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique et A un partie de E. On appelle* ***adhérence*** *de A (ou* ***fermeture*** *) de A, l'ensemble des points adhérents de A.*
On le note $\bar{A}$ ou Adh(A).

3.1.8.2 Point Intérieur, Intérieur d'un ensemble

Définition 3.27. *Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique, A une partie de E et p un point de E. On dit que p est un* ***point intérieur*** *de A si et seulement si p appartient à un ouvert de E contenu dans A:*

Proposition 3.28. *Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique, A une partie de E et p un point de E, p est un* ***point intérieur*** *de A si et seulement si A est un voisinage de p.*

Définition 3.29. *Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique et A une partie de E. On appelle* ***intérieur*** *de A, l'ensemble des points intérieurs de A. On le note A° ou int(A).*

3.1.8.3 Point extérieur, Extérieur d'un ensemble

Définition 3.30. *Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique, A une partie de E et p un point de E. On dit que p est un* ***point extérieur*** *de A si et seulement si il existe un ouvert de E contenant p et disjoint de A.*

CNS : $\mathcal{C}_E A$ est un voisinage de p. (à vérifier)

Définition 3.31. *Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique et A une partie de E. On appelle* ***extérieur*** *de A, l'ensemble des points extérieurs de A. On le note ext(A).*

3.1.8.4 Point frontière, Frontière d'un ensemble

Définition 3.32. *Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique, A une partie de E et p un point de E. On dit que p est un* ***point frontière*** *de A si et seulement si*

- *p n'appartient ni à l'intérieur, ni à l'extérieur de A.*
- *Autrement dit : p est un point adhérent de A et de $\mathcal{C}_E A$.*

3.1.8.5 Propriétés

Proposition 3.33. *Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique, A et B deux parties de E.*

1. *si $x \notin \bar{A}$, alors $\mathcal{C}_E A$ est un voisinage de x dans E.*
2. *$(A \subset B) \Rightarrow A^\circ \subset B^\circ$ et $\bar{A} \subset \bar{B}$.*
3. *$A^\circ \subset A \subset \bar{A}$*
4. *L'adhérence de A est l'intersection de tous les fermés de E contenant A : $\bar{A} = \bigcap_{i \in I} A_i, A_i$ fermé, $A \subset A_i, \forall i \in I$.*
   - *$\bar{A}$ est un fermé,*
   - *$\bar{A}$ est le plus petit fermé contenant A.*
   - *A est un fermé $\Leftrightarrow A = \bar{A}$.*
5. *L'intérieur de A est la réunion de tous les ouverts de E contenus dans A : $\overset{\circ}{A} = \bigcup_{i \in I} A_i$, A_i ouvert, $A_i \subset A$.*
   - *A ouvert $\Rightarrow A = \overset{\circ}{A}$.*
   - *A° est un ouvert,*
   - *et finalement A est un ouvert $\Leftrightarrow A = A^\circ$.*
   - *A° est le plus grand ouvert contenu dans A.*
6. *$\varnothing^\circ = \varnothing$; $E^\circ = E$; $(A^\circ)^\circ = A^\circ$.*
7. *$A^\circ \cap B^\circ = (A \cap B)^\circ$; $\bar{A} \cap \bar{B} \supset \overline{A \cap B}$; $\overline{(A^c)} = (A^\circ)^c$*
8. *$A^\circ \cup B^\circ \subset (A \cup B)^\circ$; $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cup B}$; $(A^c)^\circ = (\bar{A})^c$*
9. *$\bigcap_{i \in I} (A_i)^\circ \supset \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)^\circ$ il y a égalité si I est fini et $\bigcap_{i \in I} \overline{A_i} \supset \overline{\bigcap_{i \in I} A_i}$*
10. *$\bigcup_{i \in I} (A_i)^\circ \subset \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^\circ$ et $\bigcup_{i \in I} \overline{A_i} \subset \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$ il y a égalité si I est fini.*
11. *L'intérieur, l'extérieur et la frontière d'une partie A d'un espace topologique forme une partition de A.*

Remarque 3.34. (Pour retenir les propositions 9 et 10, il faut raisonner en terme de plus grand et de plus petit ouvert et fermé et qu'il y a égalité pour les intersections finies d'ouverts et pour les réunions finies de fermés.) Je ne crois pas, il faut plutôt retenir la démonstration ? , relire la démonstration page 36 livre Topologie Gilles Christol pour prendre une décision.

Démonstration.

1. pas de démonstration disponible.
2.
3.
   a) si $x \in \overset{\circ}{A}, \exists O \in \mathcal{O}; O \subset A, x \in O$ d'où $p \in A \Rightarrow \overset{\circ}{A} \subset A$.
   b) si $p \in A; \forall O \in \mathcal{O}; p \in O \Rightarrow p \in O \cap A$ d'où le résultat p est un point adhérent de A $p \in \bar{A}$.
4. si $A = \bar{A}$ alors A est un fermé, si A est fermé alors $\bar{A} \in A$, car A est le plus petit or $A \subset \bar{A}$ donc $A = \bar{A}$
5. Démonstration page 7 du cours de Ben Abdallah TCD.
6.
7.
8.
9. page 36 livre Topologie Gilles Christol (3).
10. page 36 livre Topologie Gilles Christol (4).
11.

□

3.1.9 Ensembles Denses

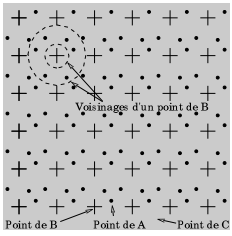


Figure 3.1. C est dense dans B, mais A n'est pas dense dans B.

Note 3.35. Rajouter commentaire page 14 Topologie Masson + exemples : Démonstration du théorème de Stone Weirstrass actuellement en cours d'analyse réelle page 234 + théorème d'approximation de fonction page 235.

Définition 3.36. *Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique, A et B deux parties de E. On dit que A est **dense** par rapport à B si et seulement si elles vérifient l'une des propriétés suivantes :*

- *Tout point x de B est un point adhérent de A (tout voisinage dans E d'un point x de B ou tout ouvert de E contenant un point x de B rencontre A : $\forall x \in B, \forall V \in \mathcal{V}_x \vee \mathcal{O}, V \cap A \neq \varnothing$).*
- *Autrement dit $B \subset \bar{A}$ (tout point x de B appartient à $\bar{A}$: $\forall x \in B, x \in \bar{A}$).*

Remarque 3.37. Dans le cas ou B=E, on dit que A est partout dense dans E. D'où la défintion avec $E \subset \bar{A} \Leftrightarrow E = \bar{A}$

Définition 3.38. *Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique et A une partie de E. On dit que A est* ***partout dense*** *dans E si et seulement si elle vérifie l'une des propriétés suivantes :*

- *Elle est dense par rapport à E : tout voisinage de tout point de E rencontre A.*
- *Autrement dit $\bar{A} = E$.*

Démonstration. Si A, $A \subset E$ est partout dense dans E et E fermé alors $E = \bar{A}$: densité $\Rightarrow$ $E \in \bar{A}$, $A \subset E \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{E} = E$ car E fermé d'où $E = \bar{A}$. □

Exemple 3.39. $\mathbb{Q}$ est partout dense dans $\mathbb{R}$.

3.1.10 Espace Rare ou non Dense

Définition 3.40. *Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique. On appelle espace* ***rare*** *ou* ***non dense*** *de E, toute partie de E dont l'adhérence n'a pas de point intérieur.*

3.1.11 Espace topologique Séparé au sens de Hausdorff

Avertissement 3.41. Lorsque l'on parle d'espace séparé, sans autre précision, il s'agit toujours d'espace séparé au sens d'Hausdorff.

Définition 3.42. *Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique. On dit que E est un espace* ***séparé*** *au sens d'Hausdorff si et seulement si :*

- *$\forall (x, y) \in E^2, x \neq y$, $\exists$ un voisinage V_x de x et un voisinage V_y de y tels que $V_x \cap V_y = \varnothing$. C'est l'axiome $[T_2]$ de séparation appelé également axiome de séparation de Hausdorff.*
- *Autrement dit : 2 points distincts quelconques de E admettent des voisinages distincts.*

Exemple 3.43. Tout espace métrique est séparé.

Démonstration. Cours M. Benabdallah page 8 cours TCD. □

Proposition 3.44. *Dans un espace topologique E séparé tout singleton (i.e. tout ensemble réduit à 1 point) est un fermé de E.*

Exemple 3.45. Dans un espace métrique E tout singleton (i.e. tout ensemble réduit à un point) est un fermé de E.

3.2 Construction d'une topologie sur un ensemble.

Dans les situation concrètes, les topologies sont souvent définies au moyen de parties naturellement associées à certaines structures supplémentaires (ce sera par exemple le cas des boules ouvertes dans les espace métriques). Ce paragraphe formalise ce type de construction.

3.2.1 Topologie Engendrée

Proposition 3.46. *Soient E un ensemble non vide, $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$ et T un ensemble non vide de topologie sur E.*

1. *L'intersection quelconque d'éléments de T est une topologie sur E (autrement dit l'intersection de topologies est une topologie).*
2. *$T(A)$ l'ensemble des topologies qui contiennent $\mathcal{A}$.*
    i. *est non vide,*

ii. et possède un plus petit élément qui est l'intersection des éléments de $T(A)$.

Définition 3.47. *Soient E un ensemble non vide et $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$.*
Le plus petit élément (le moins fin) de $T(A)$ est appelé ***topologie engendrée*** *par $\mathcal{A}$.*
Autrement dit, c'est la plus petite topologie (la moins fine) qui contient $\mathcal{A}$.

Remarque 3.48. La description des éléments de la topologie engendrée à partir des éléments de $\mathcal{A}$ est peu commode. C'est pour cette raison que l'on va définir l'a notion de base de topologie.

3.2.2 Base de topologique

Définition 3.49. *Soit E un ensemble.*
On appelle ***base de topologie*** *sur E une partie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{P}(E)$ telle que :*

i. la réunion des éléments de $\mathcal{B}$ est égale à E,

ii. l'intersection de 2 éléments de $\mathcal{B}$ est une réunion d'éléments de $\mathcal{B}$.

Exemple 3.50. C'est le cas de l'ensemble des boules ouvertes d'un espace métrique.

Remarque 3.51. Si $\mathcal{B}$ est une base de topologie, la topologie engendrée par $\mathcal{B}$ a une description particulièrement simple et utile.

Proposition 3.52. *Soit E un ensemble et $\mathcal{B}$ est une base de topologie sur E*

1. *La topologie engendrée par $\mathcal{B}$ est la partie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(E)$ dont les éléments sont les réunions d'éléments de $\mathcal{B}$: $\mathcal{T} = \left\{O; O = \bigcup_{i\in I} O_i; \forall i \in I, O_i \in \mathcal{B}\right\}$.*
2. *Autrement dit, O est un ouvert de $\mathcal{T}$ si et seulement si O est la réunion d'une famille quelconque d'élément de $\mathcal{B}$: $(O \in \mathcal{T}) \Leftrightarrow \left(O = \bigcup_{i\in I} O_i; \forall i \in I, O_i \in \mathcal{B}\right)$.*
3. *Ou encore, O est un ouvert de $\mathcal{T}$ si et seulement si pour tout élément x de O, il existe un élément de $\mathcal{B}$ contenant x et contenu dans O : $(O \in \mathcal{T}) \Leftrightarrow (\forall x \in O, \exists O_x \in \mathcal{B}; x \in O_x \text{ et } O_x \subset O)$.*

Remarque 3.53.

Définition 3.54. *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{B}$ une base de topologie sur E.*

1. *On dit que* ***$\mathcal{B}$ est une base de topologie pour une topologie $\mathcal{T}$*** *$\Leftrightarrow$ $\mathcal{B}$ engendre $\mathcal{T}$.*
2. *On dit qu'une topologie $\mathcal{T}$ est à base dénombrable $\Leftrightarrow$ il existe une base de topologie pour $\mathcal{T}$ qui est dénombrable.*

Exemple 3.55. Voir analyse pour la licence J.P. Marco Masson p. 8-9

3.2.3 Sous-base d'un espace topologique

Définition 3.56.

Théorème 3.57.

Théorème 3.58.

Proposition 3.59.

3.2.4 Base locale

Définition 3.60.

3.3 Convergence, limite et continuité

Avertissement 3.61. Est-il possible de définir la convergence sur une partie A de X lorsque X n'est pas un espace topologique ? (Voir cours lesmathematiques.net sur internet, où c'est la convergence d'applications qui permet de définir la topologie sur un espace d'application).

Revoir les définitions de continuité et de convergence ! CTE page 71 à 74. Il n'y a pas toujours équivalence !

Dans ce livre la limite et la continuté sont définies pour une fonction d'un espace topologique dans un espace topologique. Certains livres donnent la définition de la continuité relativement à une partie A d'un espace topologique dans ce cas on voit apparaitre dans les défintions des contions d'appartenance à $\bar{A}$ ou à l'adhérence de l'espace d'arrivé de f.

CTE chapitre 2 (topologie), « la notion de limite de fonction en un point est une notion assez voisine de la notion de continuité mais plus simple car le point peut ne pas appartenir au domaine de définition de la fontion » pour la continuité on a $x_0 \in E$ ou A alors que pour la limite on a $x_0 \in \bar{A}$.

3.3.1 Filtre, base de filtre et ultrafiltre

Note 3.62. Cette notion de filtre a été introduite pour définir la convergence d'application sur des espaces dépourvus de topologie.

Soit X un ensemble et $\mathcal{F}$ et $\mathcal{B}$ deux ensembles non vides de parties de X.

Définition 3.63. *On dit que $\mathcal{F}$ est un **filtre** sur X si et seulement si :*

i. $\forall (A,B) \in X^2; ((A,B) \in \mathcal{F}^2) \Rightarrow (A \cap B \in \mathcal{F})$,

ii. $\forall A \in \mathcal{F}$ *et* $\forall A' \in X; (A \subset A') \Rightarrow (A' \in \mathcal{F})$,

iii. $\varnothing_X \notin \mathcal{F}$.

Définition 3.64. *On dit que $\mathcal{B}$ est un **base de filtre** sur X si et seulement si :*

i. $\forall (A,B) \in X^2; ((A,B) \in \mathcal{B}^2) \Rightarrow (\exists C \in \mathcal{B}; C \subset (A \cap B))$,

ii. $\varnothing_X \notin \mathcal{B}$.

Note 3.65. Autrement dit, pour toute intersection de 2 éléments d'un filtre, on peut trouver un troisième élément contenu dans l'intersection. Un filtre ne contient pas l'ensemble vide.

Proposition 3.66. *Tout filtre sur X est une base de filtre sur X (la réciproque n'est pas vraie).*

Démonstration. □

Proposition 3.67. *Soit $\mathcal{B}$ une base de filtre sur X.*
L'ensemble des parties de X contenant un élément de $\mathcal{B}$ est un filtre sur X.

Démonstration. □

Exemple 3.68. Soit X un espace topologique et x_0 un point de X.

1. L'ensemble $\mathcal{V}_{x_0}$ des voisinages de x_0 (i.e. un système de voisinages de x_0) est un filtre sur X.
2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, l'ensemble des intervalles $]x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon[$ où $\varepsilon > 0$ est un base de filtre sur $\mathbb{R}$.
   C'est un cas particulier de l'exemple (1).
3. Autres exemples de base de filtre sur $\mathbb{R}$, qui ne sont pas des cas particuliers de (1).
   - L'ensemble des $[x_0; x_0 + \varepsilon[$ où $\varepsilon > 0$,
   - L'ensemble des $]x_0; x_0 + \varepsilon[$ où $\varepsilon > 0$,
   - L'ensemble des $]x_0 - \varepsilon; x_0]$ où $\varepsilon > 0$,

- L'ensemble des $]x_0-\varepsilon; x_0[$ où $\varepsilon>0$,
- L'ensemble des $]x_0-\varepsilon; x_0[\cup]x_0; x_0+\varepsilon[$ où $\varepsilon>0$,
- L'ensemble des $[a;+\infty[$ où $a\in\mathbb{R}$,
- L'ensemble des $]-\infty; a[$ où $a\in\mathbb{R}$.

4. Sur $\mathbb{N}$, l'ensemble des parties $\{n; n+1; n+2; ...\}$ où $n\in\mathbb{N}$ est une base de filtre.
5. Soit Y une partie de X, $x_1\in\bar{Y}$ et V un voisinage de x_1.
   L'ensemble des partie Y de la forme $Y\cap V$ est un filtre sur Y.
   (Notament $Y\cap V\neq\varnothing$ car $x_1\in\bar{Y}$). Si $X=Y$ on retrouve l'exemple (1). Retrouver la définition générale, cette propriété sous-entend que X est un espace topologique.

3.3.2 Convergence et Limite suivant une base de filtre

3.3.2.1 Définition

Définition 3.69. *Soient X un ensemble muni d'une base de filtre $\mathcal{B}$.*
E un espace topologique,
$f: X\to E$ une application,
l un point de E.
*On dit que f **tend ou converge** vers l suivant $\mathcal{B}$ si et seulement si :*
Pour tout voisinage V de l dans E,$\exists B\in\mathcal{B}; f(B)\subset V$.
*Dans ce cas l est appelé **limite** de f.*

Remarque 3.70.

1. C'est évident, mais il faut faire attention : une application (ou en particulier une suite) converge dans un ensemble donné si et seulement si la limite l appartient à cet ensemble.
2. Si on connait un système fondamental (V_i) de voisinage de l dans E, il suffit de vérifier cette condition pour les V_i (puisque tout voisinage de l contient un V_i).

Exemple 3.71. Ces exemples sont importants :

1. Si $X=\mathbb{N}$ et $\mathcal{B}$ est la base de filtre décrite dans l'exemple (5). f est donc une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de E. La définition de la convergence d'une suite à valeurs dans un espace topologique :

   Définition 3.72. *Soit $(E,\mathcal{O})$ un espace topologique, (a_n) une suite de E et l un point de E.*
   *On dit que (a_n) **tend ou converge** vers l si et seulement si :*
   Pour tout voisinage V de l dans E,$\exists N\in\mathbb{N}; (\forall n\geqslant N)\Rightarrow(a_n\in V)$.
   On écrit alors $\lim_{n\to+\infty} a_n=l$.

   Remarque 3.73. On peut remplacer voisinage par ouvert.

2. Avec les conditions précédentes, si E est un espace métrique, on obtient la définition classique de la convergence d'une suite de point d'un espace métrique :

   Définition 3.74. *Soit (E,d) un espace métrique, (a_n) une suite de E et l un point de E.*
   *On dit que (a_n) **tend ou converge simplement** vers l si et seulement si :*
   $\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}; (\forall n\geqslant N)\Rightarrow(d(a_n,l)<\varepsilon)$.
   On écrit alors $\lim_{n\to+\infty} a_n=l$.

   Dans un espace métrique, on peut définir un autre type de converge «plus fort»: la convergence uniforme. On a rajouté «simplement» dans la définition pour différencier ces deux notions. On peut remplacer $d(a_n,l)<\varepsilon$ par $a_n\in\mathcal{B}(l,\varepsilon)$

3. Si X et E sont deux espaces topologiques. Si $\mathcal{B}$ est la base de filtre définie dans l'exemple (1). On obtient la définition classique de la convergence d'une fonction sur un espace topologique et à valeur dans un espace topologique :

   Définition 3.75. *Soient $(E, \mathcal{O})$ et $(X, \mathcal{O}')$ deux espaces topologiques, $f: X \to E$ une application et l un point de E.*
   On dit que f ***tend ou converge*** *vers l au point x_0 si et seulement si :*
   Pour tout voisinage V de l dans E,$\exists$ un voisinage W de x_0 dans X tel que :
   $(x \in W) \Rightarrow (f(x) \in V)$.
   On écrit alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.

4. Rajouter le définition de la limite vers l quand x tend vers x_0 selon A : Dico Puf page 441 ou CTE page 72 2003/2004.

5. Dans ce dernier cas, si X et E sont des parties de $\mathbb{R}$ et si $\mathcal{B}$ est la base de filtre définie dans l'exemple (3). on obtient la définition de la limite d'une fonction réelle d'une variable réelle en un point :

   Définition 3.76. *Soit $f: X \to E$ une application, l un point de E.*
   On dit que f ***tend ou converge simplement*** *vers l au point x_0 si et seulement si :*
   $\forall \varepsilon > 0; \exists \eta > 0; \forall x, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
   On écrit alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.

   La présence du mot simplement est due au fait que $\mathbb{R}$ est un espace métrique.

6. En prenant toujours X et E parties de $\mathbb{R}$, mais en utilisant comme bases celles données dans l'exemple (4), on obtient les définitions de : $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \geqslant 0}} f(x)$;$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > 0}} f(x)$; $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \leqslant 0}} f(x)$; $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < 0}} f(x)$; $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq 0}} f(x)$; $\lim_{x \to +\infty} f(x)$;$\lim_{x \to -\infty} f(x)$

7. ?

8. ?

Note 3.77. Les suites joueront un rôle capital dans les espaces métriques, car elles serviront à établir de nombreuses propriétés topologiques.

Exemple 3.78.

- Un point d'un espace métrique est un point adhérent de A si et seulement s'il est limite d'une suite de points de A.
- A est fermé si et seulement si toute suite convergente de point de A et convergente dans E a sa limite dans A.

Théorème 3.79. *Soient $(X, \mathcal{O})$ et $(E, \mathcal{O}')$ deux espaces topologiques,*
$f: X \to E$ une application,
$x_0 \in X$, $(W_i)_{i \in I}$ un système fondamental de voisinage de x_0 dans X,
$l \in E$, $(V_j)_{j \in J}$ un système fondamental de voisinage de l dans E.
Les conditions suivantes sont équivalentes :

i. $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.

ii. $\forall j \in J, \exists i \in I; f(W_i) \subset V_j$.

3.3.2.2 Unicité de la limite

Théorème 3.80. *Soit X un ensemble muni d'une base de filtre $\mathcal{B}$,*
E un espace topologique séparé,
$f: X \to E$ une application.
Si f admet une limite suivant $\mathcal{B}$, cette limite est unique (autrement dit f admet au plus une limite suivant $\mathcal{B}$).

Démonstration. Cours Ben Abdallah page 9. □

Avertissement 3.81. L'unicité est assurée parceque E est séparé. Dans le cas contraire f peut avoir plusieurs limites suivant $\mathcal{B}$. Exemple : Si E est muni de la topologie grossière , tout point de E est limite de toute suite (x_n) de E.

3.3.2.3 Convergence et limite

Théorème 3.82. *Soit X un ensemble muni d'une base de filtre $\mathcal{B}$,*
E un espace topologique,
$f: X \to E$ une application, $l \in E$, $X' \in \mathcal{B}$ (N'est ce pas plutôt $X' \subset X$),
f' la restriction de f à X'.
Alors les ensembles $B \cap X'$, où $B \in \mathcal{B}$, forment un base de filtre sur X'.
De plus (f tend vers l suivant $\mathcal{B}$) $\Leftrightarrow$ (f' tend vers l suivant $\mathcal{B}'$) Attention $\mathcal{B}'$ n'est pas défini !.

3.3.2.4 Convergence et limite de la composée de 2 applications

Proposition 3.83. *Soit $(E, \mathcal{O}_E)$; $(F, \mathcal{O}_F)$ et $(F, \mathcal{O}_G)$ trois espaces topologiques, A une partie de E, B une partie de F, $f: A \to F$, $g: B \to G$ deux applications.*

si $\begin{cases} \lim_a f = l \text{ avec } l \in \bar{B} \\ \lim_l g = l' \end{cases}$ *alors* $\lim_a g \circ f = l'$

3.3.3 Continuité

Note 3.84. Les fonctions continues jouent un rôle important car elles conservent certaines propriétés : la compacité, la connexité, qu'en est-il de la densité ? l'image d'une partie dense est-t-elle dense ?

3.3.3.1 En un point

Définition 3.85. *Soient $(X, \mathcal{O})$ et $(E, \mathcal{O}')$ deux espaces topologiques,*
$f: X \to E$ une application, x_0 un point de X.
On dit que f est continue en x_0 si et seulement si pour tout voisinage V de $f(x_0)$ dans E,$\exists$ un voisinage W de x_0 dans X tel que : $f(W) \subset V$.

Proposition 3.86. *Autrement dit, on dit que f est continue en x_0 si et seulement si :* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Remarque 3.87.

1. f est continue en x_0 $\Leftrightarrow$ Pour tout voisinage V de $f(x_0)$ dans E, $f^{-1}(V)$ est voisinage de x_0 dans X.

   Démonstration. Cours de Ben Abdallah page 11. □

2. On peut remplacer voisinage par ouvert.
3. Si X et E sont des espaces métriques, on peut remplacer voisinage par boule (ouverte ou fermée) (voir ci-dessous)

Exemple 3.88.

1. Continuité d'une fonction à valeur dans des espace métriques :

   Définition 3.89. *Si (X, d) et (E, d') sont des espaces métriques la condition devient :*
   *On dit que f est **continue en x_0** si et seulement si :*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0,\ f(\mathcal{B}(x_0, \eta)) \subset \mathcal{B}(f(x_0), \varepsilon),$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0; \forall x \in X, (d(x_0, x) \leqslant \eta) \Rightarrow (d(f(x_0), f(x)) \leqslant \varepsilon).$$

2. Continuité d'une fonction réelle à variable réelle :
   Si de plus X et Y sont des parties de $\mathbb{R}$, on a la définition de la continuité d'une fonction réelle d'une variable réelle.

3.3.3.2 Sur un espace topologique

Définition 3.90. *Soient X et Y 2 espaces topologiques,*
$f: X \to Y$ une application.
*On dit que f est **continue sur $\boldsymbol{X}$** si et seulement si elle est continue en tout point de X.*

Remarque 3.91. L'ensemble des fonctions : $X \to Y$ continues est noté $\mathcal{C}(X, Y)$.

3.3.3.3 C.N.S. de continuité et image réciproque d'ouverts ou de fermés

Théorème 3.92. *Soient X,Y 2 espaces topologiques,*
Les propositions suivantes sont équivalentes

i. *f continue.*

ii. *L'image réciproque par f d'une partie ouverte de Y est une partie ouverte de X.*

iii. *L'image réciproque par f d'une partie fermée de Y est une partie fermée de X.*

iv. *Pour toute partie A de X, on a $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.*

Démonstration. Cours M. Ben Abdallah page 11 TCD. □

Remarque 3.93. Si $A \subset E$ et si $f: E \to F$ est continue alors $f_{|A}: A \to F$ est continue, mais la réciproque est fausse. Cependant, on a l'équivalence localement, si A est un voisinage de x_0 alors $f_{|A}$ est continue en x_0 si et suelment si f est continue en x_0. En conclusion la continuité est une propriété locale.

Exemple 3.94.

1. Pour tout espace topologique E, l'application identique Id_E: $\left|\begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array}\right.$ est continue.
2. Pour tout espace topologique E et F, l'application constante : $\left|\begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & y_0 \end{array}\right.$ est continue.
3. Toute application d'un espace topologique discret E dans un espace topologique F est continue.

Démonstration.

1. Cours M. Ben Abdallah page 11 TCD.
2. Cours M. Ben Abdallah page 11 TCD.
3. La topologie de l'espace discret E est par définition $\mathcal{P}(E)$ donc toute image réciproque d'ouverts de F est un ouvert de E. □

3.3.3.4 C.S. de convergence pour la composée de deux applications

Note 3.95. Cette propriété est placé ici car cette C.S. nécessite la continuité d'une des applications.

Théorème 3.96. *Soient T un ensemble muni d'une base de filtre $\mathcal{B}$.*
X et Y 2 espaces topologiques, $l \in X$,
$f: T \to X$ et $g: X \to Y$ 2 applications.
si $\left\{\begin{array}{c} f \text{ converge vers } l \text{ suivant } \mathcal{B} \\ g \text{ continue en } l \end{array}\right.$ $\Rightarrow (g \circ f)$ *tend vers $g(l)$ suivant $\mathcal{B}$.*

3.3.3.5 C.S. de continuité pour la composée de deux applications

Théorème 3.97. *Soient X,Y et Z 3 espaces topologiques,*

1. *si* $\begin{cases} f \text{ continue en } x \\ g \text{ continue en } f(x) \end{cases} \Rightarrow (g \circ f)$ *continue en* x. *(continuité en un point).*
2. $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ *et* $g \in \mathcal{C}(Y,Z) \Rightarrow g \circ f \in \mathcal{C}(X,Z)$. *(continuité sur des espaces topologiques).*

3.3.3.6 Convergence des suites du type $f \circ x_n$ i.e. $(f(x_n))$

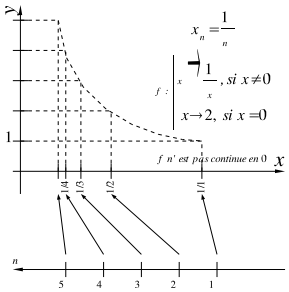
Proposition 3.98. *Soient E et F 2 espaces topologiques,* f: $E \to F$ *une application,* $a \in E$ *et* (x_n) *une suite de E convergente vers a.*

1. f *continue en* $a \Rightarrow$ *la suite* $(f(x_n))$ *de F converge vers* $f(a)$ *i.e.* $\lim_{x\to a} f(x) = f(\lim_{x\to a} x_n)$.
2. *En particulier si a est valeur d'adhérence de* (x_n) *et f continue en a alors* $f(a)$ *est valeur d'adhérence de* $(f(x_n))$.

Démonstration. preuve page 12 cour M. Benabdallah. □

Remarque 3.99.

1. Dans un espace métrique, il y a équivalence entre continuité de f en un point et convergence de $f(x_n)$ (voir chapitre sur les espaces métriques page 31).
2. Contre exemple, dans lequel la condition de continuité n'est pas satisfaite :



$x_n = \frac{1}{n}$, f: $\begin{cases} x \mapsto \frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0 \mapsto 2 \end{cases}$, f n'est pas continue en 0, $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$
mais $f(0) = 2$ et $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty$.

3.3.4 Application continue ouverte

Définition 3.100. *On appelle* ***application continue ouverte*** *toute application continue telle que l'image d'un ouvert est encore un ouvert.*

Note 3.101. Attention ! la continuité ne garantit pas que l'image d'un ouvert soit encore un ouvert, seul l'image réciproque d'un ouvert est encore un ouvert (voir propriété précédente). Si c'était le cas cette définition n'aurait pas de sens.

3.4 Prolongement par continuité d'une fonction

Remarque 3.102. Soit f: $D \subset (E, d) \to (E'; d')$ x_0 un point d'accumulation de E, lorsque f n'est pas définie en x_0 et que $\lim_{x\to x_0} f(x_0) = l$, la fonction g définie sur $D \cup \{x_0\}$ par $g(x) = f(x)$ sur D et $g(x_0) = l$ est continue en x_0.

Définition 3.103. *Cette fonction est appelée* ***prolongement par continuité*** *de f en x_0.*

3.5 Prolongement des égalités et inégalités

Remarque 3.104. Le théorème suivant indique qu'une application continue est entièrement déterminée par les valeurs qu'elle prend sur une partie dense. Autrement dit, une application définie sur une partie A dense dans un ensemble B, ne peut avoir qu'un prolongement continu sur B.

3.5.1 Egalité

Théorème 3.105. *Soient E et F 2 espaces topologiques et $f, g: E \to F$ deux applications continues sur T.*

1. *$\mathcal{A} = \{x \in E; f(x) = g(x)\}$ i.e. $[f = g]$ est un fermé dans E.*
2. *S'il existe une partie S de E partout dense telle que $f(a) = g(a), \forall a \in S$ alors $f{=}g$ sur E autrement dit $f(u) = g(u), \forall u \in E$*

Remarque 3.106. La deuxième partie n'a aucun sens. Quel est le rôle joué par S ?

Démonstration. Voir cours de M. Benadallah page 13 (démonstration à revoir) □

3.5.2 Inégalité

Théorème 3.107. *Soient E un espace topologique et $f, g: E \to \mathbb{R}$ deux applications réelles continues sur E alors*

1. *$\mathcal{A} = \{x \in E; f(x) \leqslant g(x)\}$ i.e. $[f \leqslant g]$ est un fermé dans E.*
2. *S'il existe une partie S de E partout dense telle que $f(a) \leqslant g(a), \forall a \in S$ alors $f \leqslant g$ sur E autrement dit $f(u) \leqslant g(u), \forall u \in E$.*

Démonstration. Voir cours de M. Benadallah page 13 (démonstration à revoir) □

3.6 Homéomorphisme

Définition 3.108. *Soit X, Y 2 espaces topologiques et $f: X \to Y$ une bijection.*

On dit que f est un ***homéomorphisme*** *ou une* ***application bicontinue*** *de X, Y si et seulement si f et f^{-1} (son application réciproque) sont continues.*

Proposition 3.109. *Soit X, Y 2 espaces topologiques et $f: X \to Y$ une bijection, f est un homéomorphisme de X, Y si et seulement si elle vérifie l'une des 2 propriétés équivalentes suivantes :*

i. Une partie de X est un ouvert $\Leftrightarrow$ son image dans Y est un ouvert.

ii. Une partie de X est un fermé $\Leftrightarrow$ son image dans Y est un fermé.

Remarque 3.110. L'homéomorphisme est la notion naturelle d'isomorphisme pour les espaces topologiques.

Définition 3.111. *Soit X, Y 2 espaces topologiques. On dit que X et Y sont homéomorphes si et seulement si il existe un homéomorphisme de X dans Y.*

Remarque 3.112.

1. L'inverse d'un homéomorphisme est un homéomorphisme,
2. La composée $f \circ g$ de 2 homéomorphisme est un homéomorphisme,

3. L'ensemble des homéomorphisme d'un espace topologique sur lui-même est un groupe pour la loi $\circ$; appelé groupe des homéomorphismes.
4. La relation «est isomorphe à» est une relation d'équivalence entre espaces topologiques.
5. Si X et Y sont homéomorphes, la structure des parties ouvertes est la même dans X et Y.
6. Comme toutes les propriétés topologiques sont définies à partir des ensembles ouverts de X et Y, X et Y auront les mêmes propriétés topologiques. En d'autres termes X et Y sont presques le «même» espace topologique.
7. Un des buts de la topologie consiste à classer les espaces topologiques à homéomorphisme près.

Exemple 3.113.

1. Tous les intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$ sont homéomorphes.
2. Dans un espace normé toutes les boules ouvertes sont homéomorphes.
3. Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$
   i. l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto & a + \lambda x \end{array} \right.$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.
   ii. $f(\mathcal{B}(O;1)) = \mathcal{B}(a;|\lambda|)$, conclusion toutes les boules ouvertes sont homéomorphes à la boule unité et par conséquent entre elles.
4. $]0;1[$ et $[0;1]$ ne sont pas homéomorphes.
5. Un cercle et un carré sont homéomorphes (translation + projection centrale).
6. $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est un homéomorphisme d'inverse $\exp : \mathbb{R} \to {\mathbb{R}^*}_+$.
7. $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ est un homéomorphisme d'inverse $\operatorname{tg} :]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$.
8. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t^3 \end{array} \right.$ est un homéomorphisme.
9. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to &]-1;1[\\ t & \mapsto & \frac{t}{1+|t|} \end{array} \right.$ est un homéomorphisme d'inverse $f' : \left| \begin{array}{ccc}]-1;1[& \to & \mathbb{R} \\ s & \mapsto & \frac{s}{1-|s|} \end{array} \right.$.

Démonstration. (3) Voir cours de M. Benadallah page 13.

(8) Soit $f(t) \in]-1;1[$, $f(t) = \frac{t}{1+|t|} \Leftrightarrow f(t)(1+|t|) = t \Leftrightarrow f(t) + |t|\, f(t) = t \Leftrightarrow t - |t|\, f(t) = f(t)$

or f est impaire donc $|t| f(t) = t|f(t)| \Leftrightarrow t(1 - |f(t)|) = f(t)$ et $t = \frac{f(t)}{1-|f(t)|}$ car $f(t) \neq \pm 1$, $f' :]-1;1[\to \mathbb{R}$.

□

3.7 Valeur d'adhérence

3.7.1 ... sur un ensemble muni d'une base de filtre

3.7.1.1 Définition

Définition 3.114. *Soit X un ensemble muni d'une base de filtre $\mathcal{B}$, E un espace topologique, $f : X \to E$ une application, l un point de E.*

On dit que l est une valeur d'adhérence de f suivant $\mathcal{B}$ si et seulement si pour tout voisinage V de l dans E et tout élément $B \in \mathcal{B}; f(B) \cap V \neq \varnothing$.

Remarque 3.115. Si on connait un système fondamental de voisinage (V_i) de l dans E, il suffit de vérifier cette condition pour les V_i.

3.7.1.2 Valeur d'adhérence d'une fonction convergente

Théorème 3.116. *Soient X un ensemble muni d'une base de filtre $\mathcal{B}$, E un espace topologique séparé, $f: X \to E$ une application.*
Si f tend vers l suivant $\mathcal{B}$, l est l'unique valeur d'adhérence de f suivant $\mathcal{B}$.

Remarque 3.117. Quel est l'apport de la valeur d'adhérence ?

- Si f admet une limite suivant $\mathcal{B}$: aucun (théorème précédent).
- Si f n'admet pas de limite suivant $\mathcal{B}$:
  - f peut ne pas avoir de valeur d'adhérence,
  - f peut avoir une et une seule valeur d'adhérence,
  - f peut admettre plusieurs valeurs d'adhérence.

  Conclusion : On perd l'unicité mais on gagne sur l'existence.

3.7.1.3 Adhérence et valeur d'adhérence

Théorème 3.118. *Soient X un ensemble muni d'une base de filtre $\mathcal{B}$, E un espace topologique, $f: X \to E$ une application.*
L'ensemble des valeurs d'adhérence de f suivant $\mathcal{B}$ est l'intersection des $\overline{f(B)}$ quand B parcourt $\mathcal{B}$.

Exemple 3.119. Pour un espace topologique l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite (x_n) est $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$ où $A_n = \{x_i \in \alpha; i \leqslant n\}$ $\alpha = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$.

Démonstration. Voir cours de M. Benadallah TCD page 9. □

3.7.2 ... sur un espace topologique

3.7.2.1 Pour une fonction quelconque

3.7.2.2 Pour une suite

Définition 3.120. *Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et (a) un point de E. On dit que (a) est valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E, si et seulement si $\forall$ voisinage V de a dans E et $\forall\ n \in \mathbb{N}, \exists i \in \mathbb{N}, i \geqslant n, x_i \in V$.*

Autrement dit, il existe un grand nombre de points qui se rapprochent de a

Théorème 3.121. *Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique, $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite de E et (a) un point de E :*
Si $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(a) \Rightarrow$ (a) est valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration. Voir cours de M. Benadallah TCD page 10. □

Remarque 3.122. Dans un espace métrique, il y a équivalence.

Démonstration. Voir cours de M. Benadallah TCD page 10. □

3.8 Dual topologique d'un espace vectoriel topologique

Définition 3.123. *Soit E un espace vectoriel topologique. On appelle **dual topologique** de E, l'ensemble des formes linéaires continues sur E.*

Proposition 3.124. *Le dual topologique de E est un espace vectoriel.*

3.9 «Autogamie» d'espaces topologiques

Ou, comment des espaces topologiques permettent de construire d'autres espaces topologiques.

3.9.1 Sous-espace topologiques

3.9.1.1 Topologie induite

Théorème 3.125. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, A une partie non vide de X, alors $\mathcal{T}_A = \{O \cap A; O \in \mathcal{T}\}$ i.e. la trace sur A des ouverts de X est une topologie sur A.*

Démonstration. Voir cours de M. Benadallah TCD page 14. □

Définition 3.126. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, A une partie non vide de X, on appelle* ***topologie induite*** *sur A par $\mathcal{T}$ la famille de toutes les intersections de A avec les ouverts de X, i.e. la trace sur A des ouverts de X.*

Exemple 3.127.

1. Soit l'ensemble $X = \{a, b, c, d, e\}$. la topologie $\mathcal{T} = \{\varnothing; X; \{a\}; \{c, d\}; \{a, c, d\}; \{b, c, d, e\}\}$ sur . Soit $A = \{a, d, e\}$ une partie de X.
   $\varnothing \cap A = \varnothing$; $X \cap A = A$; $\{a\} \cap A = \{a\}$; $\{c, d\} \cap A = \{d\}$; $\{a, c, d\} \cap A = \{a, d\}$; $\{b, c, d, e\} \cap A = \{d, e\}$. La topologie induite par $\mathcal{T}$ sur A est $\mathcal{T}_A = \{\varnothing; A; \{a\}; \{d\}; \{a, d\}; \{d, e\}\}$.
2. Si E est un espace métrique et A une partie de E, A est aussi un espace métrique (une boule de A est une boule de $E \cap A$) et la topologie définie par cette métrique est la topologie induite. Les boules ouvertes de A, sont les traces sur A des boules ouvertes de E.

Théorème 3.128. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, $\mathcal{B}$ un base de topologie pour $\mathcal{T}$ et A une partie de X. Alors*

1. *L'ensemble $\mathcal{B}_A = \{O \cap A; O \in \mathcal{B}\}$ est une base de topologie sur A. Autrement dit $\mathcal{B}_A$ est la trace de $\mathcal{B}$ sur A.*
2. *De plus, la topologie engendrée par $\mathcal{B}_A$ est la topologie induite $\mathcal{T}_A$.*

3.9.1.2 Définition

Définition 3.129. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, A une partie non vide de X et $\mathcal{T}_A$ est la topologie induite par $\mathcal{T}$ sur A, l'espace topologique $(A, \mathcal{T}_A)$ est appelé* ***sous-espace topologique*** *A de $(X, \mathcal{T})$.*

Remarque 3.130. Sauf précision contraire, une partie d'un espace topologique sera toujours supposée munie de la topologie induite par celle de cet espace.

3.9.1.3 C.N.S. sur les voisinages, les fermés

Théorème 3.131. *Soit E un espace topologique, F un sous-espace de E, $x \in F$ et $W \subset F$. Alors (W est un voisinage de x dans F) $\Leftrightarrow$ (W est l'intersection avec F d'un voisinage de x dans E). {Voisinage de F} : est la trace sur F des voisinages de E.*

Démonstration. Voir cours de M. Benadallah TCD page 14. □

Théorème 3.132. *Soit E un espace topologique, F un sous-espace de E et A une partie de F. Alors (A est fermée dans F) $\Leftrightarrow$ (A est l'intersection avec F d'une partie fermée de E). i.e. {fermé de F} : est la trace sur F des fermés de E.*

Théorème 3.133. *(Transitivité des sous-espaces).*
Soient E, E', E'' 3 ensembles tels que $E'' \subset E' \subset E$.
$\mathcal{T}$ une topologie de E, $\mathcal{T}'$ la topologie induite par $\mathcal{T}$ sur E' et $\mathcal{T}''$ la topologie induite par $\mathcal{T}'$ sur E''.
Alors $\mathcal{T}''$ est aussi la topologie induite par $\mathcal{T}$ sur E''.

Démonstration. Voir cours de M. Benadallah TCD page 15. □

3.9.1.4 Héridité de la séparation

Théorème 3.134. *Tout sous-espace topologique, d'un espace topologique séparé est séparé.*

3.9.1.5 Convergence d'une fonction

Théorème 3.135. *Soient X un ensemble muni d'une base de filtre $\mathcal{B}$, E un espace topologique, E' un sous-espace de E, $l \in E'$, $f: X \to E'$.*
« f tend vers l suivant $\mathcal{B}$ sur E' » $\Leftrightarrow$ « f tend vers l suivant $\mathcal{B}$ sur E ».

3.9.1.6 Continuité de l'injection canonique

Théorème 3.136. *Soit E un espace topologique et $E' \subset E$.*

L'application identique (injection canonique) $\left| \begin{array}{ccc} E' & \to & E \text{ est continue.} \\ x & \hookrightarrow & x \end{array} \right.$

Démonstration. Voir cours de M. Benadallah TCD page ?. □

3.9.1.7 Continuité d'une restriction

Note 3.137. Que se passe-t-il pour la continuité, si l'on restreint l'espace de départ d'une fonction ?

Théorème 3.138. *Soient E, F 2 espaces topologiques et $f: E \to F$ une application.*

1. *Pour tout $E' \subset E$, sous-espace topologique de E.*
   f est continue sur $E \Rightarrow$ sa restriction $f|_{E'}$ est continue sur E' .
   La réciproque est fausse, Mais !
2. *Soit $x \in E$ et $V \in \mathcal{V}_{x/E}$*
   $f|_V$ est continue en x sur $V \Rightarrow$ f est continue en x sur E .

Démonstration. Voir cours de M. Benadallah TCD page 15. □

Exemple 3.139. Soit $f = \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$, $f|_{\mathbb{Q}}$ est continue sur $\mathbb{Q}$, mais f n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

3.9.1.8 Continuité d'une fonction à valeurs dans un sous-espace topologique

Note 3.140. Que se passe-t-il pour la continuité, si l'on restreint l'espace d'arrivée d'une fonction ?

Proposition 3.141. *Soient E, F deux espaces topoligiques, $f: E \to F$ une application continue, B une sous-espace topologique de F. Si $f(E) \subset B$ alors $f: E \to B$ est aussi continue.*

Démonstration. Voir cours de M. Benadallah TCD page 15. □

3.9.2 Produits finis d'espaces topologiques

3.9.2.1 Topologie produit et ouvert élémentaire

Définition 3.142. *Soient (E_i) une famille finie d'espace topologique et $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$.*

Notons $\mathcal{S} = \{L; L = \prod_{i=1}^{n} U_i, U_i \text{ est un ouvert de } E_i\}$.
Les éléments de $\mathcal{S}$ *sont appelés* ***ouverts élémentaires ou pavés ouverts*** *de* E.

Proposition 3.143. *L'ensemble* $\mathcal{S}$ *des ouverts élémentaires est une base de topologie sur* E.

Définition 3.144. *La topologie engendrée par* $\mathcal{S}$ *est appelée* ***topologie produit*** *est une topologie de* E.

Exemple 3.145. Pour les espaces métriques est-ce que la topologigie produit est définie par une distance définie sur l'espace produit (autrement dit est-ce que l'espace topologique engendré par les topologies produit est un espace métrique ; i.e. est-il métrisable et inversement. Quelle sont les distances qui engendrent la topologie produit ?

Soit (E_1, δ_1), ..., (E_n, δ_n) n espaces métriques, la topologie définie par les distances équivalentes d_1, d_2, d_∞ décrites ci-dessous est identique à la topologie produit :

$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i(x_i, y_i)$, $d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\delta_i(x_i, y_i))^2}$ et $d_\infty(x,y) = \sup_{0 \leqslant i \leqslant 1} \delta_i(x_i, y_i)$.

Démonstration. Voir cours de M. Benadallah TCD page 16. □

3.9.2.2 Espace topologique produit

Définition 3.146. *E muni de sa topologie produit est appelé* ***espace topologique produit****.*

Proposition 3.147. *Soit* $x \in E; x = (x_i)_{i \in I}$ *où* $x_i \in E_i, \forall i \in I$.
Les ensembles de la forme $\prod_{i \in I} V_i$ *(où* V_i *est un voisinage de* x_i *dans* E_i *et où* $V_i = E_i$ *pour presque tout* i *) constituent un système fondamental de voisinage de* x *dans* E.

3.9.2.3 Adhérence et fermés

Proposition 3.148. *Soit* $A_i \subset E_i, \forall i = 1, ..., n$

1. $\overline{A_1 \times ... \times A_n} = \overline{A_1} \times ... \times \overline{A_n}$
2. *En particulier* $A_1 \times ... \times A_n$ *est fermé dans* $E \Leftrightarrow$ *chaque* A_i *est fermé dans* E_i.

3.9.2.4 C.N.S. de séparation

Proposition 3.149. *Un espace topologique produite est séparé* $\Leftrightarrow$ *chacun de ses facteurs est séparé.*

3.9.2.5 Convergence d'une fonction à valeurs dans un espace topologique produit

Proposition 3.150. *Soit* $(E_i)_{i=1;...;n}$ *une famille d'espace topologique,* E *l'espace topologique produit* $E_1 \times ... \times E_n$ *et* X *un ensemble muni d'une base de filtre* $\mathcal{B}$, $f: \left| \begin{array}{ccc} X & \to & E \\ x & \mapsto & (f_i(x))_{i \in I} \end{array} \right.$ *où* f_i: $X \to E_i$, $l \in E$ *avec* $l = (l_i)_{i \in I}$.
f *tend vers* l *suivant* $\mathcal{B} \Leftrightarrow \forall i \in I$, f_i *tend vers* l_i *suivant* $\mathcal{B}$.

3.9.2.6 Continuité d'une fonction à valeurs dans un espace topologique produit

Proposition 3.151. *Les projections canoniques de* E *sur les* E_i *sont continues.*

Démonstration. Cours de M. Benabdallah TCD page 17. □

Proposition 3.152. *Soient* T *un espace topologique* $f: \left| \begin{array}{ccc} T & \to & E \\ x & \mapsto & (f_i(x))_{i \in I} \end{array} \right.$ *où* f_i: $X \to E_i$, $l \in E$ *avec* $l = (l_i)_{i \in I}$.
f *est continue* $\Leftrightarrow$ *chaque* f_i *est continue.*

Démonstration. Cours de M. Benabdallah TCD page 18. □

Proposition 3.153. *Si I est une réunion de parties disjointes I_λ (où λ parcourt un ensemble Λ) l'espace topologique $\prod_{i\in I} E_i$, s'identifie à l'espace topologique $\prod_{\lambda\in\Lambda}\left(\prod_{i\in I} E_i\right)$. («associativité des produits topologiques»).*

Proposition 3.154. *Soit E_1, E_2, E_3 3 espaces topologiques l'application* Φ: $\left|\begin{array}{ccc} E_1\times E_2\times E_3 & \to & (E_1\times E_2)\times E_3 \\ (x,y,z) & \mapsto & ((x,y),y)\end{array}\right.$ *est un homéomorphisme.*

Démonstration. Cours de M. Benabdallah TCD page 18. □

Exemple 3.155. En particulier pour $p\leqslant n$, on peut identifier $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^{n-p}$.

Proposition 3.156. *Soit E_1, E_2 2 espaces topologiques l'application* Φ: $\left|\begin{array}{ccc} E_1 & \to & E_1\times\{b\} \\ x & \mapsto & (x,b)\end{array}\right.$ *(?) est un homéomorphisme.*

Démonstration. Cours de M. Benabdallah TCD page 19. □

Exemple 3.157. En particulier, on peut identifier $\mathbb{R}^n$ au sous-espace $\mathbb{R}^n\times\{0\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Exemple 3.158. Si f: $\left|\begin{array}{ccc} E_1\times E_2 & \to & Y \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y)\end{array}\right.$ est continue, sa restriction à tout sous-espace de $E_1\times E_2$ est aussi continue.

En particulier pour $(a,b)\in E_1\times E_2$, les applications partielles

$:\left|\begin{array}{ccc} E_1 & \to & Y \\ x & \mapsto & f(x,b)\end{array}\right.$ et $:\left|\begin{array}{ccc} E_2 & \to & Y \\ y & \mapsto & f(a,y)\end{array}\right.$ sont continues.

La réciproque est fausse, les applications partielles peuvent être continues sans que f le soit : exemple : $:\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}\,\text{si}\,(x,y)\neq(0,0)\\ 0\,\text{si}\,(x,y)=(0,0)\end{cases}\end{array}\right.$.

3.9.3 Produits infinis d'espace topologique

Définition 3.159. *Soient (E_i) une famille finie (? pourquoi imposer une famille finie alors que le chapitre porte sur les produits infinis) d'espace topologique et $E=\prod_{i\in I} E_i$.*

Notons $\mathcal{S}=\left\{L; L=\prod_{i\in I} U_i, U_i \text{ est un ouvert de } E_i \text{ et } U_i=E_i \text{ pour presque tout } i\in I\right\}$.

Les éléments de $\mathcal{S}$ sont appelés ***ouverts élémentaires ou pavés ouverts*** *de E.*

Proposition 3.160. *L'ensemble $\mathcal{S}$ des ouverts élémentaires est une base de topologie sur E.*

Définition 3.161. *La topologie engendrée par $\mathcal{S}$ est appelée* ***topologie produit*** *est une topologie de E.*

...

3.9.4 Espaces topologiques quotients

Théorème 3.162. *Soit E un espace topologique, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E, $\pi: E\to E/\mathcal{R}$ l'application canonique, $\mathcal{O}=\{\text{des parties } A \text{ de } E/\mathcal{R} \text{ tel que } \pi^{-1}(A) \text{ soit un ouvert de } E\}$.*

Alors $\mathcal{O}$ est une topologie sur $E/\mathcal{R}$.

Définition 3.163. *$\mathcal{O}$ est appelée topologie quotient de la topologie de E par $\mathcal{R}$.*

$(E/\mathcal{R};\mathcal{O})$ est alors appelé espace quotient de E par $\mathcal{R}$.

Remarque 3.164. L'application π est continue.

Théorème 3.165. *Soient F un espace quotient d'un espace topologique, $\pi: E \to F$ l'application canonique et Y un espace topologique et $f: F \to Y$ alors*
f est continue $\Leftrightarrow$ l'application $f \circ \pi: E \to Y$ est continue.

3.10 Espaces topologiques Compacts

«Les espaces topologiques compacts sont les espaces «topologiquement finis», au sens où les propriétés des applications continues sur de tels espaces sont en pratique comparables à celles des applications définies sur des ensembles finis.» J.P. Marco (Analyse pour la licence - Masson)

«Chapitre le plus important du cours de topologie, leur définition ne suggère pas d'image intuitive, par contre ils génèrent des propriétés importantes pour la suite du cours. Si à la droite $\mathbb{R}$ (qui n'est pas compact), on adjoint les points $-\infty, +\infty$ on obtient un espace compact : «la droite achevée $\bar{\mathbb{R}}$», notion souvent utilisée sans avoir été définie». J. Dixmier (Topologie générale p.50 - Puf).

Conséquence de la compacité : on peut aussi dire qu'un espace compact est recouvert par un nombre fini d'ouverts, il suffit d'associer à chaque point du compact un ouvert du compact. L'ensemble de ces ouverts recouvre le compact (trivialement). C'est alors la définition du compact qui assure de l'existence d'un nombre fini d'ouverts recouvrant ce compact.

L'intéret c'est que l'on peut spécifier suivant les ensembles la nature des ouverts (puisqu'elle n'est pas imposée) par exemple :

- Dans $\mathbb{R}$: On peut dire qu'un compact A de $\mathbb{R}$ est recouvert par un nombre fini d'intervalles de centre $(x_i)_{i=1,\dots,n} \in A$ et de longueur $2\,a$. (On a pris tous les intervalles ouverts de centre x_i et de longueur $2\ a$. Trivialement ils recouvrent A c'est la compacité qui assure l'exitence d'un nombre fini).
- Dans un espace métrique : Le même raisonnement permet de dire qu'un espace métrique compact est recouvert par un nombre fini de boule de centre $x_i \in A$ et de rayon 1 (1 étant choisi arbitrairement, on aurait pu prendre $2; 3; 4; ...$

3.10.1 Définitions

3.10.1.1 Axiome de Borel-Lebesgue

Définition 3.166. *On appelle **axiome de Borel-Lebesgue**, la proposition suivante :*
Soit E un espace topologique.
«De tout recouvrement ouvert de E, on peut extraire un sous-recouvrement fini».
autrement dit : $\left(\begin{array}{c} E = \bigcup_{i\in I} U_i \\ U_i \in \mathcal{O} \end{array} \right) \Rightarrow \left(\exists i_1, ..., i_n \in I; E = \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k}\right)$

Proposition 3.167. *Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique. Les propositions suivantes sont équivalentes : (propositions équivalentes à l'axiome de Borel-Lebesgue)*

1. *E vérifie l'axiome de Borel-Lebesgue.*
2. *Pour toute famille de fermés de E, si l'intersection de tous ses éléments est vide, alors on peut extraire une sous-famille finie d'intersection vide.*
   autrement dit $\left(\bigcap_{i\in I} U_i = \varnothing\right) \Rightarrow \left(\exists i_1, ..., i_n \in I; \bigcap_{k=1}^{n} U_{i_k} = \varnothing\right)$.
3. *Pour toute famille de fermés de E, si toute intersection finie d'éléments de cette famille est non vide, alors l'intersection de tous les éléments de cette famille est non vide.*
   autrement dit $\left(\forall i_1, ..., i_n \in I; \bigcap_{k=1}^{n} U_{i_k} \neq \varnothing\right) \Rightarrow \left(\bigcap_{i\in I} U_i \neq \varnothing\right)$. *(Dual ?? de la propriété de Borel Lebesgue ?????)*

Démonstration. Immédiate en passant au complémentaire, puis contraposition. Cours BenAbdallah page 19. □

3.10.1.2 Espaces quasi-compacts

Définition 3.168. *Soit E un espace topologique.*
On dit que E est un espace topologique ***quasi-compact*** *si et seulement si il vérifie :*

- *l'axiome de Borel-Lebesgue.*

3.10.1.3 Espaces compacts

Définition 3.169. *Soit E un espace topologique.*
On dit que E est un espace topologique ***compact*** *si et seulement si :*

- *il est séparé,*
- *et vérifie l'axiome de Borel-Lebesgue.*

Remarque 3.170. « ... il faut évidement penser que les éléments du recouvrement ouvert considéré peuvent être choisis arbitrairement petits ... . (Comme pour les fonctions continues) ... la compacité traduit alors la possibilité de découper l'ensemble de départ en un nombre fini d'ouverts sur lesquels la fonction varie arbitrairement peu ... . la propriété de séparation ... permet d'écarter les espaces sans intéret pratique (espaces grossiers par exemple ...) et surtout d'assurer un bon comportement des fermées dans un espace compact. » J.P. Marco p.74 (Analyse pour la licence - Masson)

3.10.1.4 Parties compactes

Définition 3.171. *On dit qu'une* ***partie*** *A d'un espace topologique séparé E est* ***compacte****, si et seulement si le sous-espace topologique A est compact.*

Remarque 3.172.

1. Autrement dit pour tout recouvrement de A par des ouverts de A, on peut extraire un sous-recouvrement fini de A.
2. Pour montrer qu'une partie de E est compacte dans E, on peut revenir à la définition de la compacité et utiliser les ouverts où les fermés de A. Or, on connait mieux les ouverts de E d'où la propriété suivante :

Proposition 3.173. *(c.n.s. pour qu'une partie soit compacte).*
Soit A un sous-espace d'un espace topologique séparé $(E, \mathcal{O})$.

A est une partie compacte

$\Updownarrow$

De toute famille d'ouvert de E recouvrant A, on peut extraire une sous-famille finie d'ouvert de E recouvrant A .

Démonstration. Page 22 du cours de M. BenAbdallah TCD. □

3.10.1.5 Partie relativement compacte

Définition 3.174. *Une partie A de E est dite* ***relativement compacte*** *si et seulement si $\bar{A}$ est compacte.*

3.10.1.6 Exemples d'espaces compacts

1. Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique, si $(E, \mathcal{O})$ est séparé et fini alors E est compact.
2. Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique, on a : $(E, \mathcal{O})$ discret est compact $\Leftrightarrow$ E est fini ,
3. Un espace métrique est compact si et seulement si, il est recouvert par un nombre fini de par?

4. Dans le cas d'espace métrique, pour montrer qu'un espace n'est pas compact, il suffit de montrer que ça ne marche pas pour un recouvrement donné : exemple avec $\mathbb{R}^n$ et les boules $\mathcal{B}(O,r), r \in \mathbb{R}$. $\mathbb{R}^n$, n'est pas compact.
5. Soit (E,d) un espace métrique, E est compact s'il est fini.

Démonstration. Voir cours de licence p.20. □

3.10.2 Fermés et compacité

3.10.2.1 Cas d'un espace topologique séparé

Proposition 3.175. *Soit $(E,\mathcal{O})$ un espace topologique séparé.*
K partie compacte de $E \Rightarrow$ K fermée dans E

Démonstration. Voir cours le licence M. Ben Abdallah page 22. □

Remarque 3.176. Avec une condition plus forte sur E, on peut montrer l'équivalence (prop. suivante).

3.10.2.2 Cas d'un espace topologique compact

Proposition 3.177. *Soit $(E,\mathcal{O})$ un espace topologique compact.*
K partie compacte de $E \Leftrightarrow$ K fermée dans E
Autrement dit une partie fermé d'un compact est une partie compact et réciproquement une partie compact d'un compact est fermée.

Démonstration. Voir cours le licence M. Ben Abdallah page 22. □

Remarque 3.178. La réciproque a déjà été obtenue avec une condition moins forte dans la proposition précédente.

3.10.2.3 Exemples

1. Dans un espace métrique tout compact est fermé et borné. La réciproque est vraie si et seulement si les boules fermées de E sont compacts.
2. Soit $a,b \in \mathbb{R}; a \leqslant b$, l'intervalle fermé $[a;b]$ est compact.
3. Les sous-espaces compacts de $\mathbb{R}$ sont les parties fermées et bornées de $\mathbb{R}$.
4. $\mathbb{R}$ n'est pas compacte car non borné.
5. Dans $\mathbb{R}$, «A relativement compact» $\Leftrightarrow$ «A bornée».

Démonstration.

1.
2.
3.
4.
5. Dans $\mathbb{R}$, «A bornée» $\Leftrightarrow$ «$\exists a > 0$, tel que $A \subset [-a;a]$» $\Leftrightarrow$ «$\exists a > 0$, tel $\bar{A} \subset [-a;a]$». □

3.10.3 Réunion et intersection d'espaces compacts

3.10.3.1 Réunion finie d'espaces compacts

Proposition 3.179. *Toute réunion finie de compact est compacte.*

3.10.3.2 Intersection quelconque d'espaces compacts

Proposition 3.180. *Toute intersection quelconque de compacts est compacte.*

3.10.4 Sys. fonda. de vois. d'un point d'un compact

3.10.5 Valeur d'adhérence d'une fonction dans un compact

3.10.5.1 Valeur d'adhérence d'une application à valeurs dans un compact

3.10.5.2 Valeur d'adhérence d'une suite de points dans un espace compact

Proposition 3.181. *Soit E un espace compact, toute suite dans E admet au moins une valeur d'adhérence.*

Démonstration. Voir cours de licence p.20, Topologie Ellipse p. 69, Topologie générale p.52-53. □

3.10.6 Convergence d'une fonction sur un compact

3.10.6.1 Limite d'une fonction admettant une seule valeur d'adhérence

3.10.6.2 Limite d'une suite admettant une seule valeur d'adhérence

Proposition 3.182. *Soit E un espace compact, si une suite dans E admet une seule valeur d'adhérence l alors elle converge vers l.*

Démonstration. Voir cours de licence p.20, Topologie Ellipse p. 69, Topologie générale p.52-53. CTE page 129. □

3.10.7 Application, Continuité, Bijectivité et Compacité

3.10.7.1 Propriété des fonctions continues

Théorème 3.183. *Soit E, F 2 espaces topologiques séparés et $f\colon E \to F$ une application continue.*

Alors l'image par f de toute partie compacte de E est un partie compacte de F.

Démonstration. Cours TCD M. BenAbdallah page 25. □

Note 3.184. En particulier si E est compact alors $f(E)$ est compact (CTE page 130). L'image par f de tout fermé d'un espace compact est un fermé (Ceci est faux dans le cas général).

3.10.7.2 Propriété des bijections continues

Corollaire 3.185. *Toute bijection continue d'un espace topologique compact $(E, \mathcal{O})$ sur un espace topologique séparé $(F, \mathcal{O}')$ est un homéomorphisme.*

Démonstration. Cours TCD M. BenAbdalla page 25. □

3.10.7.3 Fonction d'un espace topo. compact dans un espace métrique

Proposition 3.186. *Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique compact. (F, δ) un espace métrique et $f\colon E \to F$ une application continue.*

Alors «f est borné» autrement dit par définition «$\delta(f(E)) < +\infty$».

Démonstration. Cours M. Benabdallah page 25. □

3.10.7.4 Fonction d'un espace topo. compact dans $\mathbb{R}$

Proposition 3.187. *Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique compact et $f\colon E \to \mathbb{R}$ une application continue.*

Alors "f est bornée et atteint ses bornes".
Autrement dit "$\exists a; b \in E$, tel que $a = \inf_{x\in E} f(x)$ et $b = \sup_{x\in E} f(x)$".

Démonstration. Cours M. Benabdallah page 25. □

3.10.8 Produit fini d'espaces compacts

3.10.8.1 C.N.S. de compacité

Théorème 3.188. *(Théorème de Tychonoff) Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques séparés et $E = \prod_{i\in I} E_i$ l'espace topologique produit.*
Alors «E compact» ⇔ «chaque E_i est compact».

Démonstration. Cours TCD Benabdallah page 26. □

Exemple 3.189.

1. Les sous-espaces compacts de $\mathbb{R}^n$ sont les parties fermées et bornées.
2. Soit $S^n = \left\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\right\}$, S^n est compacte.
3. Toute boule fermée de $\mathbb{R}^n$ est compacte.

Démonstration.

1. Cours Benabdallah page 26.
2.
3. □

3.10.8.2 Applications

- La topologie de la convergence simple.
- Le théorème d'Alembert : tout polynôme non constant, à coefficients complexes, possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

3.10.9 Espaces localement compacts

3.10.10 Compactification

Voir notes du cours de licence C.T.E.

3.10.10.1 Définitions

3.10.10.2 Exemples

3.10.10.3 Procédé de compactification d'Alexandrov

3.11 Espaces topologiques connexes

La notion de connexité ... traduit en termes mathématiques l'idée intuitive d'espace d'un seul tenant . Topologie (Ellipse-p.78). CTE :« l'une des utilités de cette notion est, entre autres, de permettre de passer du local au global ».

3.11.1 Définition

Définition 3.190.

1. *Un **espace topologique** E est **connexe** si et seulement si :*

Il n'existe aucune partition de E en deux ouverts de E.

2. *Une **partie** A de E est **connexe** si et seulement si le sous-espace topologique A (i.e. muni de la topologie induite par celle de E) est connexe.*

Remarque 3.191. Une partie A de E n'est pas connexe si et seulement si :

i. Il existe une partition de A en 2 ouverts (différents de $\varnothing$) non vide.

ii. Autrement dit, il existe 2 ouverts U_1, U_2 de E tels que :
   - $U_1 \cap A \neq \varnothing$ et $U_2 \cap A \neq \varnothing$
   - $U_1 \cap U_2 \cap A = \varnothing$
   - $A = (U_1 \cap A) \cup (U_2 \cap A) \Leftrightarrow A \subset U_1 \cup U_2$

3.11.2 Autres C.N.S. de connexité pour un espace topologique

Théorème 3.192. *(C.N.S. de connexité) Un espace topologique est connexe si et seulement si*

1. *il n'existe aucune partition de E en deux fermés non vides de E.*
2. *les seules parties à la fois ouvertes et fermées de E sont E et $\varnothing$.*
3. *les seules parties de E sans point frontière sont E et $\varnothing$.*
4. *A est connexe $\Leftrightarrow F_1, F_2$ sont deux fermés de E, tels que $A \cap F_1 \cap F_2 \neq \varnothing \Rightarrow A \cap F_1 = \varnothing$, $A \subset F_2$ ou $A \cap F_2 \subset F_1$. Enoncé à vérifier CTE 2003-2004. Enoncé déjà présent dans le théorème suivant.*

Théorème 3.193. *Une partie A d'un espace topologique est connexe si et seulement si l'une des 2 conditions suivantes est réalisée :*

i. *Si $A \subset O_1 \cup O_2$ ou O_1, O_2 sont 2 ouverts de E vérifiant $A \cap O_1 \cap O_2 = \varnothing$ alors $A \cap O_1 = \varnothing$ et $A \subset O_2$ ou $A \cap O_2 = \varnothing$ et $A \subset O_1$.*

ii. *Si $A \subset F_1 \cup F_2$ où F_1, F_2 sont deux fermés de E, tels que $A \cap F_1 \cap F_2 =$ ou $\neq \varnothing \Rightarrow A \cap F_1 = \varnothing, A \subset F_2$ ou $A \cap F_2 \subset F_1$. Enoncé déjà présent dans le théorème suivant.*

3.11.3 Exemples

Exemple 3.194. Espace et partie connexes

- $\mathbb{R}$ est connexe,
- Tout intervalle de $\mathbb{R}$ ou de $\bar{\mathbb{R}}$ est connexe, on montre de plus que : Une partie A de $\mathbb{R}$ ou de $\bar{\mathbb{R}}$ est connexe si et seulement si A est un intervalle . Autrement dit les seules parties connexes de $\mathbb{R}$ ou $\bar{\mathbb{R}}$ sont les intervalles.

Démonstration. Cours T.C.D. de Benabdallah page 45. □

Exemple 3.195. Espaces non connexes

- $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}$ ne sont pas connexes.

3.11.4 Propriétés

3.11.4.1 Connexité et adhérence

Proposition 3.196. *Soit E un espace topologique, A une partie connexe de E et $B \subset E$ tel que $A \subset B \subset \bar{A}$ alors B est connexe.*

Démonstration. Cours de Benabdallah page 47. □

Proposition 3.197. *Soit E un espace topologique et A une partie connexe de E alors $\bar{A}$ est aussi connexe.*

Note 3.198. La connexité se transmet à l'adhérence.

3.11.4.2 Réunion de connexes qui se rencontrent

Proposition 3.199. *Soit $(C_i)_{i\in I}$ une famille de connexes d'un espace métrique (E,d) telle que $\exists i_0 \in I, \forall i \in I, C_i \cap C_{i_0} \neq \varnothing$? alors $\bigcup_{i\in I} C_i$ est connexe.*

Démonstration. CTE page 150. □

Proposition 3.200. *La réunion d'une famille de parties connexes dont l'intersection n'est pas vide est connexe.*

Démonstration. Cours Banabdallah page 47. □

Proposition 3.201. *Soit $(C_i)_{i\in I}$ une famille au plus dénombrable de connexes (autrement dit avec $I=\{0;1;...;p\}$ où $I=\mathbb{N}$) telle que $\forall i \in I, i \neq 0, C_{i-1} \cap C_i \neq \varnothing$? alors $\bigcup_{i\in I} C_i$ est connexe.*

3.11.4.3 Image d'un connexe par une application continue

Proposition 3.202. *Soit E, F deux espaces topologique et $f\colon E \to F$ une application continue. Si A est une partie connexe de E alors $f(A)$ est une partie connexe de F.*

Démonstration. Cours de Benabdallah page 49. CTE page 150. □

Exemple 3.203.

1. Tout segment $[a;b]=\{a+t(b-a); t\in[0,1]\}$ d'un espace normé E est connexe. Car image de $[0,1]$ par l'application continue $f\colon \left|\begin{array}{ccc} [0;1] & \to & [a;b] \\ t & \mapsto & t\,a+(1-t)\,b \end{array}\right.$.
2. Toute partie X convexe de E est connexe.
3. En particulier tout espace normé est connexe
4. Toute boule ouverte ou fermée d'un espace normé est convexe donc connexe.

3.11.4.4 Théorème des valeurs intermédiaires

Note 3.204. Il me semble que ce soient les conditions minimales pour énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

Corollaire 3.205. *(Théorème des valeurs intermédiaires) Soit E un espace topologique connexe et $f\colon E\to\mathbb{R}$ une application continue. Soient $a,b\in f(E)$ avec $a<b$. Alors pour tout $c\in\,]a,b[$, il existe $x\in E$ tel que $f(x)=c$.*

Démonstration. Cours de Benabdallah page 49. □

3.11.5 Eléments connectés, Composantes connexes, Discontinuité totale

Définition 3.206. *Soit E un espace topologique. On dit que deux éléments $a,b\in E$ sont **connectés**, si et seulement si il existe une partie connexe de $A\subset E$ (? A de E) qui les contient tous les deux.*

Proposition 3.207. *La relation «... sont connectés ...» est une relation d'équivalence.*

Définition 3.208. *Les classes d'équivalence pour la relation «... sont connectés ...» sont appelés **composantes connexes**.*

Proposition 3.209. *La composante connexe d'un point $a \in E$ est la plus grande partie connexe de E contenant a.*

Définition 3.210. *Un espace topologique est dit* ***totalement discontinu*** *si chacune des ses composantes connexe a un seul élément.*

Remarque 3.211.

a) Les composantes connexes forment une partition de A.

b) Si elles sont en nombres fini elles sont ouvertes.

c) Les composantes connexes sont fermées.

d) Un espace topologique discret est totalement discontinu. Attention la réciproque n'est pas vraie : $\mathbb{Q}$ est totalement discontinu, mais n'est pas discret.

e) E est connexe $\Leftrightarrow E$ n'a qu'une seule composante connexe.

Démonstration.

a) CTE page 151. □

3.11.6 C.N.S. de connexité pour un produit d'espace topologique

Proposition 3.212. *Soit $E_1, ..., E_n$ des espaces topologiques et $E = E_1 \times ... \times E_n$ l'espace topologique produit alors E est connexe si et seulement si : $\forall i = 1, ..., n$, E_i est connexe.*

Démonstration. Cours de Benabdallah page 49. □

3.11.7 Chemin d'un espace topologique

Définition 3.213. *On appelle chemin d'un espace topologique $(E, \mathcal{O})$ toute application continue $\varphi: [0; 1] \to E$. $\varphi(0)$ et $\varphi(0)$ et $\varphi(1)$ sont appelés respectivement origine et extrémité de ce chemin.*

3.11.8 Connexité par arcs

Note 3.214. La connexité par arcs est surtout une notion pratique pour montrer qu'un espace est convexe. En terme intuitifs un espace est connexe par arcs si et seulement si on peut toujours relier deux de ses points par une courbe continue, ce qui en fait une notion moins abstraite que la connexité (CTES 2003-2004).

Définition 3.215. *Un* ***espace topologique*** *E est* ***connexe par arcs*** *si et seulement si pour tout couple (a, b) de points de E, il existe une application continue $f: [0, 1] \to E$ telle que $f(0) = a$ et $f(1) = b$. ?à revoir? Autrement dit deux points quelconques peuvent être joints par un chemin de E.*

Proposition 3.216. *Un espace topologique connexe par arcs est connexe.*

Remarque 3.217. La réciproque du théorème est fausse dans le cas général d'un espace topologique. Cependant, il y a équivalence pour un ouvert d'un espace vectoriel normé.

3.11.9 Espace localement connexe

Définition 3.218. *Un espace est dit localement connexe lorsque tout point de cet espace possède un système fondamental de voisinages connexes.*

Proposition 3.219. *Dans un espace topologique localement connexe, chaque composante connexe est à la fois ouverte et fermée.*

3.11.10 Application de la connexité

3.11.10.1 Connexité et homéomorphisme : On peut utiliser la connexité pour prouver que deux espaces ne sont pas homéomorphes : si l'un de ces espaces est connexe et l'autre pas, les deux espaces ne sont évidement pas homéomorphes.

3.11.10.2 Connexité et résolution d'équation : Le théorème des valeurs intermédiaires est souvent utilisé pour montrer l'existence d'une solution, or il n'est énoncé que pour des fonctions d'un espace connexe.

Chapitre 4
Espaces métriques et leur topologie

Dans un espace métrique la plupart des notions de topologie se ramènent à des problèmes de convergence de suite.

4.1 Définitions et propriétés générales

4.1.1 Distance, semi-distance et écart sur un ensemble E

4.1.1.1 Définitions

Définition 4.1. *Soit E un ensemble non vide.*
On appelle ***distance*** *sur E, toute application* $d: E^2 \to \mathbb{R}^+$ *vérifiant* $\forall (x,y,z) \in E^3$ *:*

i. $(d(x,y)=0) \Leftrightarrow (x=y)$ *[l'axiome de séparation],*

ii. $d(x,y)=d(y,x)$ *[l'axiome de symétrie],*

iii. $d(x,y) \leqslant d(x,z)+d(z,y)$ *[l'axiome d'inégalité triangulaire].*

Définition 4.2.

Définition 4.3.

4.1.1.2 Deuxième inégalité triangulaire

Proposition 4.4. *Pour toute distance d sur E on a:*
$\left|d(x,z)-d(z,y)\right| \leqslant d(x,y), \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Démonstration. Cours ce Benabdallah page 1. □

Remarque 4.5. Inégalité presque aussi utile que l'inégalité triangulaire.

Proposition 4.6. *Pour toute distance d sur E on a:*
$d(x_1,x_n) \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i,x_{i+1}), \forall (x_i)_{i=1\ldots n} \in E^n, n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$.

4.1.1.3 Inégalité quadrilatère

Proposition 4.7. *Pour toute distance d sur E on a:*
$\left|d(x,y)-d(x',y')\right| \leqslant d(x,x')+d(y,y'), \forall (x,y,x',y') \in E^4$.

Remarque 4.8. La différence des diagonales est inférieure à la somme des côtés opposés (en longueur)

Démonstration. ? □

4.1.1.4 Exemples de distances

Exemple 4.9. Si d est une distance alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $\lambda\, d$ est une distance.

Exemple 4.10. Sur $\mathbb{R}$, on peut définir la distance suivante, dite distance usuelle de $\mathbb{R}$

$$d: \left| \begin{array}{ccc} (\mathbb{R})^2 & \to & \mathbb{R}^+ \\ (x,y) & \mapsto & |x-y| \end{array} \right. .$$

Exemple 4.11. Sur $\mathbb{R}^n$, On définit les 3 distances suivantes, dites distances usuelles de $\mathbb{R}^n$:

1. d_1: $\left| \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^n)^2 & \to & \mathbb{R}^+ \\ (x,y) & \mapsto & \sum_{i=1,\dots n} |x_i - y_i| \end{array} \right.$ (Somme des valeurs absolues des différences des composantes ou coordonnées ?)
2. d_2: $\left| \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^n)^2 & \to & \mathbb{R}^+ \\ (x,y) & \mapsto & \sqrt{\sum_{i=1,\dots n} (x_i - y_i)^2} \end{array} \right.$ c'est la distance euclidienne de $\mathbb{R}^n$. C'est l'inégalité de Minkowsky qui permet de démontrer inégalité que d_2 vérifie l'inégalité triangulaire et donc que $(\mathbb{R}^n; d_2)$ est un espace métrique.
3. d_p: $\left| \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^n)^2 & \to & \mathbb{R}^+ \\ (x,y) & \mapsto & \sqrt[p]{\sum_{i=1,\dots n} |x_i - y_i|^p} \end{array} \right.$ vérifier que c'est bien une distance.
4. Toutes les normes des espaces vectoriels normés permettent de définir des distances c'est le cas des exemples précédents.
5. d_∞: $\left| \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^n)^2 & \to & \mathbb{R}^+ \\ (x,y) & \mapsto & \sup_{i=1,\dots n} |x_i - y_i| \end{array} \right.$.
6. Rajouter la distance uniforme masson page 53.

Exemple 4.12. *l'*application d: $\left| \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^n)^2 & \to & \mathbb{R}^+ \\ (x,y) & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{si } x = y \\ 1, \text{si } x \neq y \end{array} \right. \end{array} \right.$ est une distance appelée distance discrète.

Exemple 4.13. Espace affine ? (Sans doute faut-il rajouter un exemple de distance sur un espace affine ?)

4.1.2 Définition d'un espace métrique

Définition 4.14. *On appelle* ***espace métrique****, le couple constitué*

1. *d'un ensemble E non vide et*
2. *d'une distance d sur E.*

On le note $(E; d)$ ou E_d et même E, s'il n'y a pas d'ambiguité sur d.

Exemple 4.15.

1. Un ensemble $E \neq \varnothing$ muni de la distance discrète est appelé **espace métrique discret**. Quel lien y-a-t-il avec l'espace topologique discret défini en topologie ?
2. $\mathbb{R}$ muni de sa distance usuelle est un espace métrique.
3. $\mathbb{R}^n$ muni d'une des distances usuelles de $\mathbb{R}^n$ sont des espaces métriques.
4. Tous les espaces vectoriels normés sont des espaces métriques.

4.1.3 Extension de la notion de distance, diamètre d'une partie

Note 4.16. Les définitions de ces distances et de diamètre ne me paraissent pas satisfaisantes, il faudrait auparavant définir les réels appelés distances de .. à .. puis montrer leurs unicités ! (assurées sans doute par la borne inférieure). Cette condition est nécessaire pour pouvoir définir une application. La définition de distance et de diamètre en tant qu'application peut être enfin introduite. Cette définition finale n'étant qu'un résumé de cette démarche : éléments mis en jeu, définition explicite et unicité de la distance ou du diamètre. On aurait également pu définir la distance de ... à ... puis établir une propriété disant que c'est bien une distance !

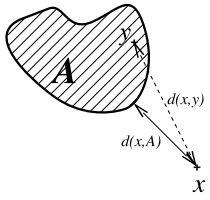
4.1.3.1 Distance d'un point à un ensemble non vide

Note 4.17. La présentation de

Définition 4.18. *Soit (E,d) un espace métrique et $A\subset E, A=\varnothing$.*

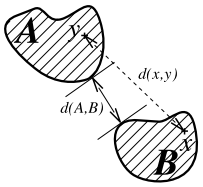
On appelle ***distance d'un point à A****, l'application* $d(I_E,A)$: $\left|\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \inf_{a\in A}(d(x,a)) \end{array}\right.$ *on a donc :* $d(x,A)=\inf_{y\in A}(d(x,y))$.

Avertissement 4.19. Est-ce une distance ? Non je ne crois pas ! La distance est définie entre deux objets de même nature. Or dans ce cas, il s'agit d'un point et d'un ensemble !



4.1.3.2 Distance entre deux ensembles non vides

Définition 4.20. *Soit (E,d) un espace métrique,* $\left\{\begin{array}{l} A\subset E; A\neq\varnothing \\ B\subset E; B\neq\varnothing \end{array}\right.$. *On appelle distance de A à B le réel noté $d(A,B)$ tel que* $d(A,B)=\inf_{x\in A;\,y\in B}(d(x,y))$.



Exemple 4.21. Voir Cours de licence de mathématiques CTE.

Remarque 4.22. Page 32 du cours de CTE : « Bien faire attention que malgré son nom, la distance entre ensemble n'est absolument pas une distance !! par exemple : si $E=\mathbb{R}, A=[0;1], B=[1;2]$ alors $d(A;B)=0$ et pourtant $A\neq B$ ».

Proposition 4.23. $d(A,B)=\inf_{x\in A}d(x;B)=\inf_{x\in B}d(x;B)$.

4.1.3.3 Diamètre d'une partie

Définition 4.24. *Soit (E,d) un espace métrique et $A\subset E$. On appelle* ***diamètre de A****, le nombre noté $\delta(A)$ tel que :* $\delta(A)=\sup_{x;y\in A}(d(x,y))$.

Définition 4.25. *Soit (E,d) un espace métrique et $A \subset E$. «A est dite **bornée**» $\Leftrightarrow$ «$\delta(A) < +\infty$» autrement dit (A a un diamètre fini) : $\exists M > 0$ tel que $d(x,y) \leqslant M$, $\forall x, y \in A$.*

Avertissement 4.26. Pour la définition d'une partie bornée, reprendre le présentation du cours CTE page 32. 3 propriétés équivalentes pouvant servir de définition : Soit $(E,\ d)$ un espace métrique :

Définition : $A \subset E$ est bornée $\Leftrightarrow\ \exists a \in E, \exists r > 0; A \subset \mathcal{B}(a;r)$

Propriétés :

1. $\Leftrightarrow \forall a \in E, \exists r > 0; A \subset \mathcal{B}(a;r)$.
2. $\Leftrightarrow \delta(A) < +\infty$

Attention la notion de boule est définie après. Dans ce cas une réorganisation est nécessaire !

Note 4.27. Rajouter les propriétés du cours (résumé) de licence CTE Chapitre 2 Topo 3 + remarque $f : x \mapsto d(x;A)$ contractante.

4.1.3.4 Propriétés

Proposition 4.28. *Soient A et B deux parties non vides d'un espace métrique (E,d) et $p \in E$ alors :*

1. *$d(p,A); d(A,B); \delta(A)$ sont des réels non négatifs.*
2.
   i. *si $p \subset A$ alors $d(p,A) = 0$ mais $d(p,A) = 0 \nRightarrow p \in A$ (Voir adh(A)).*
   ii. *si $\begin{cases} A \subset E \\ B \subset E \end{cases}$ sont tels que $A \subset B$ alors $\forall u \in E, d(u;B) \leqslant d(u;A)$.*
   iii. *Si $A \neq \varnothing; \forall (x,\ y) \in E^2, |d(x,\ A) - d(y,\ B)| \leqslant d(x,\ y)$ c'est une généralisation de la seconde inégalité triangulaire.*
3. *Si $A \cap B = \varnothing$, alors $d(A,B) = 0$.*
4. *Si A est fini alors $\delta(A) < +\infty$; A est borné.*
5.
   i. *$\delta(A) = 0 \Leftrightarrow A = \{a\}$.*
   ii. *$\delta(A \cup B) \leqslant \delta(A) + \delta(B) + d(A;B)$.*
   iii. *A borné $\Leftrightarrow \exists (\rho > 0, u \in E)$ tels que $A \subset \mathcal{B}(u;\rho)$.*

4.1.4 Boule d'un espace métrique

4.1.4.1 Boule ouverte

Définition 4.29. *Soit (E,d) un espace métrique, $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}^+$.*
*On appelle **boule ouverte** de E de centre a et de rayon r l'ensemble :*
$\mathcal{B}(a,r) = \{x \in E; d(a,x) < r\}$.

4.1.4.2 Boule fermée

Définition 4.30. *Soit (E,d) un espace métrique, $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}^+$.*
*On appelle **boule fermée** de E de centre a et de rayon r l'ensemble :*
$\mathcal{B}'(a,r) = \{x \in E; d(a,x) \leqslant r\}$.

4.1.4.3 Sphère

Définition 4.31. *Soit (E,d) un espace métrique, $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}^+$.*
*On appelle **sphère** de E de centre a et de rayon r l'ensemble :*

$\mathcal{S}(a,r)=\{x\in E; d(a,x)=r\}$.

4.1.4.4 Boule et sphère généralisées

4.1.4.5 Remarques et Exemples

Remarque 4.32.

1. si $r=0$, $\mathcal{B}(a,o)=\varnothing$, $\mathcal{B}'(a,o)=\mathcal{S}(a,o)=\{a\}$.
2. si $r>0$, $a\in\mathcal{B}(a,r)\subset\mathcal{B}'(a,r)$, $\mathcal{S}(a,r)\subset\mathcal{B}'(a,r)$.

Exemple 4.33.

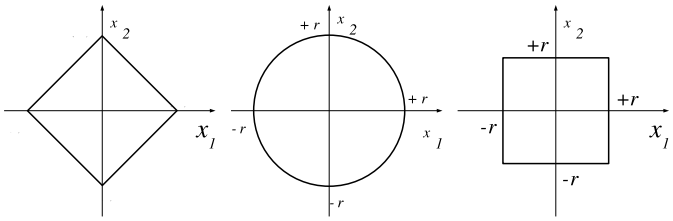
1. Soit E l'espace métrique discret

r	$\mathcal{B}(a,r)$	$\mathcal{B}'(a,r)$	$\mathcal{S}(a,r)$
$0<r<1$	{a}	{a}	$\varnothing$
r = 1	$\{a\}$	E	$E-\{a\}$
$r>1$	E	E	$\varnothing$

2. $\mathbb{R}^2$ avec les distances usuelles d_1,d_2, et d_∞, on a pour $x=(x_1,x_2)$:

d	$d(O,x)$	$\mathcal{S}_d(O,r)$
d_1	$\lvert x_1\rvert+\lvert x_2\rvert$	$\{x\in\mathbb{R}^2;\lvert x_1\rvert+\lvert x_2\rvert=r\}$
d_2	$\sqrt{(x_1)^2+(x_2)^2}$	$\{x\in\mathbb{R}^2;\sqrt{(x_1)^2+(x_2)^2}=r\}$
d_∞	$\sup(\lvert x_1\rvert;\lvert x_2\rvert)$	$\{x\in\mathbb{R}^2;\sup(\lvert x_1\rvert;\lvert x_2\rvert)=r\}$

Traçons pour ces 3 distances $\mathcal{S}_d(O,r)$:



4.1.5 Isométrie; Fonction lipschitziennes et contractantes

Soit (E,d) et (F,δ) deux espaces métriques et $f: E\to F$ une application.

4.1.5.1 Isométrie

Définition 4.34. *On dit que $f: E\to F$ est une **isométrie** si et seulement si :*
$\forall(x;y)\in E^2, \delta(f_{(x)};f_{(y)})=d(x;y)$.

Proposition 4.35. *Une isométrie est toujours injective mais pas nécessairement surjective :*
f isométrie $\Rightarrow$ f injective .

Remarque 4.36. En dimension finie, est-ce qu'une isométrie est une bijection ?

Définition 4.37. *Deux **espaces métriques** sont dits **isométriques** si et seulement s'il existe une isométrie surjective (i.e. bijective) de l'un dans l'autre.*

Remarque 4.38.

1. Si (E,d) et (F,δ) deux espaces métriques isométriques, du point de vue de la théorie des espaces métriques, ils sont indiscernables, puisque toutes les propriétés sont les mêmes. Cependant leurs éléments peuvent être de nature très différentes (suites dans l'un et fonction dans l'autre par exemple).
2. Les translations, les rotations, les symétries du plan sont des exemples d'isométries.

4.1.5.2 Condition de Lipschitz d'ordre α et de rappport k

Définition 4.39. *On dit que $f: E \to F$ vérifie une* ***condition de Lipschitz ou de Hölder****, d'ordre α et de rapport ou de constante k si et seulement si :*
$\forall x, y \in E, \delta(f_{(x)}; f_{(y)}) \leqslant k \times d(x,y)^{\alpha}$ *où k, α sont des réels tels que : $k > 0, 0 < \alpha \leqslant 1$.*

4.1.5.3 Fonctions Lipschitziennes et contractantes

Remarque 4.40. Est-ce que k peut-être égale à 0 ? Oui pour le CTE page 75 topologie.

Définition 4.41. *On dit qu'une application $f: E \to F$ est lipschitzienne de rapport ou de constante k si et seulement si :*

1. $\exists k \in \mathbb{R}^+, \forall x, y \in E, \delta(f_{(x)}; f_{(y)}) \leqslant k \times d(x,y)$.
2. *Autrement dit f vérifie la condition de Lipschitz d'ordre 1 et de rapport k.*

Remarque 4.42.

1. Si $k = 1$, f est contractante : c'est une contraction.
2. Si $k < 1$, f est dite strictement contractante.

Exemple 4.43.

1. Soit (E, d) un espace métrique et $x \in E$ donné.
   La fonction $f: \left| \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & d(u,x) \end{array} \right.$ est une contraction à valeur dans $\mathbb{R}$.
2. Les fonctions $f: \left| \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{1+|x|} \end{array} \right.$ et $f: \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) \end{array} \right.$ sont des contractions.
3. Toute fonction $f: I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ dérivable et de dérivée bornée est lipschitzienne.

4.2 Topologies des espaces métriques

Note 4.44. Toute les propriétés énoncées ici doivent venir en illustration du cours de topologie (et donc figurer dans le cours de topologie comme exemples). Si on souhaite traiter des notions topologiques d'un espace métrique sans avoir à faire un cours de topologie, il faut introduire de nouvelles définitions :

- M-Ouvert : ouvert au sens métrique,
- M-Topologie : topologie au sens métrique,
- M-Fermé : fermé au sens métrique,
- M-Adhérence : ...
- M-Intérieur : ...
- M-Séparé : ...
- M-Convergence : ...
- M-Compacité : ...

Toutes ces définitions étant simplement établies à l'aide d'une condition nécessaire et suffisante dans les chapitres correspondants. Faire un cours de topologie avant le cours d'espace métrique permet de faire l'économie de ces définitions. Mais oblige à établir l'équivalence lorsque l'on fera le cours de topologie. (Ne pourrait-on pas faire les deux approches ? Cela me semble difficile, la meilleure solution serait de mettre en introduction la remarque précédente, cependant il peut être utile de disposer d'un cours d'espace métrique indépendant ! c'est cette dernière solution qui est à privilégier, il faut pour cela suivre le plan du cours de topologie qui lui doit justifier les appellations utilisées pour les espaces métriques).

On va montrer que les espaces métriques sont des espaces topologiques, où la topologie est induite par la distance. On pourra alors parler d'ouverts; de fermés; de voisinages; de point d'accumulation; de limites de suites; de continuité d'une fonction et d'homéomorphisme.

Il est évident que l'intersection de deux boules ouvertes, n'est pas obligatoirement une boule ouverte. Cependant, on peut montrer que tout point de l'intersection appartient à une boule ouverte contenue dans cette intersection.

Remarque 4.45. Prérequis : Le cours de topologie. NON ! Car cette partie sera indépendante.

4.2.1 Topologie métrique

On montre dans un premier temps que l'ensemble des boules ouvertes d'un espace métrique (E, d) est une base d'une topologie sur X. Ainsi, on va pouvoir caractériser simplement les ouverts de E.

Proposition 4.46. *Dans un espace métrique E, toute boule ouverte est une partie ouverte de E.*

Démonstration. Cette proposition est-elle à sa place ? Page 2 du cours de licence de M. Benabdallah. □

Proposition 4.47. *Soit (E,d) un espace métrique.*
La famille des boules ouvertes d'un espace métrique (E,d) est une base de topologie sur E.

Définition 4.48. *Soit (E,d) un espace métrique. La topologie $\mathcal{T}$ sur E, engendrée par la famille des boules ouvertes de E, est appelée* ***topologie métrique*** *associée à d.*

Proposition 4.49. *Soit (E,d) un espace métrique.*

1. *La famille des boules ouvertes $\mathcal{B}_n\Big(x,\frac{1}{n}\Big)$ est un système fondamental de voisinage de x dans E.*
2. *La famille des boules fermées $\mathcal{B}_n^{'}\Big(x,\frac{1}{n}\Big)$ est un système fondamental de voisinage de x dans E.*

4.2.2 Ouverts

Proposition 4.50. *Soit (E,d) un espace métrique.*
O est un ouvert de $\mathcal{T}$ si et seulement si :

1. *O est la réunion d'une famille quelconque d'élément de $\mathcal{B}$:*
   $(O\in\mathcal{T})\Leftrightarrow(O=\cup_{i\in I}O_i;\forall i\in I,O_i\in\mathcal{B})$.
2. *Autrement dit, pour tout élément x de O, il existe un élément de $\mathcal{B}$ contenant x et contenu dans O :*
   $(O\in\mathcal{T})\Leftrightarrow(\forall x\in O,\exists O_x\in\mathcal{B};x\in O_x \text{ et } O_x\subset O)$.

Remarque 4.51. On retrouve toutes les propriétés des espaces topologiques :

- $\varnothing; E$ sont des ouverts,
- La réunion quelconques d'ouverts est un ouvert,
- L'intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Les ouverts d'un espace métrique discret E sont toutes les parties de E. C'est donc un espace topologique discret.

Démonstration. Cours de licence M. Benabdallah page 3. □

4.2.3 Voisinages d'un point

Proposition 4.52. *Soit (E, d) un espace métrique, N et A deux parties de E et p un point de E. N est un **voisinage** de p [rep. A] si et seulement si il existe une boule ouverte incluse dans N contenant p [resp. A].*

Proposition 4.53. *Toutes ces propriétés sont des propriétés vues en topologie (Remarque inutile) :*

1. $\forall V \in \mathcal{V}(a) \Rightarrow a \in V$.
2. $\forall V \in \mathcal{V}(a); \forall V' \in \mathcal{P}(E), V \subset V \Rightarrow V' \in \mathcal{V}(a)'$.
3. $\forall V, V' \in \mathcal{V}(a) \Rightarrow V \cap V' \in \mathcal{V}(a)$.
4. $\forall V \in \mathcal{V}(a), \exists U \ni \mathcal{V}(a); \forall b \in E, b \in U \Rightarrow V \in \mathcal{V}(b)$.
5. *Un sous-ensemble U est ouvert si et seulement si U est voisinage de chacun de ses points.*

4.2.4 Fermés

Proposition 4.54. *Soit E un espace métrique.*

1. *Toute boule fermée est un fermé de E.*
2. *Tout ensemble réduit à un point est un fermé dans E. (Autrement dit, tout singleton est un fermé).*
3. *Si E est discret, tout sous-ensemble A est fermé.*
4. *Toute sphère est une partie fermée de E.*

Démonstration. Cours de M. Benabdallah TCD page 4. □

4.2.5 Adhérence, Intérieur

Rajouter passage licence mathes CTE. Classeur rose.

4.2.6 Densité

Proposition 4.55. *Soit E un espace métrique, A et B deux parties de E.*
*A est **dense** par rapport à $B \Leftrightarrow \forall x \in B, \forall \varepsilon > 0, \mathcal{B}(x, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$.*

4.2.7 Espaces séparables

Note 4.56. S'agit-il d'une notion topologique ou purement métrique ?

Définition 4.57. *On appelle **espace séparable** tout espace métrique possédant une partie partout dense dans E et (au plus) dénombrable.*

Remarque 4.58. Autrement dit, si et seulement si il possède une suite de points formant une partie partout dense de E. Définition Dico Puf page 676 + Livre Topologie Ellipse page 130. «Au plus» est sous-entendu donc pas nécessaire)

Exemple 4.59. Récupérer la définition de la page 263

1. $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle $d(x, y) = |x - y|$.
2. $\mathbb{C}^n$ est séparable car tous les points de $\mathbb{C}^n$ à coordonnées dans $\mathbb{Q} + i\,\mathbb{Q}$ forment un sous-ensemble dense qui est dénombrable.
3. $f^2(N); L^2[0; 2\pi]; L^2(U)$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ sont tous des espaces de Hilbert séparables.

Proposition 4.60. *(Sans aucun doute c'est faux !, et n'a pas sa place dans ce châpitre) Tout espace métrique est séparé au sens de Hausdorff.*

4.2.8 Convergence et limite d'une fonction

4.2.9 Convergence et limite d'une suite

4.2.9.1 Définition

Définition 4.61. *Soit (E,d) un espace métrique, (a_n) une suite de E et l un point de E.*
*On dit que (a_n) **tend ou converge simplement** dans E vers $l \in E$ si et seulement si :*
$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; (\forall n \geqslant N) \Rightarrow (d(a_n, l) < \varepsilon)$.
On écrit alors $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$.

4.2.9.2 C.N.S. Adhérence-Suite et Fermé-Suite

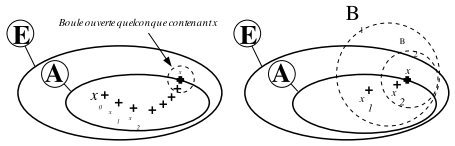
Proposition 4.62. *Soit E un espace métrique, $A \subset E$,*

1. *soit x un point de E, $(x \in \bar{A}) \Leftrightarrow$ il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de point de A convergent vers x.*
2. *A est fermé $\Leftrightarrow$ toute suite de A convergente dans E à sa limite dans A .*

Démonstration. Page 9 du cours Benabdallah. □

C.N.S. de densité utilisant les Suites (Trouver son emplacement)

Remarque 4.63. Ecrire la condition suffisante de densité utilisant les suites : ce doit être quelque chose du type : A dense dans $E \Leftrightarrow \forall x \in E, \exists$ une suite (x_n) de points de A convergeant vers x.



Démonstration. Voir CTE page 41 Topologie. □

4.2.10 Continuité

4.2.10.1 Définition

Proposition 4.64. *Si (X,d) et (E,d') sont des espaces métriques, la condition devient :*
*f est **continue en x_0** si et seulement si :*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0,\ f(\mathcal{B}(x_0,\eta)) \subset \mathcal{B}(f(x_0),\varepsilon),$$

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \eta > 0; \forall x \in \mathcal{B}'_d(x_0,\eta) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{B}'_{d'}(f(x_0),\varepsilon)$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0; \forall x \in X, (d(x_0,x) \leqslant \eta) \Rightarrow (d'(f(x_0), f(x)) \leqslant \varepsilon).$$

RAjouter 3ième point de 1.1.1 cours CTE chapitre 2 + à mettre en premier ?

L'application δ: $\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^+ \\ (x,y) & \mapsto & |x-y| \end{array}\right.$ est une distance sur $\mathbb{R}$. ($\mathbb{R}$, δ) est donc un espace métrique. (Je ne vois pas l'intéret de cette phrase ! c'est d'ailleurs le premier exemple du cours)

Exemple 4.65. Soit (E, d) un espace métrique. L'application $f: \left| \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & d(x, A) \end{array} \right.$ est continue.
Dans une propriété suivante, nous verrons qu'elle est même uniformément continue.

Démonstration. Page 32 du cours de M. Benabdallah. □

Continuité de la distance sur son espace de définition.
Soit (E, d) un espace métrique. L'application distance $f: \left| \begin{array}{ccc} E^2 & \to & \mathbb{R}^+ \\ (x; y) & \mapsto & d(x, y) \end{array} \right.$ de E est continue sur E. E^2 étant considéré comme l'espace topologique produit. Vérifier l'énoncé ! Je ne le trouve pas dans le cours de M. Benabdallah. Par contre, il en existe un dans mon cours manuscrit : section espace métrique 2.10. Ceci justifie que cette partie doit se placer dans la section espace produit. Par exemple dans 5.5.1 ou 5.5.2 ce qui conduit à une autre démonstration de la continuité de d sur E^2: en utilisant les applications ci-dessus.

Démonstration. Livre Topologie Gilles Christol; Anne Cot et Charles-Michel Marle page 88 ou Topologie générale Jacques Dixmier page 66. □

Par contre on montre que $f: \left| \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & d(\alpha, x) \end{array} \right.$, $\alpha \in E$ est continue.

Démonstration. Soit $x_0 \in E$, $\varepsilon > 0$ et $V = \mathcal{B}'\left(x_0; \frac{\varepsilon}{2}\right)$; $\forall x \in V, d(\alpha, x) \leqslant d(\alpha; x_0) + d(x_0; x)$, $d(\alpha, x_0) \leqslant d(\alpha; x) + d(x; x_0)$ d'où $|d(\alpha; x) - d(\alpha; x_0)| < \varepsilon$ donc f est continue.

□

4.2.10.2 C.N.S. de continuité utilisant les suites

Théorème 4.66. *Soient E un espace métrique, F un espace topologique et $f: E \to F$ une application.*

f continue en $a \Leftrightarrow \forall (x_n)$ suite de E convergente vers a, la suite $(f(x_n))$ converge dans F vers $f(a)$.

1. *(x_n) converge vers $a \Rightarrow$ la suite $(f(x_n))$ de F converge vers $f(a)$.($\to$ à revoir)*
2. *En particulier si a est valeur d'adhérence de (x_n) alors $f(a)$ est valeur d'adhérence de $(f(x_n))$.*

A revoir, il doit manquer des hypothèses, voir 1 exemple d'application TD cours licence de math A.R. page 4.

Démonstration.

1. Cours M. Benabdallah page 12.
2.
3. □

4.2.11 Valeur d'adhérence d'une fonction

Définition 4.67. *Soit E, F deux espaces métrique, $A \subset E, x_0 \in \bar{A}$ et $f: A \to E$ valeur d'adhérence de $f(x)$ lorsque $x \to x_0$ si et seulement si : $\forall \varepsilon > 0; \exists x \in A; d(x; x_0) < \alpha$ et $d(f(x); y) < \varepsilon$. La deuxième condition peut être remplacée par (suite voir cours licence CTE) ???*

4.2.12 Valeur d'adhérence d'une suite

Proposition 4.68. *Soit (E, d) un espace métrique, (x_n) une suite de E et a un point de E.*
a est valeur d'adhérence de $(x_n) \Leftrightarrow \exists$ une suite extraite de (x_n) convergente vers a.

Exemple 4.69. La suite (x_n) de $\mathbb{R}$ telle que : $x_{2n} = n$ et $x_{2n+1} = \frac{1}{n}$. 0 est valeur d'adhérence de (x_n).

4.2.13 Nombre de Lebesgue

Lemme 4.70. *(Lemme de Lebesgue) Soit (E, d) un espace métrique dans lequel toute suite possède une valeur d'adhérence et $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de E alors*

Il existe $\rho > 0$ telle que toute boule ouverte de E de rayon inférieur ou égal à ρ soit contenue dans au moins un des ouverts U_i.

Remarque 4.71. Ce lemme sera utilisé pour démontrer la C.N.S. de compacité dans un espace métrique.

Démonstration. Cours de M. Benabdallah page 20. □

Définition 4.72. *On appelle **nombre de Lebesgue** pour le recouvrement $(U_i)_{i\in I}$, tout $\rho \in \mathbb{R}_+^*$, vérifiant le lemme de Lebesgue précédent.*

4.2.14 Espace métrique compact

«Dans le cadre métrique, l'étude des propriétés de compacité se ramène à l'étude des propriétés de convergence de suites, ce qui simplifie évidement l'approche. La présence d'une distance permet aussi de quantifier la taille des recouvrements ouverts utilisés, rendant ainsi les définitions plus intuitives.» J.P. Marco (Analyse pour la licence p.78 - Masson).

Remarque 4.73. On a vu qu'un espace métrique est toujours séparé. Pour montrer qu'il est compact, il suffit donc de montrer qu'il est quasi-compact.

Proposition 4.74. *Un espace métrique (E, d) est compact si et seulement si, il est complet et précompact.*

Exemple 4.75.

1. Toute espace métrique fini est compact.
2. L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels n'est pas compact.

4.2.14.1 C.N.S. de compacité

4.2.14.2 Propriétés

Proposition 4.76. *Soit (E, d) un espace métrique, $A \subset E$. A est relativement compact $\Rightarrow$ A borné.*

Note 4.77. Rajouter des exemples.

Exemple 4.78.

Proposition 4.79. *Soit (E, d) un espace métrique , A une partie de E.*
A compact $\Rightarrow$ A est fermée et bornée

Remarque 4.80. Il y a équivalence si les boules fermées sont compactes ?

4.2.14.3 Exemples

1. Soit $a, b \in \mathbb{R}; a \leqslant b$, l'intervalle fermé $[a; b]$ est compact.
2. Les sous-espaces compacts de $\mathbb{R}$ sont les parties fermées et bornées de $\mathbb{R}$.
3. $\mathbb{R}$ n'est pas compacte car non borné.
4. Dans $\mathbb{R}$, «A relativement compact» $\Leftrightarrow$ «A bornée».

5. Les parties compactes de $\mathbb{R}^n$ (muni des distances produit usuelles) sont les fermées bornées de $\mathbb{R}^n$. Idem pour les $\mathbb{K}^n$, les parties compactes sont les fermés bornés.

Théorème 4.81. *Un espace métrique est compact $\Leftrightarrow$ il est recouvert par un nombre fini de boule.*

4.2.14.4 Compacité, suite et C.N.S. de compacité dans un espace métrique

Proposition 4.82. *Soit (x_n) une suite convergent d'un espace métrique $(E,\ d)$, l sa limite, alors l'ensemble $\{x_n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ est compact.*

Proposition 4.83. *Soit (E, d) un espace métrique compact.*
De toute suite de E, on peut extraire une sous-suite convergente.

Proposition 4.84. *(Critère de compacité C.N.S.) Soit E un espace métrique.*
«E est compact» $\Leftrightarrow$ «toute suite a une valeur d'adhérence»$\Leftrightarrow$ «toute suite admet une sous-suite convergente» $\Leftrightarrow$ Toute partie finie de E admet au moins un point d'accumulation.

Démonstration. Cours de M. Benabdallah page 21, Cours CTE page 129. □

Exemple 4.85. Soit (E, d) un espace métrique et $A \subset E$.
«A est compact relativement (i.e. $\bar{A}$ compact)» $\Leftrightarrow$ «Toute suite de point de A admet une sous-suite convergente» $\Leftrightarrow$ « Toute suite de point de $\bar{A}$ admet une sous-suite convergente ».

Démonstration. Cours de M. Benabdallah page ?. □

Proposition 4.86. *Soit (E, d) un espace métrique, $A \subset E$ et A relativement compact.*
Alors A est bornée.

Proposition 4.87. *(Théorème de Heine) Soient $(E,\ d)$ un espace métrique compact, $(E',\ d')$ espaces métriques et $f\colon E \to F$ une application continue. Alors f est une application uniformément continue.*

4.3 Continuité uniforme

Peut-on aussi définir la convergence uniforme autrement que dans un espace de fonction ? La notion de fonction uniformément continue n'est définie que sur un espace métrique. C'est une notion propre aux espaces métriques car, on ne peut pas exprimer cette notion en terme d'ouverts uniquement.

4.3.1 Définition

Définition 4.88. *Soit (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques et une application $f\colon E \to F$.*
*On dit que f est **uniformément continue** si et seulement si :*
$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in E, [d(x, y) < \eta \Rightarrow \delta(f(x), f'y)) \leqslant \varepsilon]$

Proposition 4.89. *«f Lipschitzienne»$\Rightarrow$ «f uniformément continue»$\Rightarrow$ «f continue».*

Démonstration. Evidente par recours aux définitions. □

Exemple 4.90.

1. Soit $A \subset E$, l'application $f\colon \left| \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & d(x, A) \end{array} \right.$ est uniformément continue.
2. Contre exemple : L'application $f\colon \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ est continue, mais non uniformément continue.

3. L'application Id_E est uniformément continue.

Proposition 4.91. *Si f et g sont uniformément continue, alors $f \circ g$ aussi.*

Démonstration. La composée de deux applications uniformément continues est-elle uniformément continue ? Oui voir CTE page 76 cours de topologie. □

Proposition 4.92. *(Théorème de Heine) Soit (E, d) un espace métrique compact et (F, δ) un espace métrique. Toute application continue de E dans F est uniformément continue.*

Démonstration. Voir cours de licence p.30. □

Proposition 4.93. *Soit (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques et une application $f\colon E \to F$ (uniformément ?) continue. Alors l'image par f d'une suite de Cauchy de E est une suite de Cauchy de F.*

Démonstration. Voir cours de licence p.31. □

Remarque 4.94. Cette proposition permet de montrer que l'application $\Phi\colon \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R}^* \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}\right.$ n'est pas uniformément continue.

Définition 4.95. *On dit que f est un homéomorphisme uniforme $\Leftrightarrow f, f^{-1}$ sont uniformément continues.*

4.4 Distances équivalentes

Parfois deux distances $\neq d$ et δ sur un espace E sont assez ressemblantes pour que les espaces métriques aient les mêmes propriétés pour des objets mathématiques définis resp. par d et δ. Il existe plusieurs notions de ressemblance.

4.4.1 Distances topologiquement équivalentes

Définition 4.96. *On dit que deux distances d et d' sont **topologiquement équivalentes** sur E si et seulement si :*

$$\textit{Les appplications identiques :} \left|\begin{array}{ccc} E_d & \to & E_{d'} \\ x & \mapsto & x \end{array}\right. \textit{ et :} \left|\begin{array}{ccc} E_{d'} & \to & E_d \\ x & \mapsto & x \end{array}\right. \textit{ sont continues.}$$

Proposition 4.97. *d et d' induisent la même topologie sur E.*

Remarque 4.98. Autrement dit ssi Id est un homéomorphisme.

4.4.2 Distances uniformément équivalentes

Définition 4.99. *On dit que deux distances d et d' sont **uniformément équivalentes** sur E si et seulement si :*

$$\textit{Les appplications identiques :} \left|\begin{array}{ccc} E_d & \to & E_{d'} \\ x & \mapsto & x \end{array}\right. \textit{ et :} \left|\begin{array}{ccc} E_{d'} & \to & E_d \\ x & \mapsto & x \end{array}\right. \textit{ sont uniformément continues.}$$

Remarque 4.100. Autrement dit ssi Id est un homéomorphisme uniformément continu.

4.4.3 Distances métriquement équivalentes

Définition 4.101. *On dit que deux distances d et d' sont **(métriquement) équivalentes** sur E si et seulement si :*

Les appplications identiques : $\left|\begin{array}{ccc} E_d & \to & E_{d'} \\ x & \mapsto & x \end{array}\right.$ *et :* $\left|\begin{array}{ccc} E_{d'} & \to & E_d \\ x & \mapsto & x \end{array}\right.$ *sont sont lipschitziennes de constantes resp.* C *et* $\frac{1}{c}$.

Proposition 4.102. *Deux distances* d *et* d' *sont métriquement équivalentes si et seulement si, il existe deux constantes réelle* $c>0$ *et* $C>0$ *telle que :*

- $\forall u, v \in E^2, c\, d(u,v) \leqslant d'(u,v) \leqslant C\, d(u,v)$,
- *i.e.* $\forall u, v \in E^2, c \leqslant \frac{d'(u,v)}{d(u,v)} \leqslant C$.

Exemple 4.103. Les distances d_1,d_2, et d_∞ sont des distances métriquement équivalentes $d_\infty(x,y) \leqslant d_2(x,y) \leqslant d_1(x,y) \leqslant n \times d_\infty(x,y), \forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$

4.4.4 Relation entre ces distances

Proposition 4.104.

1. *métriquement équivalentes* $\Rightarrow$ *uniformément équivalentes* $\Rightarrow$ *topologiquement équivalentes.*
2. *Autrement dit les parties ouvertes sont les mêmes pour des distances (métriquement) équivalentes.*

Démonstration.

1.
2. Cours de M. Benabdallah licence TCD page 3. □

Exemple 4.105. Les parties ouvertes de $\mathbb{R}^n$ sont les mêmes pour d_1, d_2 et d_∞.

Proposition 4.106.

1. *2 distances sont topologiquement équivalentes si et seulement si toute suite convergente pour une distance est convergente vers la même limite pour l'autre distance.*
2. $d_1 \overset{u}{\sim} d_2 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0; \exists \alpha_1; \alpha_2 > 0; \forall x \in \mathcal{B}_{d_1(x;\alpha_1)} \subset \mathcal{B}_{d_2(x;\varepsilon)}, \mathcal{B}_{d_2(x;\alpha_2)} \subset \mathcal{B}_{d_1(x;\varepsilon)}$.

Remarque 4.107. Nous verrons que dans un espace vectoriel normé, il y a équivalence.

4.5 Connexité

Proposition 4.108. *Soit* $(E,\ d)$ *un espace métrique,* E *est connexe si et seulement si toute application* f *de* $(E,d) \to (\{0;1\};\delta)$ *est constante. (avec* δ *distance discrète).*

4.6 Autogamie d'espaces métriques

Ou comment des espaces métriques permettent de construire d'autres espaces métriques.

On va dans un premier temps définir quelques distances sur l'espace produit $E_1 \times ... \times E_n$, ou E_i est un espace métrique. Comme les espaces métriques sont également des espaces topologiques, on obtient une topologie produit. Par ailleurs, on peut se demander s'il est possible que les distances δ définies sur l'espace produit induisent la topologie produit trouvée précédement. La réponse est oui dans le cas d'une famille finie ou dénombrable d'espaces métriques. Les distances données ne sont pas uniques. Finalement l'espace défini en début de chapitre est également un espace métrique.

4.6.1 Sous-espace métrique

Mettre passage CTE page 38.

4.6.1.1 Ouverts dans un sous-espace métrique

4.6.1.2 Fermés dans un sous espace-métrique

4.6.1.3 Voisinage dans un sous espace-métrique

4.6.1.4 Limite d'une suite dans un sous-espace métrique

4.6.2 Produit d'espaces métriques

4.6.2.1 Exemple de distances sur un produit d'espaces métriques

Proposition 4.109. *Soit* $(E_1,\ d_1)$, ..., $(E_n,\ d_n)$ *n espaces métriques, l'espace produit* $E = E_1 \times ... \times E_n$, *et* $x, y \in E$. *On pose* $x = (x_1, ..., x_n)$ *et* $y = (y_1, ..., y_n)$.

- δ_1: $\left| \begin{array}{ccc} E^2 & \to & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \mapsto & \sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i) \end{array} \right.$
- δ_2: $\left| \begin{array}{ccc} E^2 & \to & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \mapsto & \sqrt{\sum_{i=1}^n (d_i(x_i, y_i))^2} \end{array} \right.$
- δ_p: $\left| \begin{array}{ccc} E^2 & \to & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \mapsto & \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n (d_i(x_i, y_i))^p} \end{array} \right.$, $p \in \mathbb{R}_+$
- δ_∞: $\left| \begin{array}{ccc} E^2 & \to & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \mapsto & \sup_{0 \leqslant i \leqslant 1} d_i(x_i, y_i) \end{array} \right.$

1. $\delta_1, \delta_2, \delta_p, \delta_\infty$ *sont des distances sur* E.
2. *Elles sont équivalentes.*

Note 4.110. Revoir l'ordre pour que cela coïncide avec la partie topologie générale.

Proposition 4.111. *Soit* $((E_i,\ d_i))_{i \in I}$ *une suite d'espaces métriques, l'espace produit* $E = \prod_{i \in I} E_i$, *et* $x, y \in E$. *On pose* $x = (x_{i \in I})$ *et* $y = (y_i)_{i \in I}$.

l'application δ: $\left| \begin{array}{ccc} E^2 & \to & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \mapsto & \sum_{i \in I} \left(\frac{1}{2^i} \times \frac{d_i(x_i, y_i)}{1 + d_i(x_i, y_i)} \right) \end{array} \right.$ *est une distance sur* E.

Proposition 4.112. *Le produit fini ou dénombrable d'espace métrique est un espace métrique.*

Proposition 4.113. *La topologie induite par la distance de* E *est égale à la topologie produit de* E.

Démonstration. Cours de M. Benabdallah page 16. □

Proposition 4.114.

i. Un produit fini de voisinage V_i *des* E_i *est un voisinage de* E.

ii. Un produit fini de fermé F_i *des* E_i *est un fermé de* E.

iii. Un produit fini d'ouvert O_i *des* E_i *est un ouvert de* E, *appelé ouvert élémentaire.*

iv. Une partie ouverte de E *est une réunion d'ouverts élémentaires.*

v. Rajouter ici la continuité de la distance d (définie sur E) sur $E \times E$ muni de la topologie produit. (Voir verso page 30 de ce livre : livre version 1)

Démonstration.

i.

ii. On utilise les applications partielles : $f: \left| \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & d(\alpha, x) \end{array} \right.$.

iii.

iv.

v. □

4.6.2.2 Fonctions définies sur un espace produit

Proposition 4.115. *Les projections* $\mathrm{pr}_i: \left| \begin{array}{ccc} E_1 \times ... \times E_i \times ... \times E_n & \to & E_i \\ (x_1, ..., x_i, ..., x_n) & \mapsto & x_i \end{array} \right.$ *sont continues sur E.*

Proposition 4.116. *Soit* $f: E_1 \times ... \times E_n \to F$ *une application.*
f continue $\Leftrightarrow$ *l'application partielle* f_i *est continue .*

4.6.2.3 Fonctions à valeurs dans un espace produit

Proposition 4.117. *Soit* $f: E \to F_1 \times ... \times F_n$ *une application de composantes* $(f_1, ..., f_n)$.

i. Si $x_0 \in \bar{E}$, $(\lim_{x \to x_0} f(x) = l, l = (l_1, ..., l_n)) \Leftrightarrow (\lim_{x \to x_0} f_i = l_i)$

ii. f continue en $x_0 \Leftrightarrow$ *chaque* f_i *sont continues en* x_0 .

4.6.2.4 Suites dans un espace produit

Proposition 4.118. *Soit* $E = E_1 \times ... \times E_k$ *un produit fini d'espace métrique,* (x_n) *une suite de* E $x_n = (x_n^1, ..., x_n^k)$ *et* $l = (l_1, ..., l_n)$ *un point de E.*
(x_n) *converge vers* $l \Leftrightarrow \forall i \in \{1, ..., n\}$, *les suites* (x_n^i) *de* E_i *tendent vers* l_i.

4.6.2.5 Limite d'une fonction à valeur dans un espace produit

4.7 Suite de Cauchy. Espace métrique complet

Remarque 4.119. «Les notions de suite de Cauchy et d'espace complet ont été créées afin de donner un moyen de prouver la convergence d'une suite sans qu'il soit nécessaire de connaître sa limite. Pour prouver qu'une suite ... d'un espace métrique complet converge, il suffit ... de montrer que cette suite vérifie le critère de Cauchy ... [c'est à dire que la distance entre deux termes quelconques peut être rendue aussi petite que l'on veut si l'on impose un minimum au rang de ces termes] [ce] qui ne nécessite pas la connaissance de la limite ... . [Alors que] La vérification directe ... nécessiterait la connaissance de cette limite ...» Topologie (Ellipse-p.92). «L'intéret des espaces métriques complets est de fabriquer de nouveaux objets à l'aide de processus sommatoires : séries absolument convergentes, transformations d'Abel ou approximation successives : théorie du point fixe, théorème de Cauchy-Lipschitz, de fournir des prolongements de fonctions en vue par exemple de construire l'intégrale de Riemann ou de trouver les intervalles de définitions maximales d'équations différentielles» (Commentaires cours CTES chapitre 3).

4.7.1 Suite de Cauchy d'un espace métrique

4.7.1.1 Définition

Définition 4.120. *Soit E un espace métrique et* (x_n) *une suite de E.*

On dit que (x_n) ***est de Cauchy*** $\Leftrightarrow$ *"*$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, *tel que* $p, q \geqslant n_0 \Rightarrow d(x_p, x_q) \leqslant \varepsilon$ *".*

4.7.1.2 Propriétés

Remarque 4.121.

1. La notion de suite de Cauchy n'est pas une propriété topologique.
2. Toute suite extraite d'une suite de Cauchy est de Cauchy.
3. Toute suite convergente est de Cauchy.
4. Toute suite de Cauchy est une suite bornée.
5. Toute suite de Cauchy qui possède une suite extraite convergente est une suite convergente.

Démonstration. Voir cours de licence p.27 et cours de CTES chapitre 3 topologie.

1. Soit $(x_n)\colon n \mapsto \frac{1}{n}$ et $\Phi\colon x \mapsto \frac{1}{x}$. (x_n) est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}^*$, mais $\Phi \circ (x_n) = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ n'est pas de Cauchy (bien que Φ soit un homéomorphisme). Sinon pour montrer que la complétude n'est pas une propriété toplogique, on peut montrer que $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle est complet alors que $\mathbb{R}$ muni de la distance équivalente (métriquement) $d(x; y) = \left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}\right|$ n'est plus complet (exercice 3.4 chapitre 3 CTES Topologie page 108). Existe-t-il une topologie sur $\mathbb{N}$? Si oui laquelle ? Autrement dit $\mathbb{N}$ est-il un espace topologique ?
2.
3.
4.
5. CTE page 99 □

Proposition 4.122. *Si* (x_n) *est de Cauchy. Toute valeur d'adhérence de* (x_n) *est limite de* (x_n)*. Autrement dit, si* (a) *est valeur d'adhérence de* (x_n) *alors* (x_n) *converge vers* (a)*.*

Démonstration. Voir cours de licence p.27-28. □

4.7.1.3 Image d'une suite de Cauchy par une application uniformément continue

Proposition 4.123. *(Conservation de la propriété de Cauchy d'une suite) Soient* E; F *2 espaces métriques et* f *uniformément continues* $E \to F$*. L'image par* f *d'une suite de Cauchy de* E *est une suite de Cauchy de* F*.*

Démonstration. Cours de Benabdallah page 31 TCD 2001-2002. □

Remarque 4.124. Ceci peut servir à montrer qu'une application n'est pas uniformément continue.

Exemple 4.125. Soient $x_n\colon n \mapsto \frac{1}{n}$ et $\Phi\colon x \mapsto \frac{1}{x}$. (x_n) est une suite de Cauchy, mais $\Phi(x_n) = n$ ne l'est pas donc Φ n'est pas uniformément continue.

4.7.2 Espace Complet

Note 4.126. Notion définie uniquement sur un espace métrique. Car elle est définie à partir des suites de Cauchy qui sont définies uniquement dans un espace de métrique.

4.7.2.1 Définition

Définition 4.127. *Soit* E *un espace métrique.*

E est ***complet*** *si et seulement si toute suite de Cauchy (à valeurs dans E) est convergente.*

Remarque 4.128. Dans un espace métrique complet, on a alors identité entre suite de cauchy et suites convergentes. Un espace vectoriel normé complet pour la métrique associée à la norme est appelé espace de Banach.

Exemple 4.129.

1. $\mathbb{Q}$ n'est pas complet : $\left(\frac{[n\sqrt{2}]}{n}\right)_n$ est une suite de Cauchy, mais ne converge pas dans $\mathbb{Q}$.
2. $]0;1]$ muni de la distance usuelle n'est pas complet.
3. Tout espace métrique dont toutes les boules fermées sont compactes est complet.
4. En particulier $\mathbb{R}$; $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$; $\mathbb{C}$; $\mathbb{C}^n$ en fait tout espace vectoriel de dimension finie quelque soit la norme est un espace complet (en fait se sont des espaces de Banach).

Démonstration. Voir cours de licence p.28 et CTES pour $\mathbb{R}$ complet. □

4.7.2.2 Propriétés

Proposition 4.130. *Un espace métrique compact est complet.*

Note 4.131. Nous avons vu que la notion de complétude n'est pas une notion topologique donc elle n'est pas conservée par la continuité d'une application.

Proposition 4.132. *(Transfert de complétude) Soient $(E,d);(F,d')$ deux espaces métriques. f: $E \to F$ uniformément continu; bijective avec f^{-1} continue alors si F est complet alors E est complet.*

Démonstration. Exercice 3.5 cours CTES page 108. □

Corollaire 4.133.

1. *Soient d_1, d_2 2 distances de E. Si d_1, d_2 sont uniformément équivalentes alors $(E_1; d_1)$ est complet si et seulement si $(E_2; d_2)$ est complet.*
2. *Soient (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces isométriques, alors $(E_1; d_1)$ est complet si et seulement si $(E_2; d_2)$ est complet.*

Proposition 4.134.

1. *Dans un espace métrique E, tout sous-espace métrique complet est fermé dans E. Autrement dit F sous-espace métrique complet $\Rightarrow$ F fermé.*
2. *Dans un espace métrique complet E, tout sous espace fermé de E est complet. Autrement dit F sous-espace métrique complet $\Leftrightarrow$ F fermé.*

Remarque 4.135. En résumé dans un espace métrique complet les sous-espaces métriques complets sont exactement les fermés de l'espace.

Démonstration. Voir cours de licence p.28. Topologie (Ellipse-p.93). Cours exercice 3.6 Topologie page 108 (CTE). □

Théorème 4.136. *Soit E un espace métrique complet (à supprimer ?!):*
«E compact» $\Leftrightarrow$ «E est complet (à supprimer ?! lequel est en trop)et $\forall \varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de E par des boules ouvertes de rayon ε».

Remarque 4.137. Autrement dit, dans un espace métrique complet et compact, on peut fixer le rayon des boules ouvertes recouvrant E et inversement. ? $\Rightarrow$ vient de la compacité mais $\Leftarrow$ est apporté par la complétude.

Démonstration. Voir cours de licence p.29. □

Théorème 4.138. *Soit E un espace métrique complet et A une partie de E.*
«$\bar{A}$ compact» $\Leftrightarrow$ « $\forall \varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de A par des boules ouvertes de centre dans A et de rayon ε».

Démonstration. Voir cours de licence p.29. □

Proposition 4.139. *(Théorème des fermés emboités) Soit (E, d) un espace métrique complet. Soit (F_n) une suite décroissante (pour l'inclusion, c'est à dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+1} \subset F_n$) et telle que $\lim_{n\to+\infty} \delta(F_n) = 0$ alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est un singleton.*

Démonstration. CTES page 104 cours de Topologie. □

4.7.3 Espace produit complet

Proposition 4.140. *L'espace métrique produit (i.e. muni de la métrique produit) est complet si et seulement si chacun des facteurs est complet.*

Démonstration. Cours CTES page 108 exercice 3.7. □

Corollaire 4.141. $(\mathbb{R}^n; \text{normes usuelles})$ *et $\mathbb{C}^n$ assimilé à $\mathbb{R}^{2n}$ sont complets*

4.7.4 Théorème du point fixe

4.7.4.1 Théorème du point fixe

Note 4.142. Soit E un espace métrique et $g: E \to E$ une application. Résoudre l'équation $g(x) = b$ équivaut à trouver les points fixes de l'application $f: \left| \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & g(x) + x - b \end{array} \right.$.

Théorème 4.143. *Soit E un espace métrique complet et $f: E \to E$ une application strictement contractante (i.e. Lipschitzienne de rapport $k \in [0; 1[$? / ou / c'est surement $]0; 1[$, mais c'est $[0; 1[$ pour Benabdallah page 33 et CTES Toplogie page 107).*

1. *Il existe un unique point $a \in E$, tel que $f(a) = a$.*
2. *De plus toutes les orbites des points de E suivant f sont convergentes. Autrement dit pour tout point $x_0 \in E$, la suite définie par $\left\{ \begin{array}{l} x_0 \\ x_{n+1} = f(x_n), n \geqslant 1 \end{array} \right.$ converge vers a.*

Démonstration. CTES page 107 Topologie. □

Remarque 4.144.

1. L'hypothèse $d(f(x); f(y)) < d(x; y)$ n'implique pas que f soit une contraction.
2. L'hypothèse E complet est fondamentale si $E =]0; 1]$ et $f(x) = \frac{x}{2}$ alors f est conctractante et n'a pas de point fixe dans E
3. Cette méthode des itérations est un excellent outil de calcul numérique des valeurs approchées du point fixe. (Banach 1922).

Corollaire 4.145. *Soit E un espace métrique complet et $f: E \to E$ une application, telle qu'une des ses itérés ($\exists p \in \mathbb{N}^*$, $f^p = f \circ ... \circ f$) soit contractante (i.e. lipschitzienne de rapport $k \in [0; 1[$ à vérifier / ou / benabdallah page 34).*

1. *Il existe un unique point $a \in E$, tel que $f(a) = a$.*
2. *De plus toutes les orbites des points de E suivant f sont convergentes. Autrement dit pour tout point $x_0 \in E$, la suite définie par $\left\{ \begin{array}{l} x_0 \\ x_{n+1} = f(x_n), n \geqslant 1 \end{array} \right.$ converge vers a.*

4.7.4.2 Théorème du point fixe avec paramètre

Théorème 4.146. *Soit F un espace topologique, E un espace métrique complet, $f\colon E\times F\to E$ une application continue telle que $\forall\lambda\in F$, l'application :* $\left|\begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & f(\lambda,x)\end{array}\right.$ *soit contractante de rapport $k\in[0,1[$. Si pour tout λ, on désigne par a_λ, le point fixe tel que $f(\lambda,a_\lambda)=a_\lambda$ alors :*

L'application : $\left|\begin{array}{ccc} E & \to & E \\ \lambda & \mapsto & a_\lambda\end{array}\right.$ est continue.

4.7.5 Prolongement de fonction

4.7.5.1 Critère de Cauchy et prolongement

Proposition 4.147.

1. *Soit (E,d) et $(F;d')$ deux espaces métriques et A une partie de E, si f possède une limite au point (a) de Eselon la pertie de A, on a :*
   $\forall\varepsilon>0;\exists\alpha>0;\forall x\in A;d(x;y)<\alpha\Rightarrow d'(f(x);f(y))<\varepsilon$ *(critère de Cauchy).*
2. *Réciproquement, si $(F';d')$ est complet, le Critère de Cauchy (CC) $\Rightarrow$ l'existence d'une limite de f au point (a) selon A.*

Démonstration. Page 105 CTES Topologie. □

Corollaire 4.148. *Soient $a<b$ 2 réels, $f\colon]a;b[\to\mathbb{R}$ dérivable dont la dérivée est bornée sur $]a;b[$ alors f possède un prolongement continu sur $[a;b]$.*

Démonstration. CTES page 105 Topologie. □

Remarque 4.149. Le caractère lipschitzien de l'application suffit pour obtenir le prolongement.

4.7.5.2 Prolongement d'une application uniformément continue

Note 4.150. lire CTES page 106.

Théorème 4.151. *Soient $(E,\ d)$ et $(E',\ d')$ deux espaces métriques, F étant complet, A une partie dense de E et f une application uniformément continue de A dans F.*

- *Il existe une unique application continue $g\colon E\to F$ qui prolonge f,*
- *de plus, g est uniformément continue.*

Exemple 4.152. Application : Construction de l'intégrale de Riemann des fonctions réglées. soit E un espace de Banach, $[a;b]\subset\mathbb{R}$ et $f\colon[a;b]\to E$.

1. Une application h est dite en escalier si et seulement si, il existe une subdivision $\sigma=\{x_0;x_1;...;x_n\}$ où $x_0=a$, $x_n=b$ et $x_0<x_1<...<x_n$ telle que $\forall i\in\{1;...;n\}$, h soit constante sur $]x_{i-1};x_i[$ et vaut $\lambda_i\in E$.
2. On dit que f est réglée sur $[a;b]$ si et seulement si, il existe une suite de fonctions (f_n) en escalier qui converge uniformément vers f sur $[a;\ b]$ (en fait les fonctions réglées sont les fonctions qui admettent des limites à droite et à gauche en tout point de $[a;b]$).
3. L'intégrale d'une fonction en escalier $f\colon\ [a;\ b]\ \to\ E$ est donnée par $\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=0}^{i=n-1}(x_{i+1}-x_i)\,\lambda_i$ où $\sigma=\{x_0;x_1;...;x_n\}$ avec $x_0=a$, $x_n=b$ et $x_0<x_1<...<x_n$ est une subdivision adptée à f et λ_i la valeur constante que prend f sur l'intervalle ouvert $]x_i;x_{i+1}[$.
4. On montre ensuite que :
   - la valeur de l'intégrale ne dépend pas de la subdivision choisie ce qui $\Rightarrow$ la linéarité de l'intégrale.

- $\left\| \int_a^b f(x)dx \right\| \leqslant (b-a)\,||f||_\infty$ l'intégrale se prolonge donc en une forme linéaire de même norme sur l'espace des fonctions rélgées. Dans le cas des fonctions réelles, on vérifie alors la conservation des caractères positifs, puis croissant.

4.8 Espaces topologiques connexes

Dans une version précédente, cette partie n'était pas présente car toutes les propriétés vue dans le cas général des espaces topologiques se retrouvaient à l'identique pour les espaces métriques. Cependant pour rendre cette leçon indépendante, je l'ai rajoutée. Il faudra veiller à remplacer topologique par métrique. La notion de connexité ... traduit en termes mathématiques l'idée intuitive d'espace d'un seul tenant . Topologie (Ellipse-p.78). CTE :« l'une des utilités de cette notion est, entre autres, de permettre de passer du local au global ».

4.8.1 Définition

Définition 4.153.

1. *Un* ***espace topologique*** *E est* ***connexe*** *si et seulement si :*
   Il n'existe aucune partition de E en deux ouverts de E.
2. *Une* ***partie*** *A de E est* ***connexe*** *si et seulement si le sous-espace topologique A (i.e. muni de la topologie induite par celle de E) est connexe.*

Remarque 4.154. Une partie A de E n'est pas connexe si et seulement si :

i. Il existe une partition de A en 2 ouverts (différents de $\varnothing$) non vide.

ii. Autrement dit, il existe 2 ouverts U_1, U_2 de E tels que :
   - $U_1 \cap A \neq \varnothing$ et $U_2 \cap A \neq \varnothing$
   - $U_1 \cap U_2 \cap A = \varnothing$
   - $A = (U_1 \cap A) \cup (U_2 \cap A) \Leftrightarrow A \subset U_1 \cup U_2$

4.8.2 Autres C.N.S. de connexité pour un espace topologique

Théorème 4.155. *(C.N.S. de connexité) Un espace topologique est connexe si et seulement si*

1. *il n'existe aucune partition de E en deux fermés non vides de E.*
2. *les seules parties à la fois ouvertes et fermées de E sont E et $\varnothing$.*
3. *les seules parties de E sans point frontière sont E et $\varnothing$.*
4. *A est connexe $\Leftrightarrow F_1, F_2$ sont deux fermés de E, tels que $A \cap F_1 \cap F_2 \neq \varnothing \Rightarrow A \cap F_1 = \varnothing$, $A \subset F_2$ ou $A \cap F_2 \subset F_1$. Enoncé à vérifier CTE 2003-2004. Enoncé déjà présent dans le théorème suivant.*

Théorème 4.156. *Une partie A d'un espace topologique est connexe si et seulement si l'une des 2 conditions suivantes est réalisée :*

i. Si $A \subset O_1 \cup O_2$ ou O_1, O_2 sont 2 ouverts de E vérifiant $A \cap O_1 \cap O_2 = \varnothing$ alors $A \cap O_1 = \varnothing$ et $A \subset O_2$ ou $A \cap O_2 = \varnothing$ et $A \subset O_1$.

ii. Si $A \subset F_1 \cup F_2$ où F_1, F_2 sont deux fermés de E, tels que $A \cap F_1 \cap F_2 =$ ou $\neq \varnothing \Rightarrow A \cap F_1 = \varnothing, A \subset F_2$ ou $A \cap F_2 \subset F_1$. Enoncé déjà présent dans le théorème suivant.

4.8.3 Exemples

Exemple 4.157. Espace et partie connexes

- $\mathbb{R}$ est connexe,

– Tout intervalle de $\mathbb{R}$ ou de $\bar{\mathbb{R}}$ est connexe, on montre de plus que : Une partie A de $\mathbb{R}$ ou de $\bar{\mathbb{R}}$ est connexe si et seulement si A est un intervalle . Autrement dit les seules parties connexes de $\mathbb{R}$ ou $\bar{\mathbb{R}}$ sont les intervalles.

Démonstration. Cours T.C.D. de Benabdallah page 45. □

Exemple 4.158. Espaces non connexes

– $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}$ ne sont pas connexes.

4.8.4 Propriétés

4.8.4.1 Connexité et adhérence

Proposition 4.159. *Soit E un espace topologique, A une partie connexe de E et $B \subset E$ tel que $A \subset B \subset \bar{A}$ alors B est connexe.*

Démonstration. Cours de Benabdallah page 47. □

Proposition 4.160. *Soit E un espace topologique et A une partie connexe de E alors $\bar{A}$ est aussi connexe.*

Note 4.161. La connexité se transmet à l'adhérence.

4.8.4.2 Réunion de connexes qui se rencontrent

Proposition 4.162. *Soit $(C_i)_{i\in I}$ une famille de connexes d'un espace métrique (E,d) telle que $\exists i_0 \in I, \forall i \in I, C_i \cap C_{i_0} \neq \varnothing$? alors $\bigcup_{i\in I} C_i$ est connexe.*

Démonstration. CTE page 150. □

Proposition 4.163. *La réunion d'une famille de parties connexes dont l'intersection n'est pas vide est connexe.*

Démonstration. Cours Banabdallah page 47. □

Proposition 4.164. *Soit $(C_i)_{i\in I}$ une famille au plus dénombrable de connexes (autrement dit avec $I = \{0;1;...;p\}$ où $I = \mathbb{N}$) telle que $\forall i \in I, i \neq 0, C_{i-1} \cap C_i \neq \varnothing$? alors $\bigcup_{i\in I} C_i$ est connexe.*

4.8.4.3 Image d'un connexe par une application continue

Proposition 4.165. *Soit E, F deux espaces topologique et $f\colon E \to F$ une application continue. Si A est une partie connexe de E alors $f(A)$ est une partie connexe de F.*

Démonstration. Cours de Benabdallah page 49. CTE page 150. □

Exemple 4.166.

1. Tout segment $[a;b] = \{a + t(b-a); t \in [0,1]\}$ d'un espace normé E est connexe. Car image de $[0,1]$ par l'application continue $f\colon \left| \begin{array}{ccc} [0;1] & \to & [a;b] \\ t & \mapsto & t\,a + (1-t)\,b \end{array} \right.$.
2. Toute partie X convexe de E est connexe.
3. En particulier tout espace normé est connexe
4. Toute boule ouverte ou fermée d'un espace normé est convexe donc connexe.

4.8.4.4 Théorème des valeurs intermédiaires

Note 4.167. Il me semble que ce soient les conditions minimales pour énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

Corollaire 4.168. *(Théorème des valeurs intermédiaires) Soit E un espace topologique connexe et $f: E \to \mathbb{R}$ une application continue. Soient $a, b \in f(E)$ avec $a < b$. Alors pour tout $c \in]a, b[$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = c$.*

Démonstration. Cours de Benabdallah page 49. □

4.8.5 Eléments connectés, Composantes connexes, Discontinuité totale

Définition 4.169. *Soit E un espace topologique. On dit que deux éléments $a, b \in E$ sont **connectés**, si et seulement si il existe une partie connexe de $A \subset E$ (? A de E) qui les contient tous les deux.*

Proposition 4.170. *La relation «... sont connectés ...» est une relation d'équivalence.*

Définition 4.171. *Les classes d'équivalence pour la relation «... sont connectés ...» sont appelés **composantes connexes**.*

Proposition 4.172. *La composante connexe d'un point $a \in E$ est la plus grande partie connexe de E contenant a.*

Définition 4.173. *Un espace topologique est dit **totalement discontinu** si chacune des ses composantes connexe a un seul élément.*

Remarque 4.174.

a) Les composantes connexes forment une partition de A.

b) Si elles sont en nombres fini elles sont ouvertes.

c) Les composantes connexes sont fermées.

d) Un espace topologique discret est totalement discontinu. Attention la réciproque n'est pas vraie : $\mathbb{Q}$ est totalement discontinu, mais n'est pas discret.

e) E est connexe $\Leftrightarrow E$ n'a qu'une seule composante connexe.

Démonstration.

a) CTE page 151. □

4.8.6 C.N.S. de connexité pour un produit d'espace topologique

Proposition 4.175. *Soit $E_1, ..., E_n$ des espaces topologiques et $E = E_1 \times ... \times E_n$ l'espace topologique produit alors E est connexe si et seulement si : $\forall i = 1, ..., n$, E_i est connexe.*

Démonstration. Cours de Benabdallah page 49. □

4.8.7 Chemin d'un espace topologique

Définition 4.176. *On appelle chemin d'un espace topologique $(E, \mathcal{O})$ toute application continue $\varphi: [0; 1] \to E$. $\varphi(0)$ et $\varphi(0)$ et $\varphi(1)$ sont appelés respectivement origine et extrémité de ce chemin.*

4.8.8 Connexité par arcs

Note 4.177. La connexité par arcs est surtout une notion pratique pour montrer qu'un espace est convexe. En terme intuitifs un espace est connexe par arcs si et seulement si on peut toujours relier deux de ses points par une courbe continue, ce qui en fait une notion moins abstraite que la connexité (CTES 2003-2004).

Définition 4.178. *Un* ***espace topologique*** *E est* ***connexe par arcs*** *si et seulement si pour tout couple (a, b) de points de E, il existe une application continue $f : [0, 1] \to E$ telle que $f(0) = a$ et $f(1) = b$. ?à revoir? Autrement dit deux points quelconques peuvent être joints par un chemin de E.*

Proposition 4.179. *Un espace topologique connexe par arcs est connexe.*

Remarque 4.180. La réciproque du théorème est fausse dans le cas général d'un espace métrique. Cependant, il y a équivalence pour un ouvert d'un espace vectoriel normé.

4.8.9 Espace localement connexe

Définition 4.181. *Un espace est dit localement connexe lorsque tout point de cet espace possède un système fondamental de voisinages connexes.*

Proposition 4.182. *Dans un espace topologique localement connexe, chaque composante connexe est à la fois ouverte et fermée.*

4.8.10 Application de la connexité

4.8.10.1 Connexité et homéomorphisme : On peut utiliser la connexité pour prouver que deux espaces ne sont pas homéomorphes : si l'un de ces espaces est connexe et l'autre pas, les deux espaces ne sont évidement pas homéomorphes.

4.8.10.2 Connexité et résolution d'équation : Le théorème des valeurs intermédiaires est souvent utilisé pour montrer l'existence d'une solution, or il n'est énoncé que pour des fonctions d'un espace connexe.

Chapitre 5
Algèbre linéaire et multilinéaire

Qu'est-ce qu'un opérateur, qu'est-ce qu'un opérateur compact ? Définir si c'est possible la partie convexe d'un espace vectoriel.

5.1 Espaces vectoriels et applications linéaires

5.1.1 Epaces vectoriels

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif. En pratique $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

5.1.1.1 Définition

Définition 5.1. *Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un ensemble, une loi de composition interne notée $+$, une loi externe (action) notée $\cdot$:* $\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \to & E \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda\cdot x \end{array}\right.$ *telles que :*

- $(E, +)$ *est un groupe abélien*
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E, (\lambda+\mu)\cdot x = \lambda\cdot x + \mu\cdot x$,
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E, \lambda\cdot(x+y) = \lambda\cdot x + \lambda\cdot y$,
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \lambda(\mu\cdot x) = (\lambda\mu)\cdot x$,
- $\forall x \in E, 1\cdot x = x$ *(invariance par l'élément neutre du corps).*

On appelle $\mathbb{K}$-espace vectoriel le triplet $(E, +, \cdot)$ et on dit que E a une structure d'espace vectoriel.

Remarque 5.2. Les lois induites peuvent être également notées $+, \cdot$.

5.1.1.2 Segment d'un espace vectoriel

Définition 5.3. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, x, y 2 éléments de E. On appelle segment d'extrémités x et y l'ensemble noté $[x; y]$ tel que $[x; y] = \{x + t\,(y - x); 0 \leqslant t \leqslant 1\}$.*

5.1.1.3 Partie convexe d'un espace vectoriel

Définition 5.4. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Une partie A de E est convexe si et seulement si $\forall x; y \in A$ le segment $[x; y]$ est contenu dans A.*

5.1.1.4 Espace vectoriel produit ou produit direct d'espace vectoriel

Proposition 5.5. *Soient I un ensemble non vide et $(E_i)_{i\in I}$, une famille d'espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Le produit de la famille $(E_i)_{i\in I}$ muni des deux lois $(x_i)_{i\in I} + (y_i)_{i\in I} = (x + y)_{i\in I}$, $\alpha(x_i)_{i\in I} = (\alpha x_i)_{i\in I}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.*

Définition 5.6. *Soient I un ensemble non vide et $(E_i)_{i\in I}$, une famille d'espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. L'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ formé par le produit de la famille $(E_i)_{i\in I}$ muni des deux lois $(x_i)_{i\in I} + (y_i)_{i\in I} = (x + y)_{i\in I}$, $\alpha(x_i)_{i\in I} = (\alpha x_i)_{i\in I}$ est appelé* ***espace vectoriel produit*** *ou produit direct des $(E_i)_{i\in I}$ et noté $\prod_{i\in I} E_i$.*

Note 5.7. Voir direct : dictionnaire maths-puf page 228, voir algèbre : atlas de mathémétiques page 85).

5.1.1.5 $\mathcal{F}(E, F)$ [mettre en exemple ?]

Proposition 5.8. *Soient E et F deux espaces vectoriels sur K. $\mathcal{F}(E, F)$ l'ensemble des applications de E dans F, muni des lois définies par $(f+g)(x) = f(x) + g(x), (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

5.1.2 Sous-espaces vectoriels

Définition 5.9. *Soit $(x_i)_{i\in I}$, une famille d'éléments d'un espace vectoriel E. On dit qu'un vecteur x de E est **combinaison linéaire des vecteurs** x_i s'il existe une famille $(\alpha_i)_{i\in I}$, de scalaires à support fini (i.e. nuls sauf sur une partie finie de I) telle que $x = \sum_{i\in I} \alpha_i x_i$.*

...

Définition 5.10. *Soient $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F une partie de E ($F \in \mathcal{P}(E)$) et $\oplus$, $\odot$ les lois induites par celles de E. On dit que $(F, \oplus, \odot)$ est un **sous $\mathbb{K}$-espace vectoriel** si et seulement si $(F, \oplus, \odot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Proposition 5.11. *Soient $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F une partie de E ($F \in \mathcal{P}(E)$) et $\otimes, \odot$ les lois induites par celles de E. On dit que $(F, \oplus, \odot)$ est un **sous $\mathbb{K}$-espace vectoriel** si et seulement si :*

- *$F \neq \varnothing$, (F n'est pas vide)*
- *$\forall x, y \in F, x \oplus \lambda \odot y \in F$, (F est stable par combinaison linéaire).*

...

Définition 5.12. *On dit qu'une partie E' d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ est un **sous-espace vectoriel** de E ssi E' est stable pour les deux lois de E et si, munie des lois induites, E' est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.*

Proposition 5.13.

1. *On démontre que toute partie non vide de E stable pour les deux lois est un sous-espace vectoriel de E.*
2. *L'intersection d'un ensemble de sous-espaces vectoriels de E est encore un sous-espace vectoriel de E.*
3. *Pour toute partie A de E, l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E contenant A possède un plus petit élément (au sens de la relation d'inclusion).*

Définition 5.14. *Le plus petit sous-espace vectoriel contenant une partie A de E (au sens de la relation d'inclusion) est appelé **sous-espace vectoriel engendré** par A et noté $[A]$.*

Proposition 5.15. *Lorsque $A \neq \varnothing$, $[A]$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A.*

Définition 5.16. *Lorsque $[A] = E$, on dit que A est **génératrice**.*

5.1.3 Applications linéaires

Définition 5.17. *Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps commutatif $\mathbb{K}$. On dit qu'une **application** u de E dans F est **linéaire** (**ou** que u est un **morphisme d'espaces vectoriels**) si, pour tout couple (x, y) d'éléments de E et pour tout élément α de $\mathbb{K}$, $u(x + \alpha y) = u(x) + \alpha u(y)$.*

Proposition 5.18. *Pour toute application linéaire u de E dans F et pour toute application linéaire v de F dans G, l'application composée $v \circ u$ est linéaire.*

Définition 5.19. *On dit qu'une application linéaire u de E dans F est un* ***isomorphisme*** *de E sur F ssi elle admet une application réciproque noté u^{-1} et si u^{-1} est linéaire.*

Proposition 5.20. *On démontre que toute application linéaire bijective est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

Définition 5.21.

- *Une application linéaire de E dans lui-même s'appelle* ***endomorphisme*** *de E.*
- *Un isomorphisme de E sur lui-même s'appelle* ***automorphisme*** *de E.*

Proposition 5.22. *Les automorphismes d'un espace vectoriel E constituent un sous-groupe du groupe des permutations de E..*

Définition 5.23. *Le groupe des automorphismes de E est appelé* ***groupe linéaire*** *de E et noté* $\mathrm{GL}(E)$.

Définition 5.24. *On note* $\boldsymbol{L(E,F)}$ *l'ensemble des applications linéaires de E dans F.*

Proposition 5.25. *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.*

i. $L(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E,F)$.

ii. Lorsque $E=F$, $L(E,F)=L(E)$ muni de l'addition et de la composition des applications. $L(E)$ est un anneau.

iii. Muni de la loi d'action précédente. $L(E)$ est une algèbre associative unitaire.

Définition 5.26. *L'image par une application linéaire f de E sur F d'un sous-espace vectoriel de E est appelée* ***image de f*** *et noté* $\mathrm{Im}(f)$. $\mathrm{Im}(f)=\{f(x); x\in E\}=f(E)$.

Définition 5.27. *L'image récriproque par une application linéaire f de E sur F du singleton formé de l'élément neutre de F pour l'addition est appelé* ***noyau de f*** *et noté* $\mathrm{Ker}(f)$. $\mathrm{Ker}(f)=\{x\in E; f(x)=0_F\}=f^{-1}(\{0_F\})$.

Proposition 5.28.

1. *Soit u une application linéaire de E dans F. L'image par u d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de F. En particulier,* $\mathrm{Im}(u)$ *est un sous-espace vectoriel de F.*
2. *L'image réciproque par u d'un sous-espace vectoriel de F est un sous-espace vectoriel de E. En particulier,* $\mathrm{Ker}(u)$ *est un sous-espace vectoriel de E.*
3. *u surjective* $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}(u)=F$, *u injective* $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}(u)=\{0_E\}$.

Exemple 5.29. Voir exemples d'applications linéaires : châpitre Matrice (matrice de passage et changement de base) ????

5.1.4 Quotient d'un espace vectoriel par un de ses sous-espaces vectoriels

Nous allons voir que les seuls sous-espaces vectoriels quotients sont les ensembles quotients définis par le quotient d'un espace vectoriel par un de ses sous-espaces vectoriels..

Proposition 5.30. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.*

i. Pour toute relation d'équivalence $\mathcal{R}$ dans E compatible avec la structure de E, la classe d'équivalence E' de 0 est un sous-espace vectoriel de E ; pour tout vecteur x de E, la classe de x est $x+E'=\{x+u; u\in E'\}$.

ii. La relation $\mathcal{R}(x,y)$ équivaut à la relation $x-y\in E'$.

iii. Réciproquement, pour tout sous-espace vectoriel E' de E, la relation binaire dans E définie par les couples (x,y) tels que $x-y\in E'$ est une relation d'équivalence compatible avec la structure de E.

iv. Muni des lois quotients, l'ensemble quotient est un espace vectoriel.

Définition 5.31. *On appelle **quotient de E par E'** et on note E/E' l'espace vectoriel formé par l'ensemble quotient pour une relation d'équivalence compatible avec les lois de E, muni des lois quotient.*

Proposition 5.32. *L'application canonique $\varphi\colon x\mapsto \bar{x}$ de E sur E/E' est linéaire, et* $\mathrm{Ker}\,(\varphi)=E'$.

5.1.5 Somme de sous-espaces vectoriels

Définition 5.33. *Soit $(E_i)_{i\in I}$, une famille de sous-espaces vectoriels de E. Le sous-espace vectoriel engendré par $\bigcup_{i\in I}E_i$ s'appelle **somme des sous-espaces vectoriels** E_i, et se note $\sum_{i\in I}E_i$.*

Proposition 5.34. *C'est l'ensemble des vecteurs de E de la forme $\sum_{i\in I}x_i$, où $(x_i)_{i\in I}$ est un élément à support fini du produit $\prod_{i\in I}E_i$.*

Remarque 5.35. Lorsque $I=\{1,2\}$, la somme de E_1 et de E_2 se note E_1+E_2.

5.1.6 Somme directe de sous-espaces vectoriels

Définition 5.36. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F_1,F_2 deux sous $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de E.*
F_1 et F_2 sont en somme directe si et seulement si $F_1\cap F_2=\{0\}$.

Proposition 5.37. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F_1,F_2 deux sous $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de E.*
On dit que F_1 et F_2 sont en somme directe si et seulement si tout élément de F_1+F_2 s'écrit comme somme unique d'un élément de F_1 et d'un élément de F_2 :
Autrement dit $\forall x\in F_1+F_2, \exists!(x_1,x_2)\in F_1\times F_2; x=x_1+x_2$.
Dans ce cas F_1+F_2 s'écrit $F_1\oplus F_2$ et on dit que $F_1\oplus F_2$ est la somme directe de F_1 et F_2.

....

Définition 5.38. *La somme $\sum_{i\in I}E_i$ d'une famille $(E_i)_{i\in I}$, de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E est dite directe, et notée $\bigoplus_{i\in I}E_i$, si, pour tout élément i de I, $E_i\cap\sum_{j\neq i}E_j=\{0\}$.*

Proposition 5.39. *Cela équivaut à dire que, pour tout élément $x\in\sum_{i\in I}E_i$, la décomposition de x sous la forme $x=\sum_{i\in I}x_i$ est unique.*

5.1.6.1 Sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Définition 5.40. *On dit que deux **sous-espaces vectoriels** E' et E'' sont **supplémentaires** dans E si leur somme est directe et égale à E, $E=E'\oplus E''$.*
(Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F_1,F_2 deux sous $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de E.
Deux espaces vectoriels sont dits supplémentaires si et seulement si leur somme directe est égale à E : $E=F_1\oplus F_2$ autrement dit $E=F_1+F_2$ et $F_1\cap F_2=\{0\}$.).

Proposition 5.41. *Cela équivaut à dire que tout vecteur x de E se décompose d'une manière et d'une seule sous la forme $x=x'+x'', x'\in E', x''\in E''$.*

5.1.6.2 Projecteur

Définition 5.42. *Les applications $P_{E'}: x \mapsto x'$, $P_{E''}: x \mapsto x''$ s'appellent projecteur sur E' parallèlement à E'' et projecteur sur E'' parallèlement à E'. L'image d'un point x de E est appelé projection de x sur resp. E' et E''.*

Proposition 5.43.

1. $\mathrm{Im}(P_{E'}) = E'$,
2. $\mathrm{Ker}(P_{E'}) = E''$,
3. $P_{E'}^2 = P_{E'}$,
4. $P_{E''}^2 = P_{E''}$,
5. $P_{E'}P_{E''} = P_{E''}P_{E'} = 0$
6. $P_{E'} + P_{E''} = I_E$.
7. *Réciproquement, soit u un endomorphisme (pourquoi un endomorphisme ? une application linéaire n'est pas suffisante !?) de E tel que $u^2 = u$. Alors les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont supplémentaires dans E, et u n'est autre que le projecteur sur $\mathrm{Im}(u)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(u)$. C'est pourquoi les endomorphismes idempotents s'appellent projecteurs*
8. *Soit plus généralement $(E_i)_{i\in I}$, une famille de sous-espaces vectoriels de E dont E est somme directe. Tout vecteur x de E se décompose d'une manière et d'une seule sous la forme $x = \sum_{i\in I} x_i, x_i \in E_i$ où la famille $(x_i)_{i\in I}$ est à support fini. Pour tout élément i de I, l'application $P_i: x \mapsto x_i$ est un projecteur, dont l'image est E_i et le noyau $\bigoplus_{j\neq i} E_j$: $P_i^2 = P_i, P_iP_j = 0$, si $i \neq j$, $\sum_{i\in I} P_i = I_E$.*
9. *Soient E_1 un sous-espace vectoriel de E et E_2 un supplémentaire de E_1. La restriction à E_2 de l'application canonique de E sur E/E_1 est un isomorphisme. Soit E_2' un autre supplémentaire de E_1. Le projecteur sur E_2' parallèlement à E_1 induit un isomorphisme de E_2 sur E_2'.*

5.1.7 Formes linéaires et dual d'un espace vectoriel

5.1.7.1 Formes linéaires

Définition 5.44. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Les applications linéaires de E dans $\mathbb{K}$ s'appellent **formes linéaires** sur E. La valeur d'une forme linéaire f^* sur un vecteur x se note $< f^*, x >$.*

5.1.7.2 Dual d'un espace vectoriel

Définition 5.45. *L'espace vectoriel $L(E, K)$ i.e. l'ensemble des applications (formes) linéaires de E dans $\mathbb{K}$ s'appelle **dual** de E et se note E^*.*

5.1.7.3 Orthogonalité entre un espace vectoriel et son dual, orthogonal et antéorthogonal

Définition 5.46. *On dit qu'un vecteur x et une forme linéaire f^* sont **orthogonaux** si $< y^*, x > = 0$.*

Définition 5.47. *On dit qu'une **partie A de E** et une **partie B du dual E^*** sont **orthogonales** ssi $\forall x \in A, \forall f^* \in B, < f^*, x > = 0$.*

Définition 5.48. *L'ensemble des formes linéaires orthogonales à A est, appelé **orthogonal** de A et noté $A^\perp$.*

Proposition 5.49. *L'ensemble des formes linéaires orthogonales à A est un sous-espace vectoriel de E^*.*

Définition 5.50. *L'ensemble des vecteurs orthogonaux à une partie B de E^* est appelé* ***antéorthogonal*** *de B et noté $B^\top$.*

Proposition 5.51. *L'ensemble des vecteurs orthogonaux à une partie B de E^* est un sous-espace vectoriel de E.*

Proposition 5.52.

1. $\forall A \in \mathcal{P}(E), A \subset (A^\perp)^\top, \forall B \in \mathcal{P}(E^*), B \subset (B^\top)^\perp$.
2. *Pour tout sous-espace vectoriel E_1 de E, $(E_1^\perp)^\top = E_1$.*

5.1.7.4 Transposée d'une application linéaire

Proposition 5.53. *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et u une application linéaire de E dans F. il existe une application linéaire g_u de F^* dans E^* et une seule, telle que $\forall x \in E$, $\forall y^* \in F^*, < g_u(y^*), x > = < y^*, u(x) >$.*

Définition 5.54. *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et u une application linéaire de E dans F. On appelle* ***transposée*** *de u et on note ${}^t u$, l'unique application linéaire de F^* dans E^* telle que $\forall x \in E, \forall y^* \in F^*, < {}^t u(f^*), x > = < f^*, u(x) >$.*

Proposition 5.55.

1. *L'application ${}^t u$ n'est autre que $f^* \mapsto f^* \circ u$.*
2. *L'application $u \mapsto {}^t u$ est linéaire et injective.*
3. *De plus, ${}^t I_E = I_{E^*}$.*
4. $\forall u \in L(E,F), \forall v \in L(F,G), {}^t(v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v$,
5. $\mathrm{Ker}({}^t u) = [\mathrm{Im}(u)]^\perp, \mathrm{Im}({}^t u) = [\mathrm{Ker}\,(u)]^\perp$,
6. $\mathrm{Im}(u) = [\mathrm{Ker}({}^t u)]^\top, \mathrm{Ker}(u) = [\mathrm{Im}({}^t u)]^\top$,
7. *u surjective $\Leftrightarrow$ ${}^t u$ injective,*
8. *u injective $\Leftrightarrow$ ${}^t u$ surjective,*
9. *u bijective $\Leftrightarrow$ ${}^t u$ bijective . Dans ce dernier cas, $({}^t u)^{-1} = {}^t(u^{-1})$.*

5.1.7.5 Bidual

Définition 5.56. *Le dual du dual E^* de E s'appelle bidual de E et se note E^{**}.*

Proposition 5.57. *Pour tout élément x de E, l'application $\chi(x)$: $f^* \mapsto < f^*, x >$ est une forme linéaire sur E^*.*

Définition 5.58. *On appelle* ***injection canonique de E dans E^{**}****, l'application $\chi : x \mapsto \chi(x)$*

Proposition 5.59.

1. *L'application $\chi : x \mapsto \chi(x)$ est linéaire et injective ;*
2. $\forall x \in E, \forall f^* \in E^*, < \chi(x), f^* >_{E^*} = < f^*, x >_E$.

5.1.8 Familles génératrices, familles libres

5.1.8.1 Familles génératrices

Définition 5.60. *Soit $(x_i)_{i \in I}$, une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$. On dit que cette* ***famille*** *est* ***génératrice*** *si la partie de E constituée des vecteurs x_i est génératrice ; autrement dit, tout vecteur de E est combinaison linéaire des vecteurs x_i.*

5.1.8.2 Famille libre

Définition 5.61. *Soit $(x_i)_{i\in I}$, une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$. On dit que cette* ***famille*** *est* ***libre*** *si toute relation linéaire entre les vecteurs x_i est triviale ; autrement dit, pour toute famille $(\alpha_i)_{i\in I}$, de scalaires à support fini, $\sum_{i\in I}\alpha_i x_i = 0 \Rightarrow \forall i \in I, \alpha_i = 0$.*

5.1.8.3 Base et composant d'un vecteur

Définition 5.62. *Soit $(x_i)_{i\in I}$, une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$.*

i. On dit que cette famille est une ***base*** *si elle est libre et génératrice ; autrement dit, pour tout vecteur x de E, il existe une famille $(\alpha_i)_{i\in I}$, de scalaires à support fini et une seule telle que $x = \sum_{i\in I}\alpha_i x_i$.*

ii. Pour tout élément i de I, le scalaire α_i s'appelle composant de x relatif à x_i.

5.1.8.4 Parties libres

Définition 5.63. *Soit S une partie de E. On dit que la* ***partie*** *S est* ***libre*** *si la famille de vecteurs de E définie par l'injection canonique de S dans E est libre.*

5.1.8.5 Parties basiques

Définition 5.64. *On dit que la* ***partie*** *S est* ***basique*** *si elle est libre et génératrice.*

5.2 Dimension, rang et codimension

5.2.1 Dimension d'un espace vectoriel

Proposition 5.65. *Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, toutes les bases sont équipotentes.*

Définition 5.66. *On appelle* ***dimension*** *d'un* ***$\mathbb{K}$-espace vectoriel****, le cardinal d'une de ses bases, on la note $\dim_{\mathbb{K}}(E)$ ou $\dim(E)$.*

Définition 5.67. *Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est dit de dimension finie (resp. infinie) ssi ses bases ont un cardinal fini (resp. infini).*

Proposition 5.68. *Soit B une partie basique finie de E à n éléments.*

i. Alors toute partie libre L de E est finie et le nombre p d'éléments de L est inférieur à n.

ii. De plus, on peut compléter L en une partie basique de E par adjonction de $n - p$ éléments convenablement choisis dans B.

Proposition 5.69. *Un espace vectoriel E est de dimension finie si et seulement s'il existe une partie génératrice finie de E. Cela revient à dire qu'il existe une partie basique finie de E.*

5.2.2 Rang d'une partie d'un espace vectoriel

Définition 5.70. *Soit S une partie d'un espace vectoriel E. On dit que S est de* ***rang fini*** *si $[S]$ est de dimension finie.*

Définition 5.71. *On appelle alors* ***rang*** *de S et on note $\operatorname{rang}(S)$ la dimension de $[S]$.*

Proposition 5.72.

1. *Si E est de dimension finie, S est de rang fini et $\operatorname{rang}(S) \leqslant \dim E$.*
2. *Si S est finie, S est de rang fini et $\operatorname{rang}(S) \leqslant \operatorname{Card}(S)$ alors S est libre si et seulement si $\operatorname{rang}(S) = \operatorname{Card}(S)$.*

3. *Si S est de rang fini, alors, pour tout vecteur x de E, $S' = S \cup \{x\}$ est de rang fini :*
   - $\operatorname{rang}(S') = \operatorname{rang}(S)$, *si* $x s \in [S]$,
   - $\operatorname{rang}(S') = \operatorname{rang}(S) + 1$, *si* $x \notin [S]$.

5.2.3 Codimension d'un sous-espace vectoriel

Définition 5.73. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et E' un sous-espace vectoriel de E. On appelle codimension de E' dans E et on note* $\operatorname{codim}_E(E')$ *la dimension l'espace quotient E/E'.*

Définition 5.74. *Soit E un espace vectoriel. On dit qu'un* ***sous-espace vectoriel*** *E' de E est de* ***codimension finie*** *dans E si l'espace vectoriel quotient E/E' est de dimension finie.*

Proposition 5.75.

1. *Pour que E' soit de codimension finie dans E, il faut et il suffit que E' admette un sous-espace vectoriel supplémentaire de dimension finie. Alors, pour tout supplémentaire E'' de E' dans E,* $\dim E'' = \operatorname{codim}_E E'$.
2. *Si E est de dimension finie, tout sous-espace vectoriel E' de E est de dimension finie et de codimension finie dans E, et* $\dim E' + \operatorname{codim}_E E' = \dim E$, $E' = E \Leftrightarrow \dim E' = \dim E$.
3. *Soient E un espace vectoriel, E' et E'' deux sous-espaces vectoriels de E de dimension finie. Alors $E' + E''$ et $E' \cap E''$ sont de dimension finie et* $\dim(E' + E'') + \dim(E' \cap E'') = \dim E' + \dim E''$ *(relation de Grassmann).*

5.3 Droite, plan et hyperplan vectoriels

Définition 5.76. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et S un sous-espace vectoriel de E.*

- *On dit que S est une droite vectorielle ssi il est de dimension* 1.
- *On dit que S est un plan vectoriel ssi il est de dimension* 2.

Définition 5.77. *Les sous-espaces vectoriels de codimension 1 dans E s'appellent* ***hyperplans*** *de E.*

Proposition 5.78. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et H un sous-espace vectoriel de E. H est un hyperplan si et seulement s'il vérifie l'une des propositions équivalentes suivantes :*

i. Il existe un droite vectorielle D telle que D et H soient supplémentaire dans E.

ii. Il existe une forme linéaire φ non nulle dont H est le noyau : $\exists \varphi \in E^* \backslash \{0\}; H = \operatorname{Ker}(\varphi)$.

Démonstration. Voir livre Monier, page 4 Tome 6. □

Définition 5.79. *L'application $\varphi(x) = 0$ s'appelle* ***équation de l'hyperplan****.*

Proposition 5.80. *Soit H un hyperplan de E, $\varphi \in E^* \backslash \{0\}$ tels que $H = \operatorname{Ker}(\varphi)$ et $\psi \in E^* \backslash \{0\}$, on a :*
$H = \operatorname{Ker}(\psi) \Leftrightarrow (\exists \alpha \in K - \{0\}; \psi = \alpha\varphi)$.

Remarque 5.81. Un hyperplan donné n'admet à un coefficient près qu'une seule équation.

Proposition 5.82. *Si H est un hyperplan de E alors $\forall x_0 \in E - H, H \oplus (\mathbb{K}x_0) = E$. Autrement dit H hyperplan et D droite vectorielle et si $H \cap D = \{\vec{0}\}$ alors $H \oplus D = E$, autrement dit H et D sont supplémentaire dans E.*

Proposition 5.83. *Si E est fini, les hyperplans sont les sous-espaces vectoriels de dimension $n-1$.*

5.4 Applications linéaires et multilinéaires en dimension finie

5.4.1 Dimension de $L(E, F)$

Proposition 5.84. *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{K}$, $B = (e_j)_{j\in J}$ une base de E et $C = (f_i)_{i\in I}$ une base de F. Pour tout élément $(i, j) \in I \times J$, soit u_{ij} l'unique application linéaire de E dans F telle que $u_{ij}(e_k) = 0$ si $k \neq j$, $u_{ij}(e_j) = f_i$.*

i. Les applications linéaires u_{ij} constituent une base de l'espace vectoriel $L(E, F)$, dite associée aux bases B et C.

ii. En particulier, $L(E, F)$ est de dimension finie, et $\dim L(E, F) = (\dim E) \times (\dim F)$.

Définition 5.85. *Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $B = (e_j)_{j\in J}$ une base de E. Pour tout élément j de J, l'unique forme linéaire e_j^* sur E telle que, pour tout élément k de J, $< e_j^*, e_k > = \delta_{jk}$ s'appelle* ***$j^{\text{ième}}$ forme linéaire coordonnée****.*

Proposition 5.86.

1. *La famille $(e_j^*)_{j\in J}$, est libre ;*
2. *Pour que ce soit une base de E^*, il faut et il suffit que E soit de dimension finie.*

Définition 5.87. *Cette base s'appelle* ***base duale*** *de B et se note B^*.*

Proposition 5.88.

1. *En particulier, pour que E^* soit de dimension finie, il faut et il suffit que E soit de dimension finie. Alors $\dim E^* = \dim E$.*
2. *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Si E et F sont isomorphes et si F est de dimension finie, alors E est de dimension finie et $\dim E = \dim F$. Réciproquement, si E et F sont de dimension finie et si leurs dimensions sont égales, alors E et F sont isomorphes.*

5.4.2 Rang d'une application linéaire

Définition 5.89. *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et u une application linéaire de E dans F. On dit que u est de rang fini si $\text{Im}\,(u)$ est de dimension finie. La dimension de $\text{Im}\,(u)$ s'appelle alors rang de u et se note $\text{rang}\,(u)$.*

Proposition 5.90.

1. *Pour que u soit de rang fini, il faut et il suffit que $\text{Ker}\,(u)$ soit de codimension finie dans E. Dans ce cas, $\text{rang}\,(u) = \dim \text{Im}\,(u) = \text{codim}_E \text{Ker}\,(u)$.*
2. *Si E est de dimension finie, u est de rang fini et $\text{rang}\,(u) = \dim E - \dim \text{Ker}\,(u)$.*
3. *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{K}$, ayant même dimension n, et u un élément de $\mathcal{L}(E, F)$: u isomorphisme $\Leftrightarrow$ u injectif $\Leftrightarrow$ u surjectif $\Leftrightarrow$ $\text{rang}\,(u) = n$.*
4. *En particulier, soient E un espace vectoriel de dimension n et u un élément de $\mathcal{L}(E)$: u automorphisme $\Leftrightarrow$ u injectif $\Leftrightarrow$ u surjectif $\Leftrightarrow$ $\text{rang}\,(u) = n$.*

5.4.3 Dualité en dimension finie

Proposition 5.91. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie.*

1. *L'injection canonique de E dans E^{**} est alors un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

2. *Il s'ensuit que l'application* $B \mapsto B^*$ *est une bijection de l'ensemble des bases de* E *sur l'ensemble des bases de* E^*.
3. *Pour tout sous-espace vectoriel* E_1 *de* E *:* $\dim E_1 + \dim E_1^{\perp} = \dim E$ *et* $(E_1^{\perp})^{\top} = E_1$.
4. *Pour tout sous-espace vectoriel* G *de* E^* *:* $\dim G + \dim G^{\top} = \dim E$ *et* $(G^{\top})^{\perp} = G$.
5. *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels et* u *une application linéaire de* E *dans* F. *Pour que* u *soit de rang fini, il faut et il suffit que* ${}^t u$ *le soit. Alors rang* $({}^t u) = \text{rang}\,(u)$.

5.4.4 Applications multilinéaires

5.4.4.1 Définition et propriété générale

Définition 5.92. *Soit* p *un entier naturel non nul. Soient* $E_1, E_2, ..., E_p$ *des* $\mathbb{K}-$ev.
Soit φ *une application* $\varphi : E_1 \times ... \times E_p \longrightarrow F$.

- φ *est* ***dite p-linéaire (ou mutlilinéaire)*** *si et seulement si :*
  φ *est linéaire par rapport à chaque place (ou : variable), c'est à dire :*
  $\varphi(x_1, ..., \lambda x_i + y_i, ..., x_p) = \lambda\varphi(x_1, ..., x_i, ..., x_p) + \varphi(x_1, ..., y_i, ..., x_p)$.
- *Si de plus* $F = \mathbb{K}$, *on dit que* φ *est une* ***forme p-linéaire***.

Exemple 5.93.

1. Si p=1, φ n'est autre qu'une application linéaire.
2. L'application nulle est p-linéaire.
3. Le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2$,
   $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) & \mapsto & x_1 y_1 + x_2 y_2 \end{array} \right.$, est une forme 2-linéaire (dite bilinéaire).
4. Le produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$
   $\Phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^{333} \\ ((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) & \mapsto & (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1) \end{array} \right.$, est une application bilinéaire.

Proposition 5.94. *L'ensemble* $\mathcal{L}_p(E, ..., E; F)$ *des applications p-linéaires de* $E_1 \times ... \times E_p$ *dans* F *est un* $\mathbb{K}-$ev.

5.4.4.2 Applications multilinéaires alternées

Définition 5.95. *Soit* $\varphi : E^p \longrightarrow F$ *une application p-linéaire.*

- φ *est dite* ***alternée*** *si et seulement si pour tout p-uplet* $(x_1, ..., x_p) \in E^p$, *elle vérifie une des deux propriétés équivalentes suivantes :*
  i. pour tout couple $(i, j) \in \mathbb{N}_p^2$ *tel que* $i \neq j$ *:*
  $(x_i = x_j) \Rightarrow (\varphi(x_1, ..., x_p) = 0)$.
  ii. pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ *:*
  $\varphi(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma)\varphi(x_1, ..., x_p)$
- *Si de plus* $F = \mathbb{K}$, *on dit que* φ *est une* ***forme p-linéaire alternée***.

Autrement dit, φ est alternée si et seulement si l'image de tout p-uplet contenant au moins une répétition est nulle.

Proposition 5.96. *Soit* $\varphi : E^p \longrightarrow F$ *une application p-linéaire.*
Si p-uplet $(x_1, ..., x_p) \in E^p$ *est lié, alors* $\varphi(x_1, ..., x_p) = 0$.

Corollaire 5.97. *Si $p > \dim(E)$, la seule application p-linéaire et alternée de E^p dans F est l'application nulle.*

Proposition 5.98. *Soit $\varphi : E^p \longrightarrow F$ une application p-linéaire non nulle.*
Pour toute base $\mathcal{B}$ de E^p on a $\varphi(\mathcal{B}) \neq 0$.

5.4.5 Déterminants

5.4.5.1 Déterminant d'une famille de vecteurs

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{K}-$ev de dimension n.

Définition 5.99. *L'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E est noté $\Lambda_n(E)$.*

Proposition 5.100. *$\Lambda_n(E)$ est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension 1.*

Remarque 5.101. Il nous reste qu'à trouver une base de cet space, i.e. une forme n-linéaire alternée γ. Dans ce cas tout élément de $\Lambda_n(E)$ sera le produit de γ par un élément de $\mathbb{K}$.

Note 5.102. si $\begin{array}{l} V_1 = 2\,e_1 + 3\,e_2 + 5\,e_3 \\ V_2 = 3\,e_1 + 8\,e_2 + 1\,e_3 \\ V_3 = 1\,e_1 + 2e_2 + 4\,e_3 \end{array}$?

Définition 5.103. *Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E.*
On note $\det_{\mathcal{B}}$ l'application définie par :

$$\det_{\mathcal{B}} : \left| \begin{array}{ccc} E^n & \to & \mathbb{K} \\ (V_1, ..., V_n) & \mapsto & \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} ... a_{\sigma(n)n} \end{array} \right. ,$$

où, $\forall j \in \mathbb{N}_n$, $(a_{ij})_{i_{j \in \mathbb{N}_n}}$ sont les composantes de V_j dans $\mathcal{B}$: $V_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \times e_i$.

- *L'image $\det_{\mathcal{B}}(V_1, ..., V_n) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} ... a_{\sigma(n)n}$ de $(V_1, ..., V_n)$ est appelée **déterminant de $(V_1, ..., V_n)$ dans la base $\mathcal{B}$.***

Proposition 5.104. *On notera $\beta(E)$ l'ensemble des bases de E, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ 2 éléments de $\beta(E)$.*

1. *$\det_{\mathcal{B}}$ est une base de $\Lambda_n(E)$.*
   Autrement dit tout élément de $\Lambda_n(E)$, est proportionnel à $\det_{\mathcal{B}}$.
2. *$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 0$.*
3. *$\forall \varphi \in \Lambda_n(E)$, $\forall S \in E^n$, $\varphi(S) = \varphi(\mathcal{B}) \times \det_{\mathcal{B}}(S)$.*
4. *$\forall S \in E^n$, $\det_{\mathcal{B}'}(S) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \times \det_{\mathcal{B}}(S)$.*
5. *$\forall S \in E^n$, $(S \text{ est liée}) \Leftrightarrow (\det_{\mathcal{B}}(S) = 0)$.*

5.4.5.2 Déterminant d'un endomorphisme

Proposition 5.105. Pour tout f endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ *et toute forme n-linéaire alternée φ de $\Lambda_n(E)$ il existe un unique élément α de $\mathbb{K}$ tel que :*

$$\varphi \circ (f; ...; f) = \alpha\varphi \text{ où } \varphi \circ (f \times ... \times f) : \left| \begin{array}{ccc} E^n & \to & \mathbb{K} \\ (V_1, ..., V_n) & \mapsto & \varphi(f(V_1), ..., f(V_n)) \end{array} \right. .$$

Définition 5.106. *Cet élément est appelé déterminant de f, et est noté $\det(f)$.*

ainsi $\varphi \circ (f \times ... \times f) = \det(f) \times \varphi$.

Proposition 5.107. *$\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall (f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$, $\forall \mathcal{B} \in \beta(E)$ avec $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ et $(V_1, ..., V_n) \in E^n$:*

1. *$\varphi(f(V_1), ..., f(V_n)) = \det(f) \times \varphi(V_1, ..., V_n)$.*

2. $\det_{\mathcal{B}}(f(V_1),...,f(V_n)) = \det(f) \times \det_{\mathcal{B}}(V_1,...,V_n)$
3. $\det(f) = \det_{(e_1,...,e_n)}(f(e_1),...,f(e_n))$.
4. $\det(\mathrm{Id}_E) = 1$.
5. $\det(\alpha \times f) = \alpha^n \times \det(f)$.
6. $\det(f \circ g) = \det(f) \times \det(g)$.
7. $(f \in \mathrm{GL}(E)) \Leftrightarrow (\det(f) \neq 0)$.
8. *Si* $f \in \mathrm{GL}(E)$ *alors* $\det(f^{-1}) = \det(f)^{-1}$.

5.4.5.3 Application : Orientation d'un espace vectoriel de dimension finie

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un $\mathbb{R}-$ev de dimension n. On note $\beta(E)$ l'ensemble des bases de E.

Définition 5.108. *On dit que deux bases $\mathcal{B}$,$\mathcal{B}'$ de E sont :*

- *de* ***même sens*** *si et seulement si :* $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$.
- *de* ***sens contraires*** *si et seulement si :* $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') < 0$.

Remarque 5.109.

1. On montre que la relation $\mathcal{R}$ "est de même sens que " définie par :
   $\forall \mathcal{B}, \mathcal{B}' \in \beta(E), (\mathcal{B}\mathrm{RB}') \Leftrightarrow (\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0)$ est une relation d'équivalence.
2. On montre que $\beta(E)$ admet exactement deux classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$.

D'où la définition suivante :

Définition 5.110.

- *On appelle* ***orientation*** *de E le choix, dans l'ensemble $\beta(E)$ des bases de E, de l'une des deux classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$.*
- *Les bases de cette classe sont alors dites* ***directes ou positives*** *les autres* ***indirectes ou négatives****.*
- *Le couple $(E, \beta(E))$ formé d'un $\mathbb{R}$-e.v. et d'une orientation est appelé $\mathbb{R}$-e.v.* ***orienté****.*

Remarque 5.111.

1. Si $(a_1,...,a_i,...,a_n)$ et $(a_1,...,-a_i,...,a_n)$ sont deux bases d'orientations différentes i.e. de signes contraires.
2. De même pour $(a_1,...,a_i,...,a_j,...,a_n)$ et $(a_1,...,a_j,...,a_i,...,a_n)$

Définition 5.112. *Soit $f \in \mathrm{GL}(E)$. On dit que :*

- *f conserve l'orientation (ou est direct) si et seulement si :* $\det(f) > 0$.
- *f change l'orientation (ou est indirect) si et seulement si :* $\det(f) < 0$.

Proposition 5.113. *Soit $f \in \mathrm{GL}(E)$.*

1. *Si f conserve l'orientation, alors, pour toute base $\mathcal{B}$ de E, $f(\mathcal{B})$ est une base de même sens que $\mathcal{B}$.*
2. *Si f change l'orientation, alors, pour toute base $\mathcal{B}$ de E, $f(\mathcal{B})$ est une base de sens contraire de $\mathcal{B}$.*

Proposition 5.114. *Soit $\varphi : E^p \longrightarrow \mathbb{R}$ une application p-linéaire non nulle.*
Pour toutes bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ de E^p on a $\mathcal{B}\,\mathrm{BR}\,\mathcal{B}' \Leftrightarrow \varphi(\mathcal{B}) \times \varphi(\mathcal{B}') > 0$*, autrement ils sont de même signe.*

5.5 Algèbre

5.5.1 Définition

Définition 5.115. *Soient* $\mathbb{K}$ *un corps commutatif,* E *un ensemble, une loi de composition interne notée* $+$ *, une loi externe (loi d'action) notée* $\cdot$ *:* $\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{K}\times E & \to & E\\ (\lambda,x) & \mapsto & \lambda\cdot x\end{array}\right.$ *et une loi de composition interne notée* $\times$ *telles que :*

- $(E,+,\cdot)$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel,*
- $\times$ *est distributive sur* $+$ *,*
- $\forall\lambda\in\mathbb{K},\forall x,y\in E,\lambda\cdot(x\times y)=(\lambda\cdot x)\times y=x\times(\lambda\cdot y)$.

On appelle **K-*algèbre*** *le quadruplet* $(E,+,\cdot,\times)$ *et on dit que* E *a une structure d'algèbre.*

Définition 5.116. *Une* $\mathbb{K}$*-algèbre* $(E,+,\cdot,\times)$ *est dite : .*

- ***associative*** *ssi* $\times$ *est associative,*
- ***commutative*** *ssi* $+$ *est commutative,*
- ***unitaire*** *(ou* ***unifère****) ssi* E *contient un élément neutre pour* $\times$ *.*

Remarque 5.117. Une algèbre sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ muni d'une application bilinéaire de $E\times E$ dans E.

Définition 5.118. *On dit que* ***l'algèbre*** E *est de* ***dimension finie*** *sur* K *si l'espace vectoriel sous jacent l'est.*

Définition 5.119. *On appelle* ***base de l'algèbre*** E *une base de l'espace vectoriel sous-jacent.*

Proposition 5.120. *Munie des deux lois de composition, une algèbre associative est un anneau.*

Définition 5.121. *On dit alors qu'un élément de* E *est inversible (resp. un diviseur de* 0*) s'il est inversible (resp. un diviseur de* 0*) dans l'anneau sous jacent.*

Proposition 5.122. *Si l'algèbre* E *est associative, unitaire et non réduite à* $\{0\}$*, l'application* $\alpha\mapsto\alpha\cdot e$ *est un isomorphisme de* K *sur une droite de* E.

Remarque 5.123. On identifie souvent K à $K\cdot e$ par cette application ; on note alors 1 l'élément-unité de E.

5.5.2 Sous-algèbre

Définition 5.124. *Soient* $(E,+,\cdot,\times)$ *une* $\mathbb{K}$*-algèbre,* F *une partie de* E $(F\in\mathcal{P}(E))$ *et* $\oplus,\odot,\otimes$ *les lois induites par celles de* E*. On dit que* $(F,\oplus,\odot,\otimes)$ *est une* ***sous*** $\mathbb{K}$***-algèbre*** *si et seulement si* $(F,\oplus,\odot,\otimes)$ *est une* $\mathbb{K}$*-algèbre.*

Définition 5.125. *Si l'algèbre* E *est unitaire, les sous-algèbres de* E *contenant l'élément unité de* E *sont appelées sous-algèbres unitaires de* E.

Définition 5.126. *On dit qu'une sous-algèbre unitaire E' de* E *est* ***pleine*** *si et seulement si, pour tout élément* x *de E' inversible dans E, l'inverse de* x *appartient à E'.*

Proposition 5.127.
Pour qu'une partie F *d'une algèbre* E *soit une sous-algèbre de* E*, il faut et il suffit que* F *soit un sous-espace vectoriel de* E *stable pour la multiplication induite.*

Soient $(E, +, \cdot, \times)$ *une* $\mathbb{K}$*-algèbre,* F *une partie de* E $(F \in \mathcal{P}(E))$ *et* $\oplus, \odot, \otimes$ *les lois induites par celles de* E*. On dit que* $(F, \oplus, \odot, \otimes)$ *est une* ***sous*** $\mathbb{K}$***-algèbre*** *si et seulement si :*

- $(F, \oplus, \odot)$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel,*
- $\forall x, y \in F, x \otimes y \in F$*, (*$F$ *est stable pour la troisième loi).*

Autrement dit

- $F \neq \varnothing$*, (*F *n'est pas vide)*
- $\forall x, y \in F, x \oplus \lambda \odot y \in F$*, (*$F$ *est stable par combinaison linéaire).*
- $\forall x, y \in F, x \otimes y \in F$*, (*$F$ *est stable pour la troisième loi).*

Proposition 5.128. *Lorsque l'algèbre* E *est unitaire, pour que* F *soit une sous-algèbre unitaire de* E*, il faut et il suffit que* $K \cdot e$ *soit contenu dans* F *et que* F *soit stable pour les deux lois de composition.*

Remarque 5.129. Les lois induites peuvent être également notées $+, \cdot, \times$.

Chapitre 6

Espaces Vectoriels, Algèbres Normés et leur topologie

6.1 Espace vectoriel normé

On prendra $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Est-il nécessaire d'avoir $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$? Cela semble le cas, sinon $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ n'a pas de sens.

6.1.1 Norme, Espace vectoriel normé

Définition 6.1. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.*

Une application [nommée par exemple] (n) est une ***norme*** *et sera notée $\|.\|_E$ si et seulement si elle vérifie les propriétés suivantes :*

1. $n : E \to \mathbb{R}^+$ *((n) est définie sur E et à valeur(s) dans $\mathbb{R}^+$)*
2. $(n(x) = 0) \Rightarrow (x = 0)$ *(séparation),*
3. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, n(\lambda \times x) = |\lambda| \times n(x)$ *(homogénéité),*
4. $\forall (x, y) \in E^2, n(x + y) \leqslant n(x) + n(y)$ *(inégalité triangulaire).*

Les propriétés précédentes s'écrivent alors :

1. $\forall x \in E, \|x\|_E \geqslant 0$.
2. $(\|x\|_E = 0) \Rightarrow (x = 0)$,
3. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \|\lambda \times x\|_E = |\lambda| \times \|x\|_E$,
4. $\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\|_E \leqslant \|x\|_E + \|y\|_E$.

Remarque 6.2. Pour la définition, on ajuste $(\|x\| = 0) \Rightarrow (x = 0)$ mais en fait $(\|x\| = 0) \Leftrightarrow (x = 0)$.

Définition 6.3. *On appelle* ***espace vectoriel normé****, le couple $(E, \|.\|_E)$ formé d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et d'une norme $\|.\|_E$.*

Note 6.4. Dans un espace normé a-t-on nécessairement l'inégalité de Cauchy Schwarz. Je pense que non, car pour l'inégalité de Cauchy Schwarz, il faut que la norme soit une norme associée à un produit scalaire. Autrement dit, elle doit posséder la propriété supplémentaire : par exemple la linéarité de la forme fshc ou fbsr associée.

Proposition 6.5. *Soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.*

L'application d: $\left| \begin{array}{ccc} (E)^2 & \to & \mathbb{R}^+ \\ (x, y) & \mapsto & \|x - y\|_E \end{array} \right.$ *est une distance.*

Définition 6.6. *Soit $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.*

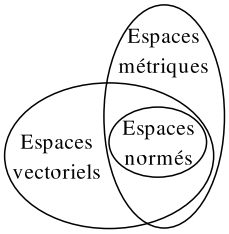
La distance d définie sur E, d: $\left| \begin{array}{ccc} (\mathbb{R})^2 & \to & \mathbb{R}^+ \\ (x, y) & \mapsto & \|x - y\|_E \end{array} \right.$ *est appelée* ***distance associée à la norme*** *de E. C'est la distance usuelle de E.*

Proposition 6.7. *Soient $(E, \|.\|_E)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et (d) sa distance associée, elle possède les deux propriétés suivantes :*

1. $\|x\|_E = d(x; O)$

2. $\forall x, y \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}, d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y)$ *(homogénéité),*
3. $\forall x, y, z \in E, d(x+z, y+z) = d(x, y)$ *(invariance par translation).*

Remarque 6.8. On vient de voir qu'une norme permet toujours de définir une distance. Autrement dit, un espace normé est aussi un espace métrique (conséquence : il possède toutes les propriétés des espaces métriques). Mais une distance peut-elle toujours être définie par une norme ? Autrement dit un espace métrique est-il également un espace normé. La réponse est non ! Sauf si la distance vérifie les 2 lois précédentes (2) et (3) homogénéité et invariance par translation. Il faut également que l'espace métrique soit aussi un espace vectoriel, sinon on ne peut pas définir d'espace normé. D'où le schéma :



Il existe donc :

- des espaces vectoriels qui sont des espaces métriques sans pour autant qu'il y ait de norme associée à la distance. Autrement dit, $n(x) = d(O, x)$ n'est pas une norme.
- des espaces métriques qui ne sont pas des espaces normés.

Exemples ?

Exemple 6.9. De normes et par conséquent d'espaces vectoriels normés. Elles sont données en exemple car les démonstrations seront développées dans les chapitres correspondants.

1. Soit E un espact topologique compact. L'ensemble $\mathcal{C}(E; \mathbb{K})$ des fonction continues sur E à valeur dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: l'application n: $\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{C}(E;\mathbb{K}) & \to & \mathbb{R}^+ \\ f & \mapsto & \sup_{x\in E} |f(x)| \end{array} \right.$ est une norme appelée norme de la convergence uniforme. Attention , on notera que cette norme n'est définie que si E est un espace topologique compact. En effet, il faut que (n) ne donne pas de valeurs infinies sinon ce n'est plus une norme ! Voir notes correspondant à sa distance associée (37 bis). Voir remarque cours de topologie Christel [1.2.C] ... page 133. Sa distance associée est en prenant $|.|$ comme distance sur $\mathbb{K}$ $(f,\ g) \mapsto \sup_{x\in E} |f(x) - g(x)|$
2. ... rajouter la norme intégrale (voir cours sur intégrale de Riemann/Lebesgue) + norme subordonnée (développée dans le chapitre des fonctions linéaires) + norme de la convergence uniforme ... massons page 53 (c'est l'exemple précédent) + norme sur $\mathbb{R}$ $x \mapsto |x|$.
3. Soit E le sous-espace vectoriel des fonctions continues sur $[a, b]$, $f \mapsto \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt}$ est une norme sur E.
4. Nous verrons plus tard que toutes ces normes permettent de définir d'autres normes sur un espace vectoriel produit.
5. ...

Proposition 6.10. $|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\|$.

Démonstration.

a) $\|x\| = \|x - y + y\|$ or $\|x - y + y\| \leqslant \|x - y\| + \|y\|$ d'après l'inégalité triangulaire. Donc $\|x\| \leqslant \|x - y\| + \|y\|$ soit $\|x\| - \|y\| \leqslant \|x - y\|$.

b) De même en posant $\|y\| = \|y - x + x\|$ on a $\|y\| - \|x\| \leqslant \|x - y\|$ autrement dit $-\|x - y\| \leqslant \|x\| - \|y\|$.

c) On a finalement $-\|x-y\| \leqslant \|x\| - \|y\| \leqslant \|x-y\|$ ce qui s'écrit $|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x-y\|$. □

6.1.2 Autogomie d'espaces vectoriels normés

Comment des espaces vectoriels normés permettent de construire sur un produit direct d'espaces vectoriels normés, de nouvelles normes et par conséquent de nouveaux espaces vectoriels normés !

Proposition 6.11. *Soit $(E_1, \|.\|_{E_1})$, $(E_2, \|.\|_{E_2})$ 2 espaces vectoriels normés. Sur $E = E_1 \times E_2$, on peut définir 3 normes :*

1. $\|(x_1; x_2)\|_\infty = \sup(\|x_1\|_{E_1}; \|x_2\|_{E_2})$, *« borne supérieure de normes »*
2. $\|(x_1; x_2)\|_p = (\|x_1\|_{E_1}^p + \|x_2\|_{E_2}^p)^{\frac{1}{p}}$. *Pour* $p \geqslant 1, x \in \mathbb{K}^n$, $\|.\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.
   Sur $\mathbb{R}^n$ l'inégalité de Minkowsky permet de montrer que l'application $\|.\|_p$: $x \mapsto \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ est une norme, en établissant l'inégalité triangulaire pour $\|.\|_p$. L'inégalité de Minkowsky peut donc se retenir sous la forme $\|x+y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$ dans $(\mathbb{R}, \|.\|_p)$.
3. $\|(x_1; x_2)\|_2 = \sqrt{(\|x_1\|_{E_1}^2 + \|x_2\|_{E_2}^2)}$, *« racine carrée de la somme des carrés des normes »*
4. $\|(x_1; x_2)\|_1 = \|x_1\|_{E_1} + \|x_2\|_{E_2}$, *« somme des normes ».*
5. *De plus on a la relation :*
   $\lim_{p\to+\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$, *si l'on pose* $\|x\|_\infty = \sup_{k\in\{1;\dots;n\}} |x_k|$. *Pour un ensemble fini, l'emploi de* max *ou* sup *n'a pas d'importance.*

Remarque 6.12. A partir d'un même espace vectoriel produit, on peut donc construire plusieurs normes et donc espaces vectoriels normés. Quelle est la relation entre tous ces espaces : permettent-ils d'obtenir les mêmes résultats d'un point de vu topologique ou métrique (continuité, convergence ...) c'est le chapitre sur les équivalences qui permettra de répondre.

6.1.3 Limites des applications « somme » et « produit par un scalaire »

Elles ne pouvaient être définies plus tôt, (c'est à dire dans une structure moins «riche» comme un espace topologique ou métrique quelconque,) car l'addition et la multiplication par un scalaire n'existent pas nécessairement dans un espace métrique ou topologique.

Proposition 6.13. *On appelle produit de suite ou somme de suite ! ? (à définir !)*

6.1.4 Continuités des applications « somme », « produit par un scalaire » et norme

Proposition 6.14. *Soit $(E, \|.\|_E)$ un evn. On munit $E \times E$ et $\mathbb{K} \times E$ de la topologie produit, alors :*

1. *L'application :* $\left|\begin{array}{ccc} (E)^2 & \to & E \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}\right.$ *est uniformément continue.*
2. *L'application :* $\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \to & E \\ (\lambda, y) & \mapsto & \lambda y \end{array}\right.$ *est continue. (à vérifier !)*
3. *L'application $\|.\|_E$ est une application continue sur $(E, \|.\|_E)$.*

Démonstration.

1.
2.

3. Soit $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}; \eta \in \mathbb{R}^{+*}; \eta \leqslant \varepsilon; (\|x-y\|_E < \eta) \Rightarrow \big(|\|x\|_E - \|y\|_E| \leqslant \|x-y\|_E < \eta \leqslant \varepsilon\big)$ on a bien $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}; \exists \eta \in \mathbb{R}^{+*}; (\|x-y\|_E < \eta) \Rightarrow \big(|\|x\|_E - \|y\|_E| < \varepsilon\big)$ d'où la continuité. □

Remarque 6.15. Attention !

1. Les applications : $\left|\begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & \lambda x \end{array}\right.$, : $\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \to & E \\ \lambda & \mapsto & \lambda\, x \end{array}\right.$ sont uniformément continues.
2. Mais l'application : $\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \to & E \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda\, x \end{array}\right.$ est seulement continue (propriété précédente), elle n'est pas uniformément continue.

Démonstration. Page 36 dans le cours de Ben Abdallah sans doute ! □

6.1.5 Normes équivalentes et topologiquement équivalentes

Définition 6.16. *Soit E un espace vectoriel, N_1 et N_2 deux normes sur E.*

1. *On dit que N_1 et N_2 sont dites **topologiquement équivalentes** si et seulement si leurs topologies associées sont égales.*
2. *On dit que N_1 et N_2 sont **équivalentes** s'il existe deux constantes $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^{*+}$ telle que : $\lambda N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \mu N_1(x)$.*

Proposition 6.17. *Dans un espace normé : Equivalentes $\Leftrightarrow$ Topologiquement équivalentes.*

Proposition 6.18. *Soit E un espace vectoriel, N_1, N_2 deux normes sur E et d_1,d_2 les distances associées. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

i. *N_1, N_2 sont équivalentes,*

ii. *d_1, d_2 sont uniformément équivalentes,*

iii. *d_1, d_2 sont topologiquement équivalentes.*

Remarque 6.19. Dans un espace uniquement métrique, il n'y a que $\Rightarrow$.

Exemple 6.20. $\|.\|_\infty$; $\|.\|_1$; $\|.\|_2$; $\|.\|_p$ sont équivalentes. Leurs distances associées définissent des topologies identiques à la topologie produit.

6.1.6 Espace normé de dimension finie

6.1.6.1 Equivalence des normes en dimension finie

Théorème 6.21. *Pour tout espace normé E de dimension finie n et pour toute base $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ de E l'isomorphisme vectoriel : $\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \to & E \\ (x_1,\dots,x_n) & \mapsto & \sum_{i=1}^n x_i e_i \end{array}\right.$ est bicontinue (i.e. un homéomorphisme).*

Démonstration. Cours de Ben Abdallah page 39-40 □

Corollaire 6.22. *Tout espace normé de dimension finie (n) est homéomorphe à $\mathbb{K}^n$.*

Démonstration. Cours de Ben Abdallah page 39-40 □

Théorème 6.23. *Sur $\mathbb{K}^n$ toutes les normes sont équivalentes.*

Démonstration. Cours de Ben Abdallah page 39-40 (on le montre en démontrant qu'une norme quelconque est équivalente à $\|.\|_1$). □

Corollaire 6.24. *Toutes les normes sur un e.v. de dimension finie sur* $\mathbb{K}$ *sont équivalentes.*

Démonstration. Cours de Ben Abdallah page 39-40 □

6.1.6.2 Complétude et fermeture en dimension finie

Proposition 6.25. *Soit P une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie :*

1. *P complète* $\Leftrightarrow$ *P fermée*
2. *P précompacte* $\Leftrightarrow$ *P bornée*
3. *P compacte* $\Leftrightarrow$ *P fermée bornée*

Corollaire 6.26. *Tout sous-espace de dimension finie d'un espace normé E est complet et donc fermé dans E.*

6.1.6.3 Continuité des applications linéaires sur un e.v.n. en dimension finie

Corollaire 6.27. *Soient* E, F *2 espaces v.n. et* $f: E \to F$ *application linéaire.*
Si $\dim(E) < +\infty$ *(*$\dim(E)$ *est finie) alors f est continue, autrement dit toute application linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie et à valeurs dans un e.v.n. quelconque est continue.*

6.1.6.4 Continuité d'une application linéaire sur un produit d'espace vectoriel de dimension finie

Corollaire 6.28. *Soient* $E_1, ..., E_p, F$ *2 espaces v.n. et* $f: \prod_{j=1}^{p} E_j \to F$ *application linéaire.*
Si $\dim(E_j) < +\infty$ *(*$\dim(E_j)$ *est finie) alors f est continue, autrement dit toute application linéaire sur un produit d'espaces vectoriels de dimensions finies est continue.*

6.1.7 Espace de Banach

Définition 6.29. *Un espace vectoriel normé complet est appelé* ***espace de Banach.***

Exemple 6.30.

1. $\mathbb{R}; \mathbb{R}^n; \mathbb{C}; \mathbb{C}^n$ sont des espaces de Banach (voir cours CTES chapitre 3).
2. Soit X un ensemble, $(E, \|.\|_E)$ un espace de Banach. L'ensemble $\mathcal{B}(X, E)$ des applications bornées de $X \to E$, muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$ est un espace de Banach. (Preuve CTES Topologie page 101).
3. Si $(E, \|.\|_E)$ un espace normé et $(F, \|.\|_F)$ un espace de Banach alors $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des fonctions linéaires continues de $E \to F$ muni de la norme associée à $\|.\|_E$ et $\|.\|_F$ est un espace de Banach.
4. Le $\mathbb{C}$-espace vectoreil l^2 (des suites complexes (a_n) telles que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$ converge) muni de la norme $\|(a_n)\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ est un espace de Banach. (Preuve CTES page 102).

6.2 Algèbre normée

6.2.1 Norme compatible avec la multiplication d'une algèbre

Définition 6.31. *Soient A une* $\mathbb{K}$*-algèbre et N une norme sur le* $\mathbb{K}$*-e.v. A.*
On dit que N est ***compatible avec la multiplication*** *de A si et seulement si :*
$\exists C \in \mathbb{R}^+; \forall x, y \in A, N(x\,y) \leqslant C\,N(x)\,N(y)$.

6.2.2 Norme d'algèbre, définition

Définition 6.32. *Soient A une $\mathbb{K}$-algèbre et N une norme sur le $\mathbb{K}$-e.v. A.*
On dit que N est une ***norme d'algèbre sur A*** *si et seulement si :*
$\forall x, y \in A, N(x\,y) \leqslant N(x)\,N(y)$.

Définition 6.33. *On appelle* ***algèbre normée****, un couple formé par une $\mathbb{K}$-algèbre A et une norme d'algèbre sur A.*

Proposition 6.34. *Pour tout ensemble non vide X, l'ensemble des $\mathcal{B}(X,\mathbb{K})$ est une algèbre normée, la troisième loi étant la multiplication.*

6.3 Applications linéaires sur un $\mathbb{K}$-e.v.n. et $\mathcal{L}(E,F)$

En fait il s'agit d'un exemple d'espace vectoriel normé. Il serait donc intéressant de placer ce chapitre à part.

6.3.1 C.N.S. de continuité

Théorème 6.35. *Soit E, F 2 e.v.n. et $f: E \to F$ une application linéaire. On a l'équivalence :*

i. *f continue*

ii. *f continue en 0 (ou au moins en un point x_0 de E)*

iii. *$\exists k \in \mathbb{R}^{+*}; \forall x; \|f(x)\|_F \leqslant k\|x\|_E$ (f est lipschitzienne de rapport k)*

iv. *f est bornée sur la boule unité*

v. *f est bornée sur la sphère unité.*

vi. *f est uniformément continue*

Démonstration. Cours de Ben Abdallah page 36. □

Remarque 6.36. Soit n_1 et n_2 2 normes équivalentes sur un $\mathbb{K}$-e.v. E,
l'application $\mathrm{Id}: \left| \begin{array}{ccc} (E,n_1) & \to & (E,n_2) \\ x & \mapsto & x \end{array} \right.$ est un homéomorphisme.

Démonstration. Cours de Ben Abdallah page 37. □

6.3.2 $\mathcal{L}(E,F)$

Définition 6.37. *On note $\mathcal{L}(E,F)$ le $\mathbb{K}$-e.v. des applications linéaires continues de $E \to F$.*

Proposition 6.38. *$\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires continues $E \to F$ est un $\mathbb{K}$-e.v.*

6.3.3 Norme et Norme d'opérateur ou subordonnée sur $\mathcal{L}(E,F)$

Soient E, F 2 $\mathbb{K}$-e.v.n.. L'ensemble des applications linéaires continues $E \to F$ étant un $\mathbb{K}$-e.v., peut-on définir sur $\mathcal{L}(E;F)$ une norme : oui ! ce sont les normes d'opérateur dite normes subordonnées.

Proposition 6.39. *Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$, notons $\|.\|_E, \|.\|_F$ les normes de E et F alors on a :*

$$\inf\{k \in \mathbb{R}^{+*}; \forall x \in E; \|u(x)\|_F \leqslant k\|x\|_E\} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} \|u(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|u(x)\|_F.$$

Les conditions $\|x\|_E \leqslant 1$ situent x dans la boule unité et $\|x\|_E = 1$ dans la sphère unité

Ce réel est noté $\|u\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ *ou* $\|u\|_{E,F}$ *ou simplement* $\|u\|$ *si aucune confusion n'est possible..*

Démonstration. Cours de Ben Abdallah page 37. □

Définition 6.40. *Soient* E, F *2* $\mathbb{K}$*-e.v.n..*

On appelle ***norme d'opérateur définie à partir de*** *ou* ***subordonnée à*** $\|.\|_E$, $\|.\|_F$ *d'une application linéaire continue, l'application notée* $\|.\|_{E,F}$ *telle que :*

$$\|.\|_{E,F}: \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E;F) & \to & \mathbb{R}_+ \\ u & \mapsto & \|u\|_{E,F} \end{array} \right.$$

Théorème 6.41. *Soit* E, F, G *3 e.v.n.*

1. *L'application* $\|.\|_{E,F}$ *est une norme sur* $\mathcal{L}(E,F)$.
2. *Si* $u \in \mathcal{L}(E;F)$, $\|u(x)\|_F \leqslant \|u\|_{E,F} \times \|x\|_E$
3. *Si* $u \in \mathcal{L}(E;F)$ *et* $v \in \mathcal{L}(F;G)$ $\|v \circ u\|_{E,G} \leqslant \|v\|_{F,G} \times \|u\|_{E,F}$
4. *Si* $E \neq \varnothing$ *on a* $\|\mathrm{Id}_E\| = 1$.

Démonstration. Cours de Ben Abdallah page 38 TCD. □

Remarque 6.42. Si $E = F$, $\|.\|_{E,F}$ est noté $\|.\|_s$ (à revoir) ?

Proposition 6.43. *Toutes les normes subordonnées d'un endomorphisme sont des normes d'algèbre. Le couple formé par l'ensemble des endomorphismes et la norme subordonnée i.e.* $((\mathcal{L}(E), +, \cdot, \circ); \|.\|_s)$ *est une* $\mathbb{K}$*-algèbre normée.*

6.3.4 Dual d'un espace vectoriel

Définition 6.44. *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-e.v.n.. L'espace* $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ *des formes linéaires continues sur* E *s'appelle dual de* E *et est noté* E'.

6.3.5 Isométrie entre E et $\mathcal{L}(\mathbb{K}; E)$

Proposition 6.45. *Tout* $\mathbb{K}$*-espace normé* E *est isométrique à* $\mathcal{L}(\mathbb{K}, E)$ *par l'application* Θ:

$$\left| \begin{array}{ccc} E & \to & \mathcal{L}(\mathbb{K}, E) \text{ avec } \tilde{x}(\lambda) = \lambda \cdot x \\ u & \mapsto & \tilde{x} \end{array} \right.$$

Démonstration. Cours de Ben Abdallah page 38 TCD. □

6.3.6 C.S. de complétude pour $\mathcal{L}(E; F)$

Théorème 6.46. *Soit* E *une espace normé et* F *un espace de Banach alors l'espace* $\mathcal{L}(E,F)$ *est aussi de Banach. En particulier le dual topologique de tout espace normé est un espace de Banach.*

Démonstration. Cours de Ben Abdallah page 38 TCD. □

6.4 Applications multilinéaires sur un $\mathbb{K}$-e.v.n et $\mathcal{L}(E_1, ..., E_n, F)$

En fait il s'agit d'un exemple d'espace vectoriel normé. Il serait donc intéressant de placer ce chapitre à part. Rajouter l'introduction du cours de licence p40.

6.4.1 C.N.S. de continuité

Théorème 6.47. *Soient $E_1,...,E_n,F$ $(n+1)$ espaces normés et $f: E_1\times...\times E_n\to F$ une application multilinéaire, on a l'équivalence suivante :*

1. *f est continue dans $E_1,...,E_n$*
2. *f est continue en $0=(0,...,0)$*
3. *il existe $k>0$ tel que $\|f(x_1,...,x_n)\|\leqslant k\|x_1\|\times...\times\|x_n\|$.*

Démonstration. Cours de Ben Abdallah page 41 TCD. □

6.4.2 $\mathcal{L}(E_1,...,E_n,F)$

Définition 6.48. *On note $\mathcal{L}(E_1,...,E_n,F)$ (resp. $\mathcal{L}(E,F)$) l'ensemble des applications multilinéaires (resp. n-linéaires continues).*

Proposition 6.49. *$\mathcal{L}(E_1,...,E_n,F)$ l'ensemble des applications multilinéaires (resp. n-linéaires continues) est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.*

6.4.3 Norme et Norme d'opérateur ou subordonnée sur $\mathcal{L}(E_1,...,E_n,F)$

Soit $E_1,...,E_n,F$ (n+1) $\mathbb{K}$-e.v.n. . On note $\mathcal{L}(E_1,...,E_n,F)$ le $\mathbb{K}$-e.v. des applications linéaires continues de E_1, ..., $E_n\to F$. L'ensemble des applications linéaires continues $E\to F$ est un $\mathbb{K}$-e.v., on peut donc définir la norme d'opérateur dite norme subordonnée. Cette phrase n'a pas de sens si F n'est pas compact et si $F\neq\mathbb{K}$.

Proposition 6.50. *Pour $f\in\mathcal{L}(E_1,...,E_n,F)$, en notant $E=E_1\times...\times E_n$ et $x=(x_1,...,x_n)$*

$$\text{On a } \inf_{(x)\in E}\{k>0;\|f(x)\|_F\leqslant k\prod_{i=1}^n\|x_i\|_{E_i}\}=\sup\frac{\|f(x)\|_F}{\prod_{i=1}^n\|x_i\|_{E_i}}=$$
$$\sup_{\|x\|_E\leqslant1\text{ ou }\|x\|_\infty\leqslant1}\|f(x)\|_F=\sup_{\|x\|_E=1}\|f(x)\|_F$$

Ce réel est noté $\|f\|_{E_1,...,E_n,F}$ ou simplement $\|f\|$ si aucune confusion n'est possible.

Définition 6.51. *Soit $f\in\mathcal{L}(E_1,...,E_n,F)$.*

*On appelle **norme d'opérateur définie à partir de** ou **subordonnée à** $\|.\|_{E_1}$, ..., $\|.\|_{E_n}$, $\|.\|_F$ d'une application multilinéaire continue u, l'application :*

$$\|.\|_{E_1,...,E_n,F}:\left|\begin{array}{ccc} f\in\mathcal{L}(E_1,...,E_n,F) & \to & \mathbb{R}_+ \\ f & \mapsto & \|f\|_{E_1,...,E_n,F}\end{array}\right.$$

Proposition 6.52. *Pour $f\in\mathcal{L}(E_1,...,E_n,F)$.*

l'application $\|.\|_{E_1,...,E_n,F}$ est une norme.

6.4.4 Divers

Théorème 6.53. *Pour $u\in\mathcal{L}(E,F,G)$ et $x\in E$.*

1. *Si $u_x:\left|\begin{array}{ccc} F & \to & G \\ y & \mapsto & u(x,y)\end{array}\right.$ alors $u_x\in\mathcal{L}(F,G)$ et l'application $\tilde{u}:\left|\begin{array}{ccc} E & \to & \mathcal{L}(F,G) \\ x & \mapsto & u_x\end{array}\right.$ est linéaire continue.*
2. *De plus l'application $\mathcal{O}:\left|\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F,G) & \to & \mathcal{L}(E,\mathcal{L}(F,G)) \\ u & \mapsto & \tilde{u}\end{array}\right.$ est une bijection linéaire (un isomorphisme linéaire) conservant les normes et aussi une isométrie. Autrement dit $\mathcal{L}(E;F;G)$ est isomorphe et isométrique à $\mathcal{L}(E;\mathcal{L}(F;G))$.*

Corollaire 6.54. *Si l'espace G est de Banach, l'espace $\mathcal{L}(E,F,G)$ est aussi de Banach.*

Corollaire 6.55. *Si l'espace F est de Banach l'espace $\mathcal{L}(E_1, ..., E_n, F)$ est de Banach.*

Proposition 6.56. *Toute application multilinéaire d'un produit d'espace normé de dimension finie est continue.*

6.5 Topologie des espaces vectoriels normés

Certaines propriétés ont déjà été vues, mais les regrouper dans une partie topologie peut-être utile ! (Propriétés à mettre également en topologie générale et métrique)

6.5.1 En dimension finie

Corollaire 6.57. *Toute application linéaire d'un espace vectoriel normé de dimension finie dans un espace vectoriel quelconque est continue. Déjà vu page 79.*

Démonstration. CTE 2003-2004 page 133 □

Corollaire 6.58. *Tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet.*

Démonstration. CTE 2003-2004 page 133 □

Corollaire 6.59. *Tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé est fermé.*

Démonstration. CTE 2003-2004 page 133 et CTE 2004-2005 page 109. □

Corollaire 6.60. *Les parties compactes d'un espace vectoriel normé de dimension finie sont les parties fermées et bornées.*

Démonstration. CTE 2003-2004 page 133 et CTE 2004-2005 page 110. □

6.5.2 En dimension infinie

(Remarque CTE 2003-2004 page 134) Les propriétés précédentes en dimension finie tombent toutes en dimension infinie. En particulier, nous avons le théorème suivant :

Théorème 6.61. *(Riesz) La boule unité fermée dans un espace vectoriel normé de dimension infinie n'est jamais compacte.*

Démonstration. CTE 2003-2004 page 134 □

6.6 Série

La définition des séries convergentes est calquée sur le cas des série numériques. Le critère de Cauchy de convergence des séries s'étend au cas des espaces de Banach. On dit qu'une série de terme général x_n est absolument convergente si la série de terme général $\|x_n\|$ est convergente. Dans un espace de Banach, la convergence absolue implique la convergence.

6.6.1 Définitions et propriétés générales

Proposition 6.62. *Si les séries de terme gé x_n, y_n sont convergentes les séries de termes généraux $x_n + y_n$ et $\lambda\, x_n, \lambda \in \mathbb{K}$ sont convergentes et l'on a :* $\begin{cases} \sum (x_n + y_n) = \sum x_n + \sum y_n \\ \sum \lambda\, x_n = \lambda \sum x_n \end{cases}$.

Si la série de terme général x_n est convergente on a $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.

6.6.2 ... dans un espace de Banach

Proposition 6.63. *(Critère de Cauchy)*
Soit E un espace de Banach et (x_n) une suite de E on a l'équivalence

1. *la suite de terme général x_n est convergente,*
2. $\forall \varepsilon > 0; \exists n_0 \in \mathbb{N}; (n \geqslant m \geqslant n_0) \Rightarrow \left(\left\| \sum_{i=m}^{n} x_i \right\| < \varepsilon \right)$

Proposition 6.64. *Soit un espace de Banach et (x_n) une suite de E, si la série de terme général x_n est absolument convergente cette série est convergente.*

Théorème 6.65. *Soit E un espace de Banach, $u \in \mathcal{L}(E)$.*
si $\|u\| < 1$ alors $(\mathrm{Id} + u)$ sont des homéomorphismes de E avec :
$(\mathrm{Id} + u)^{-1} = \sum (-1)^n (u)^n$ *où* $u^n = u \circ u \circ ... \circ u$ *et* $\|(\mathrm{Id} + u)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1 - \|u\|}$.

Proposition 6.66. *Soit E, F des espaces de Banach et $u_0 \in I_S(E, F)$ l'espace des homéomorphisme linéaires de E vers F.*
Si $v \in \mathcal{L}(E, F)$ est telle que $\|v\| \leqslant \|u_0^{-1}\|$ alors $u_0 + v \in I_S(E, F)$ et $\|(u+v)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\|u_0\|^{-1} - \|v\|}$.

Corollaire 6.67. *Soit E, F 2 espaces de Banach tels que l'espace $I_S(E, F)$ soit non vide alors $I_S(E, F)$ est ouvert dans $\mathcal{L}(E, F)$ et l'application :* $\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \to & I_S(E,F) \\ y & \mapsto & u^{-1} \end{array} \right.$ *est continue*

6.7 Exponentielle d'un endomorphisme d'un espace de Banach

6.7.1 Définition

Dans tout ce chapitre E est un espace de Banach réel ou complexe, $\mathrm{End}(E)$ est l'ensemble des endomorphisme de E et $\mathrm{GL}(E)$ est le groupe linéaire de E i.e. l'ensemble des automorphismes de E.

Proposition 6.68. *Soient A un endomorphisme de E ($A \in \mathrm{End}(E)$) et la série $\left(\frac{A^n}{n!}; S_n \right)$ pour laquelle on pose $A^0 = \mathrm{Id}_E$.*

1. *La série $\left(\frac{A^n}{n!}; S_n \right)$ converge uniformément sur tout ensemble borné contenu dans End(E).*
2. *Sa somme $S(A)$ vérifie : $\|S(A)\| \leqslant \exp \|A\|$.*

Définition 6.69. *Soit E un espace de Banach. On appelle* ***exponentielle d'un endomorphisme*** *de E l'application :* $\exp : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{End}(E) & \to & E \\ A & \mapsto & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \end{array} \right.$.

6.7.2 Propriétés

6.7.2.1 Relation entre exponentielles

Proposition 6.70. $\forall A \in \mathrm{End}(E),\ \|\exp_{\mathrm{End}(E)}(A)\| \leqslant \exp_{\mathbb{R}}(\|A\|)$.

6.7.2.2 Continuité

Proposition 6.71. *L'application* exp *est continue sur* $\mathrm{End}(E)$. *Elle est aussi localement lipschitzienne : $\|\exp(A) - \exp(B)\| \leqslant e^M \times \|A - B\|$ si M majore $\|A\|$ ou $\|B\|$.*

6.7.2.3 Commutation avec la conjugaison

Proposition 6.72. $\forall (A,B) \in (\mathrm{End}(E) \times \mathrm{GL}(E)),\ \exp(B^{-1} \circ A \circ B) = B^{-1} \circ \exp(A) \circ B.$

6.7.2.4 Exponentielle d'une somme

Proposition 6.73. $\forall (A,B) \in (\mathrm{End}(E) \times \mathrm{GL}(E)),\ (A \circ B = B \circ A) \Rightarrow (\exp(A+B) = \exp(A) \circ \exp(B)).$

6.7.2.5 Toute exponentielle est un carré

Proposition 6.74. $\forall A \in \mathrm{End}(E),\ \exp(A) = \left(\exp\left(\frac{A}{2}\right)\right)^2.$

6.7.2.6 Déterminant d'une exponentielle

Proposition 6.75. *Si E est dimension finie alors $\forall A \in \mathrm{End}(E)$:*

1. $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{tr}(A))$.
2. $\det(\exp(A)) > 0$.

6.7.2.7 Application

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbf{GL(}\boldsymbol{E}\mathbf{)} \\ \boldsymbol{t} & \mapsto & \mathbf{exp(}\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{A}\mathbf{)} \end{array}\right.$$

Proposition 6.76. *Soient $A \in \mathrm{End}(E)$ et l'application f:* $\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathrm{GL}(E) \\ t & \mapsto & \exp(t\cdot A) \end{array}\right.$ *alors :*

1. *f est de classe $\mathcal{C}^\infty$,*
2. *$f'(t) = A(f(t))$.*

Note 6.77.

1. Retirer la partie algèbre linéaire du résumé algèbre linéaire du premier semestre.
2. Retirer la partie espace vectoriel du résumé du second semestre.

Chapitre 7
Les nombres réels et leur topologie

Au cours de mes révisions pour l'agrégation interne de mathématiques, j'ai été confronté à des exercices faisant intervenir des inégalités. En particulier dans le livre Analyse 1 de J.M. Monier, l'exercice 1.2.8 m'a posé des problèmes car aucune méthode un peu générale ne semblait se dégager pour permettre leur résolution. J'ai trouver une solution à mon problème dans le livre Les Olympiades de Mathématiques de Tarik Belhaj Soulami. (Partie à mettre avec les nombres réels).

7.1 Inégalité du réordonnement

Théorème 7.1. *(Inégalité du réordonnement)*

La somme $S_\sigma = \sum_{i=1}^{i=n} a_i b_{\sigma(i)}$, où σ est une permutation de $\{1, 2, ..., n\}$, est :
-maximales lorsque les deux suites de nombres a_1, a_2, ..., a_n et $b_{\sigma(1)}$, $b_{\sigma(2)}$, ..., $b_{\sigma(n)}$ sont rangées dans le même ordre d'inégalité,
-minimales lorsque les deux suites sont rangées dans l'ordre inverse.

Démonstration. Voir livre Olympiades de Mathématiques page 119. □

Remarque 7.2. la démonstration fournie également un moyen de démonstration des inégalités citées précédement, en procédant de proche en proche par transposition de deux termes d'une des suite. Ce qui permet de se passer du théorème si son utilisation n'est pas possible compte tenu du programme du concours. En effet aucun autre livre ne le mentionne !

Exemple 7.3. Montrons que $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}_+^3$, $a^3+b^3+c^3 \geqslant a^2b+b^2c+c^2a$

Appliquons directement le théorème précédent : On peut supposer que $a \geqslant b \geqslant c$
$a^3+b^3+c^3$ s'écrit aussi $a^2a+b^2b+c^2c$
Or $a \geqslant b \geqslant c \geqslant 0$ par conséquent $a^2 \geqslant b^2 \geqslant c^2$,
Les suites a^2, b^2, c^2 et a, b, c donc $a^3+b^3+c^3 \geqslant a^2b+b^2c+c^2a$.

Utilisons la méthode de démonstration du théorème : On suppose encore que $a \geqslant b \geqslant c$
$S_1 = a^3+b^3+c^3$ et $S_2 = a^2b+b^2a+c^3$ pour S_2 on a transposé a et b dans la suite a, b, c.
$S_1 - S_2 = (a^3+b^3+c^3) - (a^2b+b^2a+c^3)$ puis on soustrait.
$S_1 - S_2 = (a^3+b^3) - (a^2b+b^2a)$ ce qui permet de faire disparaître c^3.
$S_1 - S_2 = (a^2a+b^2b) - (a^2b+b^2a)$
$S_1 - S_2 = a(a^2-b^2) - b(a^2-b^2)$
$S_1 - S_2 = (a-b)(a^2-b^2)$ or $a \geqslant b \geqslant 0$ donc : $S_1 - S_2 \geqslant 0$.
autrement dit $a^3+b^3+c^3 \geqslant a^2b+b^2a+c^3$
On reproduit le même raisonnement avec $S_1' = a^2b+b^2a+c^2c$ et $S_2' = a^2b+b^2c+c^2a$
$S_1' - S_2' = (b^2a+c^2c) - (b^2c+c^2a)$ cette foi-ci c'est a^2b qui disparait,
$S_1' - S_2' = a(b^2-c^2) - c(b^2-c^2)$
$S_1' - S_2' = (a-c)(b^2-c^2)$ compte tenu des hypothèses on obtient : $S_1' - S_2' \geqslant 0$.
autrement dit $a^3+b^3+c^3 \geqslant a^2b+b^2c+c^2a$

7.2 Inégalité de Cheybychev

Théorème 7.4. *Si deux suites de nombres a_1, a_2, ..., a_n et b_1, b_2, ..., b_n sont rangées dans le même ordre d'inégalités au sens large, alors*

$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$

L'inégalité changeant de sens si les deux suites sont rangées dans l'ordre inverse.

Démonstration. Voir livre Olympiades de Mathématiques page 120. □

7.3 Inégalité de la moyenne

Théorème 7.5. *Soit* $(x_1, x_2, ..., x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ alors

$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leqslant \frac{1}{n} \times \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$

Démonstration. Voir livre Olympiades de Mathématiques page 122. □

7.4 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Note 7.6. Ceci est dû à la structure d'espace euclidien de $\mathbb{R}^n$: $n\langle .;. \rangle : (x; y) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i \times y_i$ est un produit scalaire de $\mathbb{R}$, elle vérifie donc : $n\langle .;. \rangle \leqslant \|x\| \times \|y\|$ où $\|.\|$ est la norme associée à $\langle .;. \rangle$

Théorème 7.7. *Soient* $((x_1, x_2, ..., x_n); (y_1, y_2, ..., y_n)) \in (\mathbb{R}^n)^2$ alors

$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i \times y_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$

avec égalité si et seulement si $(x_1, x_2, ..., x_n)$ et $(y_1, y_2, ..., y_n)$ sont proportionnels.

Démonstration. Voir livre Olympiades de Mathématiques page 126. □

7.5 Inégalité de Minkowski ou triangulaire

Note 7.8. Elle permet de montrer que l'application $\|.\|_p : x \mapsto \left(\sum |x_i|\right)^{\frac{1}{p}}$ vérifie l'inégalité triangulaire ce qui par conséquent en fait un élément de la démonstration de $(\mathbb{R}; \|.\|_2)$ ou $(\mathbb{R}; \|.\|_p)$ espaces normés. On peut donc la retenir sous la forme : $\|x + y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$. Même remarque pour $(\mathbb{R}; d_2)$ et $(\mathbb{R}; d_p)$ où l'inégalité permet de montrer que d_2 et d_p sont des distances.

Théorème 7.9. *Soient* $((x_1, x_2, ..., x_n); (y_1, y_2, ..., y_n)) \in (\mathbb{R}^n)^2$ *et* $p \in \mathbb{R}; p \geqslant 1$ *alors*

$$\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p} \leqslant \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} x_i^p} + \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} y_i^p}$$

Attention : l'inégalité est démontrée pour p réel $(p \in \mathbb{R}; p \geqslant 1)$

Démonstration. Voir livre Olympiades de Mathématiques page 130, pour $p = 2$. Voir CTE page 30 autrement. □

7.6 Inégalité de Hölder

Théorème 7.10. *Soient* $((x_1, x_2, ..., x_n); (y_1, y_2, ..., y_n)) \in \left(\left(\mathbb{R}^+\right)^n\right)^2$ *et* $p, q \in \mathbb{R}; p \geqslant 1; q \geqslant 1; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *alors*

$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \times y_i\right) \leqslant \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} x_i^p} \times \sqrt[q]{\sum_{i=1}^{n} y_i^q}$

Note 7.11. Vérifier si en rajoutant des valeurs absolues, on peut élargir l'inégalité à toutes les valeurs de x_i et y_i.

Démonstration. Voir livre Olympiades de Mathématiques page 130. □

7.7 Fonction Convexe

Exercice 7.1. Voir Livre Analyse I J.M. Monier

Exercice 7.2. Voir Livre Olympiade de Mathématiques

7.8 Topologie de $\mathbb{R}$

7.8.1 Compact de $\mathbb{R}$

Proposition 7.12.

1. *Soit $a, b \in \mathbb{R}$, l'intervalle fermé $[a;b]$ est compact.*
2. *Les sous-espaces compacts de $\mathbb{R}$ sont les parties fermées et bornées de $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Voir cours de licence. □

7.8.2 Compact de $\mathbb{R}^n$

Théorème 7.13. *Les sous-espaces compacts de $\mathbb{R}^n$ sont les parties fermées et bornées.*

Exemple 7.14. Soit $S^n = \left\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1\right\}$, S^n est compacte.

7.8.3 Connexité

Théorème 7.15. *Une partie A de $\mathbb{R}$ ou de $\bar{\mathbb{R}}$ est connexe si et seulement si A est un intervalle.*

Démonstration. □

Rajouter inf et sup sur une partie de $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}$ corps ordoné !

Proposition 7.16. $(\mathbb{R}; +; \times; \leqslant)$ *est un corps ordonné.*

Théorème 7.17. *(CTE 2003-2004 ? page 9 Topologie) Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure et toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.*

Théorème 7.18. *(dit de « passage au sup et à l'inf ») Soit A une parite nonvide de $\mathbb{R}$:*

1. *Si $M \in \mathbb{R}$ et tel que $\forall x \in \mathbb{R}, x \in a \Rightarrow x \leqslant M$ alors $\sup(A)$ existe et $\sup(A) \leqslant M$.*
2. *Si $m \in \mathbb{R}$ et tel que $\forall x \in \mathbb{R}, x \in A \Rightarrow m \leqslant x$, alors $\inf(A)$ existe et $m \leqslant \inf(A)$.*

Avertissement 7.19. Valable uniquement pour $\leqslant$!

Partie entière d'un réel

Proposition 7.20. *Pour tout réel x, il existe un et un seul entier relatif n tel que $n \leqslant x < n+1$.*

Démonstration. CTE 2003-2004 ? cours de Topologie page 7. □

Définition 7.21. *On dira que n est la partie entière de x et on notera $n = [x]$ ou bien $x = E(x)$.*

Chapitre 8
Fonctions

Parmis les fonctions particulières rajouter la fonction indicatrice. Définition, représentation propriété (voir exercice : livre d'exercices Intégrale de Lebesgue). Rajouter également les fonctions étagées.

Rajouter limite inf ($\underline{\lim}$) et limite sup ($\overline{\lim}$) d'une suite de nombres et d'une fonctions et ?

8.1 Fonctions numériques d'une variable réelle (i.e. définie sur $\mathbb{R}$)

8.1.1 Propriétés d'une fonction continue sur un intervalle

Proposition 8.1. *Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. L'image $f(I)$ de I par f est encore un intervalle de $\mathbb{R}$.*

8.1.2 Propriétés d'une fonction continue sur un fermé borné

Proposition 8.2. *Soit f une fonction continue sur une partie fermée bornée P de $\mathbb{R}$. L'image $f(P)$ de P par f est encore une partie fermée bornée de $\mathbb{R}$, et la fonction f est uniformément continue sur P.*

8.1.3 Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone

Proposition 8.3. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour que f admette une fonction réciproque définie sur $f(I)$, il faut et il suffit que f soit strictement monotone. Dans ces conditions, f^{-1} est continue et strictement monotone sur $f(I)$.*

8.1.4 Dérivabilité

Définition 8.4. *Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. On dit que f est **dérivable** en un point x_0 de I si la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite en ce point.*

Définition 8.5. *Cette limite est appelée **dérivée** de f **au point** x_o et notée $f'(x_o)$.*

Définition 8.6. *On dit que f est **dérivable** sur I si f est dérivable en tout point de I.*

Définition 8.7. *La fonction numérique $x \mapsto f'(x)$ est appelée **dérivée** de f et notée f', ou encore Df.*

8.1.4.1 Opérations algébrigues sur les fonctions dérivables.

Proposition 8.8.

1. *Les fonctions numériques définies sur I dérivables au point x_0 constituent une sous-algèbre pleines des fonctions d'une variable réelle de l'algèbre des fonctions numériques définies sur I.*
2. *L'application $f \mapsto f'(x_0)$ est une forme linéaire.*

3. *De même, les fonctions dérivables sur I constituent une sous-algèbre pleine de l'algèbre des fonctions définies sur I.*
4. $(\alpha f+\beta g)'=\alpha f+\beta f'$,
5. $(fg)'=f'g+fg'$,
6. $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$
7. $(f_1 f_2 ... f_n)'=\sum_{i=1}^{n} f_1 f_2 ... f_i ... f_n$
8. $(f^n)'=n f^{n-1} f'\left\{\begin{array}{l} n\in\mathbb{N} \\ n\in\mathbb{Z}, \text{si } f \text{ ne } s'\text{annule pas}\end{array}\right.$

8.1.4.2 Dérivabilité d'une fonction composée.

Proposition 8.9. *Soient f une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et g une fonction numérique définie sux un intervalle J de $\mathbb{R}$ contenant $f(I)$.*

1. *Si f est dérivable en un point x_0 de I, et si g est dérivable au point $f(x_0)$, alors la fonction composée $g\circ f$ est dérivable au point x_0.*
2. *Dans ce cas $(g\circ f)(x_0)=(g'\circ f)(x_0)\times f'(x_0)$.*
3. *Si f est dérivable sur I et si g est dérivable sur $f(I)$, alors $g\circ f$ est dérivable sur I.*
4. *Et $(g\circ f)=(g'\circ f)\times f$.*

8.1.4.3 Dérivabilité d'une fonction réciproque

Proposition 8.10. *Soient f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, J l'image de I par f, g la fonction réciproque de f, et x_0 un point de I.*

1. *Lorsque f est dérivable au point x_0, g est dérivable au point $y_0=f(x_0)$ si et seulement si $f(x_0)\neq 0$.*
2. *Dans ces conditions, $g'(y_0)=\frac{1}{f(x_0)}$.*
3. *Par suite, lorsque f est dérivable sur I, g est dérivable sur J si et seulement si f' ne s'annule en aucun point de I, et $g'=\frac{1}{f'\circ g}$.*

8.1.4.4 Dérivée logarithmique

Définition 8.11. *Soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, ne s'annulant pas sur I. On appelle **dérivée logarithmique** de f le quotient de f' par f.*

Proposition 8.12. *Soient $(f_1, f_2, ..., f_p)$ une suite de p fonctions numériques dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, ne s'annulant pas sur I, et $(n_1, n_2, ..., n_p)$ une suite de p entiers rationnels. Alors $\frac{(f_1^{n_1} f_2^{n_2}... f_p^{n_p})'}{f_1^{n_1} f_2^{n_2}... f_p^{n_p}}=n_1\frac{f_1'}{f_1}+n_2\frac{f_2'}{f_2}+...+n_p\frac{f_p'}{f_p}$.*

8.1.5 Fonctions de classe C^r

Soit r un entier naturel non nul. La dérivée r-ième d'une fonction r fois dérivable f se note Df ou $f^{(r)}$.

Définition 8.13. *On dit que f est de classe C^r si elle est r fois dérivable et si Df est continue.*

Définition 8.14. *On dit qu'une fonction est de **classe C^0** si elle est continue sur I,*

Définition 8.15. *On dit qu'une fonction est de classe C^∞ si elle est indéfiniment dérivable sur I.*

Proposition 8.16.

1. *Les fonctions de classe C^r sur I constituent une sous-algèbre pleine de l'algèbre unitaire des fonctions définies sur I.*

2. *De plus, pour tout couple (f, g) de fonctions de classe C^r, $(f \times g)^{(r)} = f \times g^{(r)} + C_r^1 f \times g^{(r-1)} + ... + C_r^s f^{(s)} \times g^{(r-s)} + ... + f^{(r)} \times g$ (formule de Leibniz).*
3. *La composée de deux fonctions de classe C^r est encore de classe C^r.*

Définition 8.17. *On dit qu'une fonction f est un **C^r-difféomorphisme** de I sur $J = f(I)$ si f définit une bijection de I sur J et si f et f^{-1} sont de classe C^r.*

Proposition 8.18. *Lorsque $r \neq 0$, pour que f soit un C^r-difféormorphisme, il faut et il suffit que f soit de classe C^r et que f ne s'annule pas.*

8.1.6 Fonctions de classe C^r par morceaux

Définition 8.19. *On dit que f est de **classe C^r par morceaux** sur un intervalle compact $[a, b]$ s'il existe une suite strictement croissante $(c_0, c_1, ..., c_n)$, où $c_0 = a$ et $c_n = b$, telle que la restriction de f à chacun des intervalles $]c_i, c_{i+1}[$ soit prolongeable en une fonction de classe C^r sur $[c_i, c_{i+1}]$.*

Définition 8.20. *On dit que f est de **classe C^r par morceaux** sur un intervalle I si la restriction de f à tout intervalle compact contenu dans I est de classe C^r par morceaux.*

8.1.7 Théorème de Rolle

Soient f une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et x_0 un point de I.

Définition 8.21. *On dit que f **admet un maximum** au point x_0 si, pour tout point x de I, $f(x) \leqslant f(x_0)$.*

Définition 8.22. *On dit que f **admet un maximum local** au point x_0 s'il existe un voisinage V de x_0 tel que la restriction de f à $I \cap V$ admette un maximum au point x_0.*

Définition 8.23. *On dit que f admet un **minimum**, ou un **minimum local**, au point x_0 si $-f$ admet un maximum, ou un maximum local, en ce point.*

Proposition 8.24. *Soient f une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et x_0 un point intérieur à I. Si la fonction f admet un maximum ou un minimum local au point x_0, et si f est dérivable en ce point, alors $f'(x_0) = 0$.*

Proposition 8.25. *Théorème de Rolle. Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, dérivable sur l'intervalle $]a, b[$, et telle que $f(a) = f(b)$, il existe alors au moins un point c de l'intervalle $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Proposition 8.26. *Formule des accroissements finis.*

Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, et dérivable sur l'intervalle $]a, b[$. Il existe alors au moins un point c de I'intervalle $]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Proposition 8.27. *Formule de Taylor-Lagrange.*

Soient n un entier naturel et f une fonction numérique n fois continûment dérivable sur un intervalle $[a, b]$ et $n + 1$ fois dérivable sur $]a, b[$. il existe alors au moins un point c de l'intervalle $]a, b[$ tel que $f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b - a) + \frac{f(a)}{2!}(b - a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b - a)^n + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(b - a)^{n+1}$.

8.1.8 Sens de variation d'une fonction.

Proposition 8.28. *Soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle I.*

1. *Si la dérivée de f est nulle, f est constante.*

2. *Si la dérivée de f est positive, f est croissante.*
3. *Si la dérivée de f est négative, f est décroissante.*

8.1.9 Primitives.

Définition 8.29. *Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction numérique g définie sur I est une* ***primitive*** *de f sur cet intervalle si g est dérivable sur I, sa dérivée étant égale à f.*

Proposition 8.30. *Pour tout nombre réel a, la fonction $g + a$ est encore une primitive de f. Réciproquement, pour toute primitive h de f, il existe un nombre réel b tel que $h = g + b$. Autrement dit, deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante. Plus précisément, soient x_0 un point de I et y_0 un nombre réel. Il existe une primitive h de f et une seule telle que $h(x_0) = y_0$.*

8.1.10 Développements limités.

Définition 8.31. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, x_0 un point de I et n un entier naturel.*

On dit qu'une fonction numérique f définie sur I ***admet un développement limité à l'ordre n*** *au voisinage de x_0 s'il existe une fonction polynomiale A de degré inférieur à n telle que $f(x) - A(x)$ soit négligeable devant $(x - x_0)^n$ au voisinage de x_0. Une telle fonction A s'appelle* ***développement limité de f*** *à l'ordre n au voisinage de x.*

Proposition 8.32.

1. *L'ensemble $\mathcal{D}_n(I)$ des fonctions admettant un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions numériques définies sur I.*
2. *L'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur à n et l'ensemble des fonctions négligeables devant $(x - x_0)^n$ au voisinage de x_0 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathcal{D}_n(I)$.*
3. *En particulier, le développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 est unique, et l'application P_n qui à tout élément de $\mathcal{D}_n(I)$ associe son développement limité est un projecteur : $P(\alpha f + \beta g) = \alpha P_n(f) + \beta P_n(g)$.*
4. *Pour tout couple (n, p) d'entiers naturels tel que $p < n$, $\mathcal{D}_n(I)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}_p(I)$, et pour tout élément f de $\mathcal{D}_n(I)$, $P_p(f) = P_p[P_n(f)]$.*
5. *L'ensemble $\mathcal{D}_n(I)$ est une sous-algèbre pleine de l'algèbre des fonctions numériques définies sur I. Plus précisément, $P_n(fg) = P_n[P_n(f)P_n(g)]$.*
6. *Si g ne s'annule pas sur I, le développement limité de $\frac{f}{g}$ est le quotient de la division de $P_n(f)$ par $P_n(g)$ suivant les puissances croissantes de $x - x_0$ à l'ordre n.*
7. *Soient f une fonction admettant un développement limité A à l'ordre n au voisinage de x_0 telle que $f(x_0) = 0$, et g une fonction admettant un développement limité B à l'ordre n au voisinage de 0. Alors $g \circ f$ admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0, et $P_n(g \circ f) = P_n(B \circ A)$.*
8. *Soit f une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I contenant 0, admettant un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0, $n > 0$, et telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$. Alors f^{-1} admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0. De plus, les coefficients du développement limité de f^{-1} s'obtiennent en identifiant le développement limité à l'ordre n de la fonction composée $f^{-1} \circ f$ à la fonction $x \mapsto x$.*

Proposition 8.33. *(Existence de développements limités)*

1. *Pour que f admette un développement limité à l'ordre 0 au voisinage de x_0, il faut et il suffit que f soit continue en ce point.*
2. *Pour que f admette un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de x_0, il faut et il suffit que f soit dérivable en ce point.*
3. *Pour que f admette un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0, il suffit que f soit $n-1$ fois dérivable sur un voisinage de x_0 et que f soit dérivable en ce point. Dans ce cas, $P_n(f)(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ (formule de Taylor-Young).*

8.1.11 Fonction convexe

Définition 8.34. *Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f est **convexe** si et seulement si l'ensemble des points (x, y) de $I \times \mathbb{R}$ tels que $y \geqslant f(x)$ est convexe.*

Proposition 8.35.

1. *Cela équivaut à dire que, pour tout couple (x, x') de points de I et pour tout nombre réel α appartenant à $[0;1]$, $f(\alpha x + (1-\alpha)x') \leqslant \alpha f(x) + (1-\alpha)f(x')$.*
2. *Dans ces conditions, pour toute suite $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de points de I et pour toute suite $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ de nombres réels positifs de somme égale à 1, $f\big(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\big) \leqslant \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)$.*
3. *Pour tout triplet (x, x', y) de points de I tel que $x < y < x'$, $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(x')-f(x)}{x'-x} \leqslant \frac{f(x')-f(y)}{x'-y}$.*
4. *Si l'intervalle I est ouvert, f est continue sur I, et dérivable à gauche et à droite en tout point de I ; les fonctions f'_g et f'_d sont croissantes.*
5. *Pour qu'une fonction f dérivable sur I soit convexe, il faut et il suffit que f' soit croissante.*
6. *Pour qu'une fonction f deux fois dérivable sur I soit convexe, il faut et il suffit que f'' soit positive.*

8.1.12 Fonctions usuelles numériques

8.1.12.1 Fonction affines et linéaires

8.1.12.2 Fonctions exponentielles

Proposition 8.36. *Soit a un nombre réel strictement positif, il existe un morphisme monotone $\exp_a$ et un seul du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ tel que $\exp_a(1) = a$.*

Définition 8.37. *On appelle exponentielle de base a et on note $\exp_a$ l'unique morphisme monotone du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ tel que $\exp_a(1) = a$.*

Proposition 8.38.

1. *Lorsque $a \neq 1$, la fonction $\exp_a$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}_+^*, \times)$, croissant si $a > 1$ et décroissant si $a < 1$.*
2. *La fonction exponentielle de base 1 est constante et égale à 1.*
3. *La restriction à $\mathbb{Z}$ de $\exp_a$ coïncidant avec $n \mapsto a^n$, la fonction exponentielle de base a se note encore $x \mapsto a^x$.*
4. *$(a^x)^y = a^{xy}$, $(a\,b)^x = a^x b^x$.*

5. *La fonction* $\exp_a$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$, *et* $(\exp_a)' = \exp'_a(0) \times \exp_a$.
6. *Il existe un nombre réel* a *et un seul, appelé nombre de Neper et noté* e, *tel que* $\exp'_a(0) = 1$, $e = 2,718281828459045235360$.

8.1.12.3 Fonctions logarithmes

Définition 8.39. *Soit* a *un nombre réel strictement positif et différent de* 1. *La fonction réciproque de* $\exp_a$ *est un isomorphisme monotone de* $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ *dans* $(\mathbb{R}, +)$ *appelé logarithme de base* a *et noté* $\log_a$.

Définition 8.40. *La fonction* $\log_e$ *s'appelle logarithme népérien et se note* ln.

Proposition 8.41.

1. *Elle est dérivable sur* $]0; +\infty[$ *et sa dérivée est la fonction* $x \mapsto \frac{1}{x}$.
2. *Pour tout couple* (a, b) *de nombres réels strictement positifs et différents de* 1, $\log_a(b) = \frac{1}{\log_b(a)} = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$.

Définition 8.42. *Le logarithme de base* 10 *s'appelle logarithme décimal.*

8.1.12.4 Fonctions puissances

Définition 8.43. *Soit* α *un nombre réel. La fonction* $f : x \mapsto x^\alpha$ *est appelé fonction puissance* α.

Proposition 8.44.

1. *C'est un endomorphisme monotone du groupe multiplicatif* $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.
2. *Suivant la valeur de l'exposant on a :*
   i. *si* $\alpha > 0$, f *est bijective strictement croissante,*
   ii. *si* $\alpha < 0$, f *est bijective strictement décroissante,*
   iii. *si* $\alpha = 0$, f *est constante et égale à* 1.
3. *Réciproquement, tout endomorphisme monotone de* $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ *est de la forme précédente.*
4. *(Comparaison des fonctions logarithmes, puissances et exponentielles) Soient* a *un nombre réel strictement supérieur à* 1, α *et* β *deux nombres réels strictement positifs. Alors :*
   i. $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha \exp_a(-\beta x) = 0$,
   ii. $\lim_{x \to +\infty} x^{-\beta} (\log_a(x))^\alpha = 0$,
   iii. $\lim_{x \to 0} x^\beta |\log_a(x)|^\alpha = 0$,
   iv. $\lim_{x \to -\infty} |x|^\beta \exp_a(\alpha x) = 0$.

8.1.12.5 Fonctions hyperboliques

Définition 8.45. $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$.

Proposition 8.46.

1. $e^x = \mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x)$,
2. $e^{-x} = \mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)$,
3. $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$,
4. *Formule d'addition, pour tout couple* (a, b) *de nombre réels :*
   i. $\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b)$,

ii. $\mathrm{ch}(a-b)=\mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b)-\mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b)$,

iii. $\mathrm{sh}(a+b)=\mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(b)+\mathrm{ch}(a)\mathrm{sh}(b)$,

iv. $\mathrm{sh}(a-b)=\mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(b)-\mathrm{ch}(a)\mathrm{sh}(b)$,

v. $\mathrm{th}(a+b)=\frac{\mathrm{th}(a)+\mathrm{th}(b)}{1+\mathrm{th}(a)\mathrm{th}(b)}$,

vi. $\mathrm{th}(a-b)=\frac{\mathrm{th}(a)-\mathrm{th}(b)}{1-\mathrm{th}(a)\mathrm{th}(b)}$.

5.

i. $\mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b)=\frac{1}{2}[\mathrm{ch}(a+b)+\mathrm{ch}(a-b)]$,

ii. $\mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b)=\frac{1}{2}[\mathrm{ch}(a+b)-\mathrm{ch}(a-b)]$,

iii. $\mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(b)=\frac{1}{2}[\mathrm{sh}(a+b)+\mathrm{sh}(a-b)]$.

6. Pour tout couple (a,b) de nombre réels :

i. $\mathrm{ch}(p)+\mathrm{ch}(q)=2\mathrm{ch}\Big(\frac{p+q}{2}\Big)\mathrm{ch}\Big(\frac{p-q}{2}\Big)$,

ii. $\mathrm{ch}(p)-\mathrm{ch}(q)=2\mathrm{sh}\Big(\frac{p+q}{2}\Big)\mathrm{sh}\Big(\frac{p-q}{2}\Big)$,

iii. $\mathrm{sh}(p)+\mathrm{sh}(q)=2\mathrm{sh}\Big(\frac{p+q}{2}\Big)\mathrm{ch}\Big(\frac{p-q}{2}\Big)$,

iv. $\mathrm{sh}(p)-\mathrm{sh}(q)=2\mathrm{sh}\Big(\frac{p-q}{2}\Big)\mathrm{ch}\Big(\frac{p+q}{2}\Big)$,

v. $\mathrm{th}(p)+\mathrm{th}(q)=\frac{\mathrm{sh}(p+q)}{\mathrm{ch}(p)\mathrm{ch}(q)}$,

vi. $\mathrm{th}(p)-\mathrm{th}(q)=\frac{\mathrm{sh}(p-q)}{\mathrm{ch}(p)\mathrm{ch}(q)}$.

7. Pour tout réal a :

i. $\mathrm{ch}(2a)=\mathrm{ch}^2(a)+\mathrm{sh}^2(a)=2\mathrm{ch}^2(a)-1=2\mathrm{sh}^2(a)+1$,

ii. $\mathrm{sh}(2a)=2\mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(a)$,

iii. $\mathrm{ch}^2(a)=\frac{\mathrm{ch}(2a)+1}{2}$,

iv. $\mathrm{sh}^2(a)=\frac{\mathrm{ch}(2a)-1}{2}$,

v. $\mathrm{ch}(2a)=\frac{1+\mathrm{th}^2(a)}{1-\mathrm{th}^2(a)}$,

vi. $\mathrm{sh}(2a)=\frac{2\mathrm{th}(a)}{1-\mathrm{th}^2(a)}$,

vii. $\mathrm{th}(2a)=\frac{2\mathrm{th}(a)}{1+\mathrm{th}^2(a)}$,

viii. $\exp(2a)=\frac{1+\mathrm{th}(a)}{1-\mathrm{th}(a)}$,

ix. $\mathrm{th}(a)=\frac{\mathrm{sh}(2a)}{1+\mathrm{ch}(2a)}=\frac{\mathrm{ch}(2a)-1}{\mathrm{sh}(2a)}$, *si* $a\neq 0$,

x. $\mathrm{ch}(3a)=4\mathrm{ch}^3(a)-3\mathrm{ch}(a)$,

xi. $\mathrm{sh}(3a)=\frac{3\mathrm{th}(a)+\mathrm{th}^3(a)}{1+3\mathrm{th}^2(a)}$,

xii. $\sum_{p=0}^{n}\mathrm{ch}(a+p\,h)=\frac{\mathrm{sh}(n+1)\frac{h}{2}\mathrm{ch}\Big(a+\frac{n\,h}{2}\Big)}{\mathrm{sh}\Big(\frac{h}{2}\Big)}$,

xiii. $\sum_{p=0}^{n}\mathrm{sh}(a+p\,h)=\frac{\mathrm{sh}(n+1)\frac{h}{2}\mathrm{sh}\Big(a+\frac{n\,h}{2}\Big)}{\mathrm{sh}\Big(\frac{h}{2}\Big)}$.

8. Formule de Moivre et applications : Pour tout entier rationnel n, $(\mathrm{ch}(a)+\mathrm{sh}(a))^n=\mathrm{ch}(n\,a)+\mathrm{sh}(n\,a)$, $(\mathrm{ch}(a)-\mathrm{sh}(a))^n=\mathrm{ch}(n\,a)-\mathrm{sh}(n\,a)$.

9. Pour tout entier n non nul,

i. $\mathrm{ch}(n\,a)=\mathrm{ch}^n(a)+C_n^2\mathrm{ch}^{n-2}(a)\mathrm{sh}^2(a)+\ldots+C_n^{2p}\mathrm{ch}^{n-2p}(a)\mathrm{sh}^{2p}(a)+\ldots,$

ii. $\mathrm{sh}(n\,a)=C_n^1\mathrm{ch}^{n-1}(a)\mathrm{sh}(a)+C_n^3\mathrm{ch}^{n-3}(a)\mathrm{sh}^3(a)+\ldots+C_n^{2p+1}\mathrm{ch}^{n-2p-1}(a)\mathrm{sh}^{2p+1}(a)+\ldots,$

iii. $\mathrm{th}(n\,a)=\frac{C_n^1\mathrm{th}(a)+C_n^3\mathrm{th}^3(a)+\ldots+C_n^{2p+1}\mathrm{th}^{2p+1}(a)+\ldots}{1+C_n^2\mathrm{th}^2(a)+\ldots+C_n^{2p}\mathrm{th}^{2p}(a)+\ldots}.$

10. Formule de linéarisation, pour tout entier naturel n :

i. $\mathrm{ch}^{2p}(a)=\frac{1}{2^{2p-1}}\Big[\sum_{q=0}^{p-1}C_{2p}^q\mathrm{ch}[(2p-2q)a]+\frac{1}{2}C_{2p}^p\Big],$

ii. $\mathrm{sh}^{2p}(a)=\frac{1}{2^{2p-1}}\Big[\sum_{q=0}^{p-1}(-1)^qC_{2p}^q\mathrm{ch}[(2p-2q)a]+\frac{(-1)^p}{2}C_{2p}^p\Big].$

11. Pour tout entier naturel p,

i. $\mathrm{ch}^{2p+1}(a)=\frac{1}{2^{2p}}\sum_{q=0}^{p}C_{2p+1}^q\mathrm{ch}[(2p+1-2q)a],$

ii. $\mathrm{sh}^{2p+1}(a)=\frac{1}{2^{2p}}\sum_{q=0}^{p}(-1)^qC_{2p+1}^q\mathrm{sh}[(2p+1-2q)a].$

8.1.12.6 Fonctions hyperboliques réciproques

Définition 8.47. *Pour tout nombre réel x supérieur à 1,* $\mathrm{Arg\,ch}(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$.

Définition 8.48. *Pour tout nombre réel x,* $\mathrm{Arg\,sh}(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

Définition 8.49. *Pour tout nombre réel x appartenant à $]-1;1[$,* $\mathrm{Arg\,th}(x)=\frac{1}{2}\ln\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big)$.

8.1.12.7 Fonctions circulaires

$\sum_{p=0}^{n}\cos(a+p\,h)=\frac{\sin(n+1)\frac{h}{2}\cos\Big(a+\frac{n\,h}{2}\Big)}{\sin\Big(\frac{h}{2}\Big)}$

$\sum_{p=0}^{n}\sin(a+p\,h)=\frac{\sin(n+1)\frac{h}{2}\sin\Big(a+\frac{n\,h}{2}\Big)}{\sin\Big(\frac{h}{2}\Big)}$

Formule de Moivre et applications, pour tout entier rationnel n

$(\cos(a)+i\sin(a))^n=\cos(n\,a)+i\sin(n\,a)$

$(\cos(a)-i\sin(a))^n=\cos(n\,a)-i\sin(n\,a)$

Pour tout entier naturel non nul n,

$\cos(n\,a)=\cos^n(a)-C_n^2\cos^{n-2}(a)\sin^2(a)+\ldots+(-1)^pC_n^{2p}\cos^{n-2}(a)\sin^{2p}(a)+\ldots$

$\sin(n\,a)=C_n^1\cos^{n-1}(a)\sin(a)-C_n^3\cos^{n-3}(a)\sin^3(a)+\ldots+(-1)^pC_n^{2p+1}\cos^{n-2p-1}(a)\sin^{2p+1}(a)+\ldots$

$\tan(n\,a)=\frac{C_n^1\tan(a)-C_n^3\tan^3(a)+\ldots+(-1)^pC_n^{2p+1}\tan^{2p+1}(a)+\ldots}{1-C_n^2\tan^2(a)+\ldots+(-1)^pC_n^{2p}\tan^{2p}(a)+\ldots}$, si $a,n\,a\not\equiv\frac{\pi}{2}\,(\mathrm{mod}.\pi)$.

Formule de linéarisation, pour tout entier naturel non nul p,

$\cos^{2p}(a)=\frac{1}{2^{2p-1}}\Big[\sum_{q=0}^{p-1}C_{2p}^q\cos[(2p-2q)a]+\frac{1}{2}C_{2p}^p\Big],$

$\sin^{2p}(a)=\frac{(-1)^p}{2^{2p-1}}\Big[\sum_{q=0}^{p-1}(-1)^qC_{2p}^q\cos[(2p-2q)a]+\frac{(-1)^p}{2}C_{2p}^p\Big].$

Pour tout entier naturel p,

$\cos^{2p+1}(a)=\frac{1}{2^{2p}}\sum_{q=0}^{p}C_{2p+1}^q\cos[(2p+1-2q)a],$

$\sin^{2p+1}(a)=\frac{(-1)^p}{2^{2p}}\sum_{q=0}^{p}(-1)^qC_{2p+1}^q\sin[(2p+1-2q)a].$

Valeurs remarquable des fonctions circulaires

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		0

8.1.12.8 Fonctions circulaires réciproques

Pour tout nombre réel x appartenant à $[-1;1]$, $\operatorname{Arc}\sin(x)+\operatorname{Arc}\cos(x)=\frac{\pi}{2}$

Pour tout nombre réel non nul a,

a	$]-\infty;0[$	$]0;+\infty[$
$\operatorname{Arc}\tan(a)+\operatorname{Arc}\tan\left(\frac{1}{a}\right)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$

Pour tout couple (a,b) de nombres réels tel que $a\,b\neq 1$,

a,b	$a\,b<1$	$a\,b>1, a,b>0$	$a\,b>1, a,b<0$
$\operatorname{Arc}\tan(a)+\operatorname{Arc}\tan(b)-\operatorname{Arc}\tan\left(\frac{a+b}{1-a\,b}\right)$	0	π	$-\pi$

8.2 Fonction vectorielle d'une variable réelle (i.e. définie sur $\mathbb{R}$)

Les définition et les propriétés relatives aux fontions numériques ne faisant intervenir que la linéarité s'étendent aux fonctions d'une variable réelle à valeurs dans un espace vectoriel normé F de dimension finie.

8.2.1 Dérivation

8.2.1.1 Dérivée d'un produit

Proposition 8.50. *Soient S une application bilinéaire de $F\times G$ dans H, f, g des applications de classe C^1 sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs respectivement dans F, G. Alors $h=S(f,g)$ est de classe C^1 sur I et $Dh=S(Df,g)+S(f,Dg)$.*

8.2.1.2 Inégalité des accroissements finis

Proposition 8.51. *Soit f une application continue sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans Fn dérivable dur $]a,b[$ et telle que f' soit bornée sur $]a,b[$. Alors $\|f(b)-f(a)\|\leqslant(b-a)\sup_{x\in]a,b[}\|f'(x)\|$.*

8.2.1.3 Caractérisation des applications constantes

Proposition 8.52. *Soit f une application continue de I dans F, dérivable sur l'intérieur de I. Pour que f soit constante, il faut et il suffit que, pour tout point x intérieur à I, $f'(x)=0$.*

8.2.1.4 Prolongement des application de classe C^1

Proposition 8.53. *Soit f une application de classe C^1 sur I privé d'un point a à valeurs dans F. Si f' admet un limite au point a, alors f se prolonge en une application de classe C^1 sur I.*

8.2.2 Intégration

Proposition 8.54. *L'application $f\mapsto\int_a^b f(t)dt$ est linéaire. En outre, $a\leqslant b$, $\left\|\int_a^b f(t)dt\right\|\leqslant\int\|f(t)\|dt$.*

Remarque 8.55. La théorie des primitives, de l'intégration par parties et du changement de variable est calquée sur le cas des fonctions à valeurs réelles.

8.2.2.1 Théorème des accroissements finis

Théorème 8.56. *Soient f une application de classe C^1 sur $[a,b]$ à valeur dans F et g une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$ à valeurs réelles. Si $\|f'\|\leqslant g'$, alors $\|f(g)-f(a)\|\leqslant g(b)-g(a)$.*

8.2.2.2 Formule de Taylor

Proposition 8.57. *Soit n un entier naturel, f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I. Soit a un point de I, pour tout point x de I, on pose $r_n(x) = f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!}$.*

1. *Le nombre $r_n(x)$ s'appelle reste, on peut l'écrire sous forme intégrale (dite de Laplace) :*
   $r_n(x) = \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt = (x-a)^{n+1}\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(a+(x-a)t)dt.$
2. $\|r_n(b)\| \leqslant \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\sup_{x\in]a,b[}\|f^{(n+1)}(x)\|$ *(majoration de Lagrange).*

Remarque 8.58. La théorie des développements limités s'étend sans changement, c'est le cas en particulier pour la formule de Taylor-Young.

8.3 Fonction de plusieurs variables

Insérer ici la notion de différentielle

8.4 Suite numérique

8.5 Fonction réelle ou complexe d'une variable réelle

8.5.1 Continuité

8.5.1.1 Continuité sur un intervalle

Théorème 8.59. *("Théorème des valeurs intermédiaires")*
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$ une application continue, $(a,b) \in I^2$ tel que $f(a) \leqslant f(b)$.
Alors f atteint toute valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$.
Autrement dit $\forall \gamma \in [f(a); f(b)], \exists c \in I, \gamma = f(c)$.

Démonstration. Voir Analyse 1 J.M. Monier p.110 ou Cours mathématiques premier cycle J.Dixmier □

8.5.1.2 Continuité sur un intervalle fermé

Théorème 8.60. *Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, tels que $a \leqslant b$, et $f: [a;b] \to \mathbb{R}$ une application.*
Si f est continue, alors f est bornée et atteint ses bornes.

Démonstration. Voir Analyse 1 J.M. Monier p.113 ou Cours mathématiques premier cycle J.Dixmier □

8.6 Comparaison et évaluation locale des fonctions à valeur dans $\mathbb{R}$ (i.e. fonctions numériques)

10.4 ou sous rubrique de 10.3 mais dans ce cas il faudra changer le titre de 10.3. On peut généraliser et définir la domination (une application à valeur dans un e.v.n.) négligeable devant une application numérique. Puis voir Monier Analyse 3 page 176.

Pour les suites $I = \mathbb{R}$ autrement $I = \mathbb{R}$.

8.6.1 Négligeabilité, Domination, Equivalence

8.6.1.1 Domination

Définition 8.61. *Soit $f, \varphi: I \to \mathbb{R}$ et $x \in I - \{a\}$ tel que $\varphi(x) \neq 0$.*

*On dit que f est **dominée par** φ au voisinage de a si et seulement si il existe une application $c: I \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in I$; $f(x) = c(x)\varphi(x)$, c bornée au voisinage de a. On note : $f \underset{a}{\preccurlyeq} \varphi$ (Notation de Hardy) ou $f \underset{a}{=} O(\varphi)$ (Notation de Landau).*

Remarque 8.62. On trouve la définition écrite sous cette forme :

Soit $f, \varphi: I \to \mathbb{R}$, et (a) un point de $\mathbb{R}$ adhérent à I. On dit que f est dominée par φ si et seulement s'il existe un voisinage V de (a) et un nombre réel positif β tels que $\forall x \in V \cap I$, $|f(x)| \leqslant \beta |\varphi(x)|$.

8.6.1.2 Négligeabilité

Définition 8.63. *Soit $f, \varphi: I \to \mathbb{R}$ et $x \in I - \{a\}$ tel que $\varphi(x) \neq 0$.*

*On dit que f est **négligeable** devant φ au voisinage de (a) si et seulement s'il existe une application $\varepsilon: I \to \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in I$, $f(x) = \varepsilon(x)\varphi(x)$ et $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.*

On note : $f \underset{a}{\ll} \varphi$ (Notation Hardy) ou $f \underset{a}{=} o(\varphi)$ (Notation Landau).

Remarque 8.64. On trouve la définition écrite sous cette forme :

Soit $f, \varphi: I \to \mathbb{R}$, et (a) un point de $\mathbb{R}$ adhérent à I. On dit que f est négligeable devant φ si et seulement si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de (a) tel que : $\forall x \in V \cap I$, $|f(x)| \leqslant \varepsilon |\varphi(x)|$.

Proposition 8.65. *Si f est négligeable devant φ alors f est dominée par φ.*

8.6.1.3 Equivalence

Définition 8.66. *Soit $f, \varphi: I \to \mathbb{R}$ et $x \in I - \{a\}$ tel que $f(x) \neq 0$ et $\varphi(x) \neq 0$.*

*On dit que f est **équivalente à** φ au voisinage de (a) si et seulement s'il existe une application $\lambda: I \to \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in I$, $f(x) = \lambda(x)\varphi(x)$ et $\lim_{x \to a} \lambda(x) = 1$.*

On note : $f \underset{a}{\sim} \varphi$.

Remarque 8.67. On dit que f est équivalente à g au voisinage de (a) si et seulement si $f = o(g)$.

8.6.1.4 Similitude

(définition à revoir)

Définition 8.68. *Soit $f, \varphi: I \to \mathbb{R}$ et $x \in I - \{a\}$ tel que $f(x) \neq 0$ et $\varphi(x) \neq 0$.*

*On dit que f est **semblable à** φ au voisinage de (a) si et seulement s'il existe une application $\lambda: I \to \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in I$, $f(x) = \lambda(x)\varphi(x)$ et $\lim_{x \to a} \lambda(x) = 1$.*

On note : $f \underset{a}{\asymp} \varphi$ ou $f = \Theta(\varphi)$.

Remarque 8.69. On dit que f est semblable à g au voisinage de (a) si et seulement si $f = O(g)$ et $g = O(f)$.

Remarque 8.70.

1. Voir remarque livre monier page 40 Analyse 2
2. Les relations de similitude et d'équivalence sont des relations d'équivalence, compatible avec la multiplication mais pas avec l'addition.

8.6.1.5 Propriétés

Rajouter des exemples usuels voir monier analyse 2 et 3. Monier page 41.

Soit f; g; φ; ψ; u; v sont des fonctions définies au voisinage de a et à valeur réelle. $\lambda \in \mathbb{R}$. h une fonction définie au voisinage d'un élément b de $\bar{\mathbb{R}}$ à valeur dans $\mathbb{R}$.

$\left\{ \begin{smallmatrix} f=o(\varphi) \\ g=o(\varphi) \end{smallmatrix} \right. \Rightarrow f+g=o(\varphi)$	$\left\{ \begin{smallmatrix} f=O(\varphi) \\ g=O(\varphi) \end{smallmatrix} \right. \Rightarrow f+g=O(\varphi)$
$f=o(\varphi) \Rightarrow \lambda f=o(\varphi)$	$f=O(\varphi) \Rightarrow \lambda f=O(\varphi)$
$\left\{ \begin{smallmatrix} f=o(\varphi) \\ g=o(\psi) \end{smallmatrix} \right. \Rightarrow fg=o(\varphi\psi)$	$\left\{ \begin{smallmatrix} f=O(\varphi) \\ g=O(\psi) \end{smallmatrix} \right. \Rightarrow fg=O(\varphi\psi)$
	$\left\{ \begin{smallmatrix} f=O(\varphi) \\ \varphi=O(u) \end{smallmatrix} \right. \Rightarrow f=O(u)$
$f=o(\varphi) \Rightarrow f=O(\varphi)$	$\left\{ \begin{smallmatrix} f=O(u) \\ g=O(\psi) \end{smallmatrix} \right. \Rightarrow f\times g=o(\varphi\psi)$
$\left\{ \begin{smallmatrix} f=o(\varphi) \\ \varphi=O(u) \end{smallmatrix} \right. \Rightarrow f=o(u)$	$\left\{ \begin{smallmatrix} f=O(\varphi) \\ \varphi=o(u) \end{smallmatrix} \right. \Rightarrow f=o(u)$
$\left\{ \begin{smallmatrix} f=\underset{a}{o}(\varphi) \\ \lim_b h=a \end{smallmatrix} \right. \Rightarrow f\circ h=\underset{b}{o}(\varphi\circ h)$	$\left\{ \begin{smallmatrix} f=\underset{a}{O}(\varphi) \\ \lim_b h=a \end{smallmatrix} \right. \Rightarrow f\circ h=\underset{b}{O}(\varphi\circ h)$

8.6.1.6 Exemples fondamentaux au voisinage de 0

$\mathrm{sh}(x)\sim x$	$\sin(x)\sim x$
$\mathrm{th}(x)\sim x$	$\tan(x)\sim x$
$\mathrm{Arg\,sh}(x)\sim x$	$\mathrm{Arc}\sin(x)\sim x$
$\mathrm{Arg\,th}(x)\sim x$	$\mathrm{Arc}\tan(x)\sim x$
$\mathrm{ch}(x)-1\sim\frac{x^2}{2}$	$1-\cos(x)\sim\frac{x^2}{2}$
$\mathrm{Arg\,ch}(1+x)\sim\sqrt{2\,x}$	$\mathrm{Arc}\cos(1-x)\sim\sqrt{2\,x}$ si $x\geqslant 0$
$\ln(1+x)\sim x$	$e^x-1\sim x$

8.6.2 Developpement dans une échelle de comparaison

8.6.2.1 Développement limité

□

8.6.2.2 Développement asymptotique

8.7 Fonctions et résultats usuels

8.7.1 Support d'une fonction numérique

Définition 8.71. *On appelle* ***support d'un fonction numérique*** *définie sur un espace topologique E est l'adhérence de l'ensemble des points de E qui ont une image non nulle.*

Définition 8.72. *On appelle fonction numérique à support compact, une fonction numérique nulle en dehors d'un intervalle compact.*

Remarque 8.73. L'ensemble des fonctions continues et à support compact est noté $C_C(U)$.

8.7.2 Fonctions numériques usuelles définies sur $\mathbb{R}$

8.7.2.1 Fonctions logarithmiques et exponentielles

8.7.2.2 Fonctions puisances

8.7.2.3 Fonctions hyperboliques

$\mathrm{ch}(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\mathrm{ch}'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$=sh(x), $\mathrm{sh}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $\mathrm{sh}'(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\mathrm{ch}(x)$

8.7.2.4 Fonctions hyperboliques récriproques

$\arg\operatorname{ch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$
$\arg\operatorname{sh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
$\arg\operatorname{th}(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$

8.7.2.5 Fonctions circulaires

Il existe plusieurs constructions du cos(a), sin(a) et tg(a) d'un nombre a.
-L'approche géométrique d'Euclide
-L'approche géométrique vectorielle
-L'approche analytique

Formules élémentaires

$\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$
$1 + \operatorname{tg}^2(a) = \frac{1}{\cos^2(a)}$
$1 + \cot^2(a) = \frac{1}{\sin^2(x)}$
$\operatorname{tg}(a) = \frac{\sin(a)}{\cos(a)}$
$\cot(a) = \frac{\cos(a)}{\sin(a)}$
$\cos^2(a) = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(a)}$
$\sin^2(a) = 1 + \cot^2(a)$

Formules d'addition
$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$
$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg}(a)+\operatorname{tg}(b)}{1-\operatorname{tg}(a)\operatorname{tg}(b)}$
$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg}(a)-\operatorname{tg}(b)}{1+\operatorname{tg}(a)\operatorname{tg}(b)}$

Formules de multiplication par 2
$\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 = 1 - 2\sin^2(a) = \cos^2(a) - \sin^2(b)$
$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$
$\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{2\operatorname{tg}(\theta)}{1-\operatorname{tg}^2(\theta)}$
si $t = \operatorname{tg}(\frac{a}{2})$ alors
$\cos(a) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
$\sin(a) = \frac{2t}{1+t^2}$
$\operatorname{tg}(a) = \frac{2t}{1-t^2}$

Formule de multiplication par 3
$\cos(3a) = 4\cos^3(a) - 3\cos(a)$
$\sin(3a) = -4\sin^3(a) + 3\sin(a)$
$\operatorname{tg}(3a) = \frac{3\operatorname{tg}(a) - \operatorname{tg}^3(a)}{1-3\operatorname{tg}^2(a)}$

Transformation de produits en sommes
$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$
$\sin(a)\sin(b) = -\frac{1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)]$

$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$
$\cos(a)\sin(b) = \frac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)]$
$\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2}$
$\sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}$

Transformation de sommes en produits
$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\cos\Big(\frac{a-b}{2}\Big)$
$\cos(a) - \cos(b) - - 2\sin\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\sin\Big(\frac{a-b}{2}\Big)$
$\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\cos\Big(\frac{a-b}{2}\Big)$
$\sin(a) - \sin(b) = 2\sin\Big(\frac{a-b}{2}\Big)\cos\Big(\frac{a+b}{2}\Big)$
$\mathrm{tg}(a) + \mathrm{tg}(b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a)\cos(b)}$
$\mathrm{tg}(a) - \mathrm{tg}(b) = \frac{\sin(a-b)}{\cos(a)\cos(b)}$
$1 + \cos(a) = 2\cos^2\big(\frac{a}{2}\big)$
$1 - \cos(a) = 2\sin^2\big(\frac{a}{2}\big)$

Relations trigonométriques vectorielles
$\cos(\widehat{\vec{u}\,,\vec{v}}\,) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\,\| \times \|\vec{v}\,\|}$
$\sin(\widehat{\vec{u}\,,\vec{v}}\,) = \frac{\det_{(\vec{i}\,,\vec{j}\,)}(\vec{u}.\vec{v}\,)}{\|\vec{u}\,\| \times \|\vec{v}\,\|}$
$(\vec{u}\,,\vec{v}\,) \neq (\vec{0},\vec{0})$

Angles opposés
$\cos(-x) = \cos(x)$
$\sin(-x) = -\sin(x)$
$\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}(x)$

Angles supplémentaires
$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
$\sin(\pi - x) = \sin(x)$
$\mathrm{tg}(\pi - x) = -\mathrm{tg}(x)$

Angles complémentaires
$\cos\big(\frac{\pi}{2} - x\big) = \sin(x)$
$\sin\big(\frac{\pi}{2} - x\big) = \cos(\mathrm{x})$
$\mathrm{tg}\big(\frac{\pi}{2} - x\big) = \frac{1}{\mathrm{tg}(x)} = \cot(x)$

Angles de différence π
$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
$\mathrm{tg}(\pi + x) = -\mathrm{tg}(x)$

Angles de différence $\frac{\pi}{2}$
$\cos\big(\frac{\pi}{2} + x\big) = -\sin(x)$
$\sin\big(\frac{\pi}{2} + x\big) = \cos(x)$
$\mathrm{tg}\big(\frac{\pi}{2} + x\big) = -\frac{1}{\mathrm{tg}(x)} = -\cot(x)$

Equations de base
$\cos(u) = \cos(v) \Leftrightarrow u \equiv v[2\pi]$ ou $u \equiv -v[2\pi]$

$\sin(u) = \sin(v) \Leftrightarrow u \equiv v[2\pi]$ ou $u \equiv \pi - u[2\pi]$
$\mathrm{tg}(u) = \mathrm{tg}(v) \Leftrightarrow u \equiv v[2\pi]$ ou $u \equiv \pi + v[2\pi]$ autrement dit $u \equiv v[\pi]$, $u, v \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi$

8.7.2.6 Fonctions circulaires réciproques

Rajouter : définition de la dérivée CTE 2003/2004 page 1 chapitre 1.
$(f+g)' = f' + g'$
$(\lambda f)' = \lambda (f')$
$f, g \in C^1(I)$: $f + g \in C^1(I)$.
Ces propriétés permettent de montrer que $C^n(I)$ et $C^\omega(I)$ sont des espaces vectoriels.
$(f \times g)^n(x) = \sum C_n^k \times f^{(n-k)}(a) \times f^{(k)}(a)$
Les espaces C_n^k ???

8.7.3 Tableau des dérivées usuelles

On pose $P = \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ et $Q = \pi\mathbb{Z}$.

Fonctions	Paramètres	Définies sur	Dérivables sur	Dérivées
x^n	$n \in \mathbb{Z}$		$\mathbb{R}^*$	$n\,x^{n-1}$
x^α	$\alpha \in \mathbb{R}$		$\mathbb{R}_+^*$	$\alpha\,x^{\alpha-1}$
$\frac{1}{x}$				$-\frac{1}{x^2}$
e^{cx}	$c \in \mathbb{C}$		$\mathbb{R}$	$c\,e^{cx}$
a^x	$a \in \mathbb{R}_+^*$		$\mathbb{R}$	$a^x \ln(a)$
$\ln\lvert x\rvert$			$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x}$
$\log_a\lvert x\rvert$	$a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$		$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x\ln(a)}$
$\mathrm{ch}(x)$			$\mathbb{R}$	$\mathrm{sh}(x)$
$\mathrm{sh}(x)$			$\mathbb{R}$	$\mathrm{ch}(x)$
$\mathrm{th}(x)$			$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1 - \mathrm{th}^2(x)$
$\coth(x)$			$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{\mathrm{sh}^2(x)} x = 1 - \coth^2(x)$
$\cos(x)$			$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$			$\mathbb{R}$	$\cos(x)$
$\tan(x)$			$\mathbb{R} - P$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$\cot(x)$			$\mathbb{R} - Q$	$-\frac{1}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x)$
$\arg\mathrm{ch}(x)$			$]1, +\infty[$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\arg\mathrm{sh}(x)$			$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\arg\mathrm{th}(x)$			$]-1, 1[$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\arccos(x)$			$]-1, 1[$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arcsin(x)$			$]-1, 1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$			$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sqrt{x}$			$\mathbb{R}^{*+}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

8.7.4 Tableau des primitives usuelles

On pose $P = \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ et $Q = \pi\mathbb{Z}$.

Fonctions	Parmètres	Primitives	Intervalles
$(x-c)^n$	$n\in\mathbb{Z}, -\{-1\}, c\in\mathbb{C}$	$\frac{(x-c)^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$(x-a)^\alpha$	$\alpha\in\mathbb{R}-\{-1\}, a\in\mathbb{R}$	$\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$]a;+\infty[$
$\frac{1}{x-c}$	$c=a+i\,b; a,b\in\mathbb{R},$	$\ln\lvert x-c\rvert + i\arg(x-c)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x-a}$	$a\in\mathbb{R}$	$\ln\lvert x-a\rvert$	$\mathbb{R}-\{a\}$
e^{cx}	$c\in\mathbb{C}^*$	$\frac{e^{cx}}{c}$	$\mathbb{R}$
a^x			
$\ln(x)$		$x\,(\ln(x)-1)$	$\mathbb{R}_+^*$
$\log_a\lvert x\rvert$			
$\mathrm{ch}(x)$		$\mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{sh}(x)$		$\mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{th}(x)$		$\ln(\mathrm{ch}(x))$	$\mathbb{R}$
$\coth(x)$		$\ln\lvert\mathrm{sh}(x)\rvert$	$\mathbb{R}^*$
$\mathrm{ch}^2(x)$		$\frac{\mathrm{sh}(2x)}{4}+\frac{x}{2}$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{sh}^2(x)$		$\frac{\mathrm{sh}(2x)}{4}-\frac{x}{2}$	$\mathbb{R}$
$\coth^2(x)$		$x-\coth(x)$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}$		$2\arctan(e^x)=2\arctan\mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right)=\arctan(\mathrm{sh}(x))$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\mathrm{sh}(x)}$		$\ln\left\lvert\mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right\rvert$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$		$\mathrm{th}(x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\mathrm{sh}^2(x)}$		$-\coth(x)$	$\mathbb{R}^*$
$\cos(x)$		$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$		$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$		$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$	$\mathbb{R}-P$
$\cot(x)$		$\ln\lvert\sin(x)\rvert$	$\mathbb{R}-Q$
$\cos^2(x)$		$\frac{x}{2}+\frac{\sin(2x)}{4}$	$\mathbb{R}$
$\sin^2(x)$		$\frac{x}{2}-\frac{\sin(2x)}{4}$	$\mathbb{R}$
$\tan^2(x)$		$\tan(x)-x$	$\mathbb{R}-P$
$\cot^2(x)$		$-\cot(x)-x$	$\mathbb{R}-Q$
$\frac{1}{\cos(x)}$		$\ln\left\lvert\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert$	$\mathbb{R}-P$
$\frac{1}{\sin(x)}$		$\ln\left\lvert\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right\rvert$	$\mathbb{R}-Q$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$		$\tan(x)$	$\mathbb{R}-P$
$\frac{1}{\sin^2(x)}$		$-\cot(x)$	$\mathbb{R}-Q$
$\frac{1}{\cos^3(x)}$		$\frac{\sin(x)}{2\cos^2(x)}+\frac{1}{2}\ln\left\lvert\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert$	$\mathbb{R}-P$
$\frac{1}{\cos^4(x)}$		$\tan(x)+\frac{\tan^3(x)}{3}$	$\mathbb{R}-P$
$\frac{1}{\sin^3(x)}$		$\frac{1}{2}\ln\left\lvert\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right\rvert-\frac{1}{2}\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$	$\mathbb{R}-Q$
$\frac{1}{\sin^4(x)}$		$-\cot(x)-\frac{\cot^3(x)}{3}$	$\mathbb{R}-Q$
$\frac{1}{1+x^2}$		$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{a^2+x^2}$	$a\in\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$	$\mathbb{R}$

$\frac{1}{1-x^2}$		$\arg\operatorname{th}(x)$	$]-1,1[$
$\frac{1}{1-x^2}$		$\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert$	$\mathbb{R}-\{-1;1\}$
$\frac{1}{a^2-x^2}$	$a\in\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{2\,a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert$	$\mathbb{R}-\{-a;a\}$
$\frac{1}{(x^2+1)^2}$		$\frac{1}{2}\arctan(x)+\frac{x}{2(x^2+1)}$	$\mathbb{R}$
$\frac{x^2}{(x^2+1)^2}$		$\frac{1}{2}\arctan(x)-\frac{x}{2(x^2+1)}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$		$\arg\operatorname{ch}(x)$	$]1,+\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$		$-\arg\operatorname{ch}(-x)$	$]-\infty,-1[$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$		$\ln\lvert x+\sqrt{x^2-1}\rvert$	$\mathbb{R}-[-1;1]$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$a\in\mathbb{R}_+^*$	$\ln\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\rvert$	$\mathbb{R}-[-a;a]$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$		$\arg\operatorname{sh}(x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$a\in\mathbb{R}_+^*$	$\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$\arcsin(x)$	$]-1,1[$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$a\in\mathbb{R}_+^*$	$\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$	$]-a,a[$
$e^{ax}\cos(b\,x)$	$a,b\in\mathbb{C}^*, a^2+b^2\neq 0$	$\frac{e^{a\,x}}{a^2+b^2}\left(a\cos(b\,x)+b\sin(b\,x)\right)$	$\mathbb{R}$
$e^{ax}\sin(b\,x)$	$a,b\in\mathbb{C}^*, a^2+b^2\neq 0$	$\frac{e^{a\,x}}{a^2+b^2}\left(a\sin(b\,x)-b\cos(b\,x)\right)$	$\mathbb{R}$

Chapitre 9

Série d'un espace vectoriel normé. Suites et séries d'applications

9.1 Série d'un espace vectoriel normé.

Définition 9.1. *Soit E, un espace vectoriel normé. On appelle série tout couple* $A=((u_n);(s_n))$ *de deux suites de E tel que pour tout entier naturel p,* $s_p=\sum_{n=0}^{p} u_n$. *L'élément* u_n *s'appelle terme d'ordre n de A et l'élément* s_n *s'appelle somme partielle d'ordre n de A. La suite* (u_n) *s'appelle terme général de la série A et la suite* (s_n) *suite des sommes partielles de A.*

Les suites numériques réelles ou complexes et les suites de fonctions sont des exemples de la définition précédente. Elles doivent être traitées dans le chapitre des nombres réels, complexes et des espaces de fonctions par exemple. Dans ce cas $E=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$... ou un espace de fonction. Pour ce chapitre, il faudrait reprendre toutes les définitions des suites réelles ou complexes, pour les adapter. C'est ce qui a était ci-dessous partiellement, peut-être faudra-t-il supprimer certaines propriétés ou plus simplement les mettre en exemple.

9.1.1 Convergence

Définition 9.2. *On appelle* ***série*** *tout couple* $A=((u_n),(s_n))$ *constitué de deux suites de nombres complexes telles que, pour tout entier naturel p,* $s_p=\sum_{n=0}^{p} u_n$. *L'élément* u_n *s'appelle* ***terme d'ordre n*** *de A, et l'élément* s_n *s'appelle* ***somme partielle d'ordre n*** *de A. La suite* (u_n) *s'appelle* ***terme général*** *de la série A, et la suite* (s_n), ***suite des sommes partielles*** *de A.*

Définition 9.3. *Soit E un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. On appelle* ***somme de deux séries*** $A=((u_n),(s_n))$ *et* $B=((v_n),(t_n))$ *la série de terme général* (u_n+v_n).

Proposition 9.4. *Il est immédiat que* $A+B=((u_n+v_n),(s_n+t_n))$.

Définition 9.5. *Soit E un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. On appelle* ***produit d'une série*** $A=((u_n),(s_n))$ ***par*** $\alpha\in\mathbb{K}$ *(*α *un scalaire) la série, notée* αA, *de terme général* (αu_n).

Proposition 9.6.

1. *Il est immédiat que* $\alpha A=((\alpha u_n),(\alpha s_n))$.
2. *Muni des deux lois précédentes, l'ensemble des séries est un espace vectoriel.*

Séries convergentes.

Définition 9.7. *Soit E un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. On dit qu'une* ***série*** $A=((u_n),(s_n))$ *est* ***convergente*** *(resp.* ***divergente****) si et seulement si la suite* (s_n) *est convergente (resp. divergente).*

Définition 9.8. *Soit E un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Lorsque la série A est convergente, la limite de la suite* (s_n) *s'appelle* ***somme de la série*** *A et se note* $s(A)$, *ou encore* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, $s(A)=\lim_{p\to+\infty} s_p=\lim_{p\to+\infty}\sum_{n=1}^{p} u_n$.

Définition 9.9. *On appelle* ***reste à l'ordre p****, et on note* r_p, *ou encore* $\sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n$, *le nombre complexe* $s(A)-s_p$ *:* $r_p=\lim_{q\to+\infty}\sum_{n=p+1}^{q} u_n$.

Proposition 9.10. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

1. *L'ensemble $\sum_c = (\mathbb{C})$ des séries convergentes est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\sum(C)$, et l'application $s: A \mapsto s(A)$ est une forme linéaire sur $\sum_c(\mathbb{C})$.*
2. *(Condition nécessaire de convergence) Le terme général d'une série convergente converge vers 0.*
3. *(Critère de Cauchy de convergence des séries) Si E est un esapce de Banach. Soit $A = ((u_n), (s_n))$ une série de E pour que la série A converge, il faut et il suffit que la suite (s_n) soit une suite de Cauchy, c'est-à-dire que, pour tout nombre réel strictement positif ε, il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout couple (p, q) d'entiers naturels tel que $q > p \geqslant n_0$, $\left\| \sum_{n=p+1}^{q} u_n \right\|_E \leqslant \varepsilon$.*

Démonstration. Pour la preuve, il suffit d'écrire que s_n est une suite de Cauchy. □

9.1.2 Convergence normale et semi-convergence

Dans la version première, il y avait absolue et normale. Il me semble logique que normale soit le plus adapté car nous sommes dans un espace vectoriel normé. Absolue est reservé à $\mathbb{R}$, pour $\mathbb{C}$ il conviendrait d'utiliser modulaire, mais dans les deux cas, on peut utiliser normale, puique la valeur absolue et le module sont des normes respectivement sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

Définition 9.11. *On dit qu'une **série** $A = ((u_n), (s_n))$ de nombres complexes est **normalement convergente** si la série de terme général (u_n) est convergente.*

Théorème 9.12. *Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace de Banach. Soit $(\sum u_n)$ une série à valeur dans E alors :* $\sum u_n \text{converge} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}; \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, (m > n > n_\varepsilon) \Rightarrow \left\| \sum_{k=n+1}^{m} u_k \right\|_E$

Démonstration. CTES page 100. Topologie. □

Note 9.13. En particulier, absolue convergence $\overset{?}{\Rightarrow}$ converge. Pas automatiquement, il faut que E soit un espace de Banach.

Dans ce cas, la série A est convergente et $\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right\|_E \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|_E$, pour tout entier naturel p, $\left\| \sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n \right\|_E \leqslant \sum_{n=p+1}^{+\infty} \|u_n\|_E$.

Proposition 9.14. *Soit E un espace de Banach et $A = ((u_n), (s_n))$ une série de terme général (u_n) et dont la suite des sommes partielle est (s_n).*

Si A est absolument convergente alors A est convergente.

Note 9.15. En particulier, toute série de nombres réels ou complexes absolument convergente est convergente. La réciproque est bien entendu fausse : $\sum \left[\frac{(-1)^n}{n} \right]$.

Définition 9.16. *Une série convergente mais non normalement convergente est dite **semi-convergente**.*

Chapitre 10

Séries numériques à termes réels ou complexes.

10.1 Séries numériques à termes réels ou complexes

10.1.1 Convergence

Définition 10.1. *On appelle* ***série*** *tout couple $A=((u_n),(s_n))$ constitué de deux suites de nombres complexes telles que, pour tout entier naturel p, $s_p=\sum_{n=0}^{p} u_n$. L'élément u_n s'appelle* ***terme d'ordre n*** *de A, et l'élément s_n s'appelle* ***somme partielle d'ordre n*** *de A. La suite (u_n) s'appelle* ***terme général*** *de la série A, et la suite (s_n),* ***suite des sommes partielles*** *de A.*

Définition 10.2. *On appelle* ***somme de deux séries*** *$A=((u_n),(s_n))$ et $B=((v_n),(t_n))$ la série de terme général (u_n+v_n).*

Proposition 10.3. *Il est immédiat que $A+B=((u_n+v_n),(s_n+t_n))$.*

Définition 10.4. *On appelle* ***produit d'une série*** *$A=((u_n),(s_n))$* ***par un nombre complexe*** *α la série, notée αA, de terme général (αu_n).*

Proposition 10.5.

1. *Il est immédiat que $\alpha A=((\alpha u_n),(\alpha s_n))$.*
2. *Muni des deux lois précédentes, l'ensemble $\sum(\mathbb{C})$ des séries de nombres complexes est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.*

Séries convergentes.

Définition 10.6. *On dit qu'une* ***série*** *$A=((u_n),(s_n))$ est* ***convergente*** *(resp.* ***divergente****) si et seulement si la suite (s_n) est convergente (resp. divergente).*

Définition 10.7. *Lorsque la série A est convergente, la limite de la suite (s_n) s'appelle* ***somme de la série*** *A et se note $s(A)$, ou encore $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, $s(A)=\lim_{p\to+\infty} s_p=\lim_{p\to+\infty}\sum_{n=1}^{p} u_n$.*

Définition 10.8. *On appelle* ***reste à l'ordre p****, et on note r_p, ou encore $\sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n$, le nombre complexe $s(A)-s_p$: $r_p=\lim_{q\to+\infty}\sum_{n=p+1}^{q} u_n$.*

Proposition 10.9.

1. *L'ensemble $\sum_c=(\mathbb{C})$ des séries convergentes est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\sum(C)$, et l'application $s\colon A\mapsto s(A)$ est une forme linéaire sur $\sum_c(\mathbb{C})$.*
2. *(Condition nécessaire de convergence) Le terme général d'une série convergente converge vers 0.*
3. *(Critère de Cauchy de convergence des séries) Soit $A=((u_n),(s_n))$ une série de nombres complexes pour que la série A converge, il faut et il suffit que la suite (s_n) soit une suite de Cauchy, c'est-à-dire que, pour tout nombre réel strictement positif ε, il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout couple $(p,\ q)$ d'entiers naturels tel que $q>p\geqslant n_0$, $\left|\sum_{n=p+1}^{q} u_n\right|\leqslant\varepsilon$.*

Séries géométriques.

Définition 10.10. *On appelle* ***série géométrique*** *une série A dont le terme général est de la forme* (a^n)*, où* $a \in \mathbb{C}$*.*

Proposition 10.11.

1. *Pour que la série A converge, il faut et il suffit que* $|a| < 1$*.*
2. *Dans ces conditions,* $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$*.*
3. *Et, pour tout entier naturel p,* $\sum_{n=p+1}^{+\infty} a^n = \frac{a^{p+1}}{1-a}$*.*

10.1.2 Séries à termes réels positifs

Soit $A = ((u_n), (s_n))$ une série de nombres réels positifs pour que la série A converge, il faut et il suffit que la suite (s_n) soit majorée. Plus précisément :

- Ou bien la suite (s_n) est majorée. Alors la série A converge, et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} (s_n)$.
- Ou bien la suite (s_n) n'est pas majorée. Alors s_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

10.1.2.1 Comparaison avec une intégrale.

Proposition 10.12. *Soient f une fonction définie sur* $[0, +\infty[$ *à valeurs réelles positives, décroissante et tendant vers* 0 *au point* $+\infty$ *, et A la série de terme général* $(f(n))$*. Pour que la série A converge, il faut et il suffit que l'intégrale* $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ *converge.*

10.1.2.2 Séries de Riemann.

Proposition 10.13. *Soit* α *un nombre réel. Pour que la série de terme général* $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\geqslant 1}$ *converge, il faut et il suffit que* α *soit strictement supérieur à* 1*.*

Définition 10.14. *La* ***série*** *de terme général* $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ *est dite* ***harmonique****.*

10.1.2.3 Séries de Bertrand.

Proposition 10.15. *Soient* α *et* β *des nombres réels. pour que la série de terme général* $\left(\frac{1}{n^\beta(\ln n)^\alpha}\right)$ *converge, il faut et il suffit que* $\beta > 1$ *ou* $(\beta = 1$ *et* $\alpha > 1)$*.*

Comparaison directe des séries de nombres réels positifs.

Proposition 10.16. *Soient A et B deux séries de nombres réels positifs, de termes généraux* (u_n) *et* (v_p)*.*

1. *Si A est dominée par B, c'est-à-dire si* (u_n) *est dominée par* (v_n)*, et si B converge, il en est de même de A.*
2. *Si A et B sont semblables, la convergence de la série A équivaut à celle de la série B.*

Proposition 10.17. *(Règle de Cauchy) Soit* (u_n) *une suite de nombres réels positifs telle que* $\sqrt[n]{(u_n)}$ *admette une limite. Si* $\beta < 1$*, la série de terme général* (u_n) *converge. Si* $\beta > 1$*, la série de terme général* (u_n) *diverge.*

Proposition 10.18. *(Règle de Riemann) Soit* (u_n) *une suite de nombres réels positifs. On suppose qu'il existe un nombre réel* α *tel que* $n^\alpha u_n$ *ait une limite* β *appartenant à* $[0, +\infty]$*.*

1. *Si* $\alpha > 1$ *et si* β *est fini, la série de terme général* (u_n) *converge.*
2. *Si* $\alpha \leqslant 1$ *et si* $\beta \neq 0$*, la série de terme général* (u_n) *diverge.*

Proposition 10.19. *(Comparaison logarithmique des séries de nombres réels positifs) Soient A et B des séries de nombres réels strictement positifs, de termes généraux (u_n) et (v_n). On suppose qu'il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à n_0, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$. Si la série B converge, il en est de même de la série A.*

Proposition 10.20. *(Règle de D'Alembert) Soit (u_n) une suite de nombres réels strictement positifs telle que $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ admette une limite.*

1. *Si $\beta < 1$, la série de terme général (u_n) converge.*
2. *Si $\beta > 1$, la série de terme général (u_n) diverge.*

Proposition 10.21. *(Règle de Raabe-Duhamel) Soit (u_n) une suite de nombres réels strictement positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tende vers 1 par valeurs inférieures et que $n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ admette une limite $\beta \in [0, +\infty]$.*

1. *Si $\beta > 1$, la série de terme général (u_n) converge.*
2. *Si $\beta < 1$, la série de terme général (u_n) diverge.*

10.1.3 Convergence absolue et semi-convergence

Définition 10.22. *On dit qu'une **série** $A = ((u_n), (s_n))$ de nombres complexes est **absolument convergente** si la série de terme général (u_n) est convergente.*

Dans ce cas, la série A est convergente et $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$, pour tout entier naturel p, $\left|\sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=p+1}^{+\infty} |u_n|$.

Proposition 10.23. *Une série convergente mais non absolument convergente est dite **semi-convergente**.*

Note 10.24. $|.|$ est une norme donc la convergence absolue correspond à la convergence normale.

10.1.4 Séries de $\mathbb{R}$ alternées.

Définition 10.25. *On dit qu'une **série** $A = ((u_n), (s_n))$ de nombres réels est **alternée** si la suite $((-1)^n u_n)$ est de signe constant.*

Proposition 10.26.

1. *Si la suite (u_n) converge vers 0 et si la suite $(|u_n|)$ est décroissante, la série A converge et, pour tout entier naturel p, $\left|\sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n\right| \leqslant |u_{p+1}|$.*
2. *De plus, le reste à l'ordre p est de même signe que le premier terme négligé, c'est-à-dire u_{p+1}.*

Chapitre 11

Espaces d'applications leurs structures, leurs topologies ... .

Dans ce cours, on va définir ce qu'est une fonction.

Soit $F^E = \{f : E \to F\}$ l'ensemble des applications d'un ensemble E dans un autre ensemble F. L'image $f(x)$ de x par une application $f \in F^E$ obéit aux lois présentent sur F. Si F est un espace métrique, vectoriel, vectoriel normé, algèbre ou algèbre normé, on va pouvoir étendre sur F^E ces lois. Exemple $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$... . Traitons en premier l'exemple des fonctions réelles (c'est à dire à valeurs dans $\mathbb{R}$). On doit pouvoir montrer que $\mathbb{R}^E$ est un espace vectoriel normé et même une algèbre normée totalement ordonné. Parmi les fonctions un cas particulier est à distinguer celui des suites c'est à dire $F^{\mathbb{N}}$. Les cas à étudier sont donc :

$E \downarrow F \rightarrow$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$e.v.$	$e.v.n.$	$e.m.$	$e.t.$
$\mathbb{N}$		suites réelles	suite vectorielles			
$\mathbb{R}$						
$e.n.$						
$e.v.n.$						
$e.m.$						
$e.t.$						

D'autre cas sont à examiner par exemples les sous-espaces vectoriels des fonctions bornées. des fonctions R-intégrables, L-intégrables ...

Ou Topologie défines sur un ensemble d'applications ou de fonctions. Les points des espaces topologiques et métriques sont ici des applications ou des fonctions. Voir livre Topologie (Ellipse-p.118)

Je remarque que ces deux types de convergence sur des espaces de fonctions sont définies sans que ces espaces de fonction ne soient muni d'une topologie. Cependant pour la deuxième, on verra que cette correspondance correspond en fait à la distance $\sup_{x \in E} \{d(f(x); g(x)\}$ et que la convergence uniforme s'exprime dans ce cas là comme la convergence dans un espace métrique.

Note 11.1. Certaines notions font déjà partie du chapitre sur les fonctions page 13. Il est plus logique de définir d'abord que l'espace des fonctions bornées est normée puisque sa structure métrique découle de la norme définie.

11.1 Suite de fonction dans un espace métrique

Attention, il faut bien avoir en mémoire qu'on se place ici dans le cas des suites à valeurs dans un espace métrique.

11.1.1 Convergence simple

Définition 11.2. *Soit E un ensemble quelconque, F un espace métrique, $f : E \to F$ une application et (f_n) une suite d'application : $E \to F$.*

- *On dit que la suite (f_n) **converge simplement** vers f si et seulement si pour chaque x de E, la suite (f_n) converge vers $f(x)$.*
- *Autrement dit : $\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, (n \geqslant n_0) \Rightarrow (d(f_n(x), f(x)) \leqslant \varepsilon$.*

Exemple 11.3. $f_n : \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & x^n \end{array} \right.$ converge simplement vers l'application :

$$g:\left|\begin{array}{ccc}[0,1] & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0, \text{si } x \in [0,1[\\ 1 \text{ si } x = 1 \end{cases}\end{array}\right.$$

Avertissement 11.4. La limite simple de fonctions continues n'est pas forcément continue. C'est le cas de l'application précédente, g n'est pas continue.

11.1.2 Convergence uniforme

Définition 11.5. *Soit E un ensemble quelconque, (F, d_F) un espace métrique, f une application et (f_n) une suite d'application. On dit que la suite (f_n)* ***converge uniformément*** *vers f si et seulement si : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, (n \geqslant n_0) \Rightarrow (\forall x \in E, d_F(f_n(x), f(x)) \leqslant \varepsilon)$*

11.1.3 Convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées

Notons $\mathcal{B}(E, F)$ l'ensemble des applications bornées de $E \to F$.

Proposition 11.6. *Soit E un ensemble quelconque, (F, d_F) un espace métrique, $f \in \mathcal{B}(E, F)$ une application et (f_n) une suite d'application de $\mathcal{B}(E, F)$. la suite (f_n)* ***converge uniformément*** *vers f si et seulement si : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, (n \geqslant n_0) \Rightarrow (\sup_{x \in E} d_F(f_n(x), f(x)) \leqslant \varepsilon)$.*

Remarque 11.7. Rajouter passage livre Analyse Licence Masson page 53. Toute suite qui converge uniformément, converge simplement.

11.2 Topologie des espaces de fonctions bornées

Note 11.8. On va montrer que les espaces de fonctions peuvent être munis d'une structure d'espace métrique grâce à la distance $d(f; g) = \sup_{x \in E} \{d_F(f(x); g(x))\}$. Rajouter le passage cours TCD M. Benabdallah page 32.

11.2.1 Distance définie sur un espace de fonctions

Note 11.9. Le choix de l'ensemble de définition est important car pour une distance la valeur de la distance ne peut être infinie, sinon on ne défini pas une distance mais plutôt un écart (Voir Topologie Christol/Cote/Marle page 97 et définir un écart page 26). En prenant $\mathcal{B}(E; F)$ ou un espace E compact et en s'assurant que f est continue alors f est bornée (elle ne prend donc pas de aleur infinie) et donc d peut-être une distance.

Proposition 11.10. *Soient E un ensemble, $(F; d_F)$ un espace métrique et $\mathcal{B}(E; F)$ l'ensemble des applications bornées $E \to F$, $\forall f, g \in \mathcal{B}(E; F)$ on pose $d(f; g) = \sup_{x \in E} \{d_F(f(x); g(x))\}$. L'application ainsi définie est une distance.*

Remarque 11.11.

1. Faire attention aux distances dans la définition de la distance sur $\mathcal{B}(E; F)$: $d(f; g) = \sup_{x \in E} \{d_F(f(x); g(x))\}$ d est une distance sur $\mathcal{B}(E; F)$ alors que d_F est une distance sur F.
2. Si (f_n) est une suite de $\mathcal{B}(E; F)$ dire que (f_n) converge vers f dans l'espace métrique $\mathcal{B}(E; F) \Leftrightarrow (f_n)$ converge uniformément vers f.

11.2.2 C.S. de complétude

Proposition 11.12. *Si F est complet alors l'espace métrique $\mathcal{B}(E, F)$ est aussi complet.*

Proposition 11.13. *Soit $\mathcal{C}^\infty(E,F)=\mathcal{B}(E,F)\cap\mathcal{C}(E,F)$ avec E espace topologique, où $\mathcal{C}(E,F)=\{f\colon E\to F,\text{ continues}\}$. Alors $\mathcal{C}^\infty(E,F)$ est fermé dans $\mathcal{B}(E,F)$, en particulier si F est complet $\mathcal{C}^\infty(E,F)$ est aussi complet.*

Remarque 11.14. Utilité ? $\mathcal{C}^\infty$ s'agit-il de l'ensemble des fonctions de classe ∞ ???

Proposition 11.15. *(Limite uniforme de suite)*

1. *Soit un intervalle $I\subset\mathbb{R}$ et (f_n) une suite de fonctions complexes tendant uniformément vers f dans I.*
   a) *Si les f_n sont continues alors f est continue*
   b) *Soit $x_0\in[a,b]$, F_n primitive de f_n nulle pour $x=x_0$; i.e. $x\mapsto\int_{x_0}^{x} f_n(t)dt$ et F la primitive de f nulle pour $x=x_0$ i.e. $x\mapsto\int_{x_0}^{x} f(t)dt$.*
   c) *si f_n est uniformément continue alors f est uniformément continue.*
2. *Alors $F_n\to F$ dans $[a,b]$.*
3. *Soit (f_n) une suite de fonction complexe sur $[a,b]$ admettant des dérivées continues sur $[a,b]$ si f_n tend uniformément vers f sur $[a,b]$ et $f_n'\to g$ sur $[a,b]$ alors $f'=g$ et f' est continue sur $[a,b]$.*

Remplacer ce qui précède par théorème de Monier page 16 Analyse 4.

Proposition 11.16. *Soit X un ensemble , $(E;\|.\|)$ un espace de Banach l'ensemble $\mathcal{B}(X,E)$ des application bornées de $X\to E$ muni de la norme $\|f\|_\infty=\sup_{x\in X}\|f(x)\|$ est un espace de Banach.*

Proposition 11.17. *Soit $(f_n)\colon I\to E$ une suite d'application dans un $\mathbb{K}$-e.v. E. Si $\forall n$, $f_n\in C^1$ les f_n sont C^1, (f_n) tend simplement vers f sur I et (f_n') tend uniformément vers g. Alors (f_n) tend uniformément vers f sur I, f est de classe C^1 sur I, $f'=g$.*

11.3 Suites et séries de fonctions

Note 11.18. Ces deux notions ont été définies précédement de manière plus générale.

Exemples d'application voir Ellipse Topoligie Gilles Christol page 145.

Trouver la place de :

Théorème 11.19. *Soit $(E,\|.\|_E)$ un espace de Banach, $u\in\mathcal{L}(E)$.*

$$(\|u\|_E<1)\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{Id}_E+u\text{ est un homéomorphisme}\\ (\mathrm{Id}_E+u)^{-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\,o\grave{u}\,u^n=u\circ\ldots\circ u\\ \left\|(\mathrm{Id}_E+u)^{-1}\right\|_E\leqslant\frac{1}{1-\|u\|_E}\end{cases}$$

Théorème 11.20. *Soit E, F deux espaces de Banach et $u_0\in I_s(E,F)$ l'espace des isomorphismes linéaires de $E\to F$.*

$$\left(v\in\mathcal{L}(E,F),\|v\|_{\mathcal{L}(E,F)}\leqslant\|u_0^{-1}\|_{\mathcal{L}(E,F)}\right)\Rightarrow\left(u_0+v\in I_s(E,F),\left\|(u_0+v)^{-1}\right\|\leqslant\frac{1}{\|u_0^{-1}\|^{-1}-\|v\|}\right)$$

Corollaire 11.21. *Soit E,F deux espaces de Banach tels que $I_s(E,F)$ soit non vide alors $I_s(E,F)$ est ouvert dans $\mathcal{L}(E,F)$ et l'application :* $\left|\begin{array}{ccc} I_s(E,F) & \to & I_s(E,F)\\ u & \mapsto & u^{-1}\end{array}\right.$.

11.3.1 Convergence simple et uniforme des suites de fonctions

Définition 11.22. *Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un ensemble E à valeurs complexes. On dit que (f_n) converge simplement sur E s'il existe une fonction f définie sur E telle que, pour tout point x de E, la suite $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in E, \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n \geqslant n_0, |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$.*

Proposition 11.23. *Une telle fonction f est évidemment unique : $f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$.*

Définition 11.24. *On dit encore que (f_n) converge simplement sur E vers f.*

Définition 11.25. *On dit que (f_n) converge uniformément sur E s'il existe une fonction f définie sur E telle que la suite d'éléments de $\bar{\mathbb{R}}$ de terme général $\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)|$ converge vers 0 : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n \geqslant n_0, \forall x \in E, |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$.*

Proposition 11.26. *Une telle fonction f est unique, et limite simple de la suite (f_n);*

Définition 11.27. *on dit encore que (f_n) converge uniformément sur E vers f.*

Proposition 11.28. *Critère de Cauchy de convergence uniforme.*
Pour que (f_n) converge uniformément sur E, il faut et il suffit que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall x \in E$, $\forall p, q \geqslant n_0 \Rightarrow |f_p(x) - f_q(x)| \leqslant \varepsilon$.

Convergence uniforme des suites de fonctions bornées.

Proposition 11.29.

1. *Soit (f_n) une suite de fonctions convergeant uniformément sur E vers f. Si, pour tout entier naturel n, f_n est bornée, il en est de même de f.*
2. *Sur l'espace vectoriel $\mathcal{B}(E, \mathbb{C})$ des fonctions bornées sur E, l'application $g \mapsto \sup_{x \in E} |g(x)|$ est une norme.*

Définition 11.30. *Sur l'espace vectoriel $\mathcal{B}(E, \mathbb{C})$ des fonctions bornées sur E, l'application $g \mapsto \sup_{x \in E} |g(x)|$ est appelée norme de la convergence uniforme, on la note $\|g\|_\infty$. $\|g\|_\infty$: $g \mapsto \sup_{x \in E} |g(x)|$.*

Proposition 11.31.

1. *La convergence uniforme sur E équivaut à la convergence en norme.*
2. *Muni de cette norme, l'espace vectoriel $\mathcal{B}(E, \mathbb{C})$ est complet.*

Limite uniforme de fonctions continues en un point.

Proposition 11.32.

1. *Soient (f_n) une suite de fonctions définies sur une partie p de $\mathbb{C}$ à valeurs complexes et x_0 un point de p. Si (f_n) converge uniformément sur p (ou, plus généralement, sur toute partie fermée bornée contenue dans p) vers une fonction f et si, pour tout entier naturel n, f_n est continue au point x_0, alors f est continue au point x_0.*
2. *L'ensemble $\mathcal{BC}(P, \mathbb{C})$ des fonctions bornées continues sur p est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}(P, \mathbb{C})$*
3. *Muni de la norme induite, $\mathcal{BC}(P, \mathbb{C})$ est complet.*

Continuité de la fonction limite

Théorème 11.33. *Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métrique et (f_n) une suite de fonctions de $E \to E'$ si $(f_n)_n$ converge uniformément sur E vers $f : E \to F$ et si toutes les fonctions f_n sont continues en $x_0 \in E$ alors f est continue en x_0.*

Démonstration. CTE page 165 cours Topologie 2003-2004. □

Limite uniforme de fonctions intégrables.

Théorème 11.34.

1. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues de $[a;b] \to K$ qui converge uniformément vers f sur $[a;b]$ alors f est continue et $\int_a^b f(t)\mathrm{dt} = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\mathrm{dt}$.*
2. *Plus généralement, la fonction $F: \left| \begin{array}{ccc} [a;b] & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \int_a^x f(t)\mathrm{dt} \end{array} \right.$ est la limite uniforme de la suite de fonctions $F_n: \left| \begin{array}{ccc} [a;b] & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \int_a^x f_n(t)\mathrm{dt} \end{array} \right.$.*

Démonstration. CTE 2003-2004 page 165 Cours de topologie. □

Proposition 11.35. *Soient $[a,b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ et (f_n) une suite de fonctions à valeurs complexes intégrables sur $[a,b]$. Si la suite (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f, alors f est intégrable et $\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt$.*

Limite uniforme de fonctions dérivables.

Proposition 11.36. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et (f_n) une suite de fonctions à valeurs complexes continûment dérivables sur I. Si (f_n) converge uniformément sur toute partie fermée bornée contenue dans I vers une fonction g et s'il existe un point x_0 de I tel que $(f_n(x_0))$ converge, alors :*

i. (f_n) converge uniformément sur toute partie fermée bornée contenue dans I vers une fonction f,

ii. f est continûment dérivable,

iii. et $f' = g$.

11.3.2 Convergence uniforme des séries de fonctions

Définition 11.37. *On appelle série de fonctions tout couple $A = ((u_n), (s_n))$ constitué de deux suites de fonctions définies sur un ensemble E à valeurs complexes telles que, pour tout entier naturel $s_p = \sum_{n=0}^{p} u_n$.*

Définition 11.38. *On dit que A converge simplement (resp. uniformément) sur E vers une fonction f si la suite (s_n) converge simplement (resp. uniformément) sur E vers f.*

Proposition 11.39. *(Critère de Cauchy de convergence uniforme) Pour que A converge uniformément sur E, il faut et il suffit que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$; $\forall x \in E$, $\forall p \geqslant n_0$, $\forall q > p$, $\left| \sum_{n=p+1}^{q} u_n(x) \right| \leqslant \varepsilon$.*

Convergence normale.

Définition 11.40. *On dit qu'une série de fonctions $A = ((u_n), (s_n))$ est normalement convergente sur E si la série de terme général (u_n) est convergente.*

Remarque 11.41. Si $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni de la norme $z \mapsto |z|$ les série normalement convergentes sont les séries absolument convergentes. (Dict. Puf de mathématiques page 515).

Proposition 11.42. *Une série normalement convergente est uniformément convergente sur E, et absolument convergente en tout point de E.*

Continuité de la somme d'une série de fonctions.

Proposition 11.43. *Soient (u_n) une suite de fonctions à valeurs complexes définies sur une partie P de $\mathbb{C}$ et x_0 un point de P. Si la série de terme général (u_n) converge uniformément sur toute partie fermée bornée contenue dans P vers une fonction f et si, pour tout entier naturel n, u_n est continue au point x_0, alors f est continue au point x_0.*

Intégrabilité de la somme d'une série de fonctions.

Proposition 11.44. *Soient $[a, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ et (u_n) une suite de fonctions à valeurs complexes intégrables sur $[a, b]$. Si la série de terme général (u_n) converge uniformément sur $[a, b]$, la série de terme général $\left(\int_a^b u_n(t)\, d\, t \right)$ est convergente et $\int_a^b \left[\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) \right] dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(t) dt$.*

Corollaire 11.45. *(Interversion des signes de sommation) Si $\sum g_n$ est une série de fonctions continues d'un segment $[a; b] \subset \mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{K}$ qui convergent normalement sur $[a; b]$ alors $\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t)\mathrm{dt} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b g_n(t)\mathrm{dt}$.*

Démonstration. CTE page 165. □

Dérivabilité de la somme d'une série de fonctions.

Proposition 11.46. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et (u_n) une suite de fonctions à valeurs complexes continûment dérivables sur I. Si la série de terme général (u_n) est uniformément convergente sur toute partie fermée bornée contenue dans I et s'il existe un point x_0 de I tel que la série de terme général $(u_n(x_0))$ converge, alors la série de terme général (u_n) converge uniformément sur toute partie fermée bornée contenue dans I, sa somme est continûment dérivable et $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'$.*

Suite et série de fonctions de X(ensemble quelconque) sur E (un espace vectoriel normé).

Définition 11.47. *Soit X un ensemble et E un espace vectoriel normé. On note $\mathcal{B}(X, E)$ l'espace vectoriel des applications bornées de $X \to E$*

Proposition 11.48. *$n(f) = \sup_{x \in E} \|f(x)\|_E$ est une norme sur $\mathcal{B}(X, E)$.*

Définition 11.49. *On note $\|f\|_\infty$ et on appelle norme de la convergence uniforme la norme définie par $\|f\|_\infty = \sup_{x \in E} \|f(x)\|_E$ sur $\mathcal{B}(X, E)$.*

Proposition 11.50.

1. *Une suite $(f_n)_n$ de fonctions bornées de $X \to E$ converge uniformément vers (f) si et seulement si $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.*
2. *Si E est un espace de Banach alros $\mathcal{B}(X, E)$ est aussi un espace de Banach*

Définition 11.51. *Soit X un ensemble et E un espace de Banach, on dit qu'une série de fonction $\sum g_n$ à terme dans $\mathcal{B}(X; E)$ converge normalement si et seulement si la série $\sum \|g_n\|_\infty$ converge.*

Théorème 11.52. *Une série de fonction $\sum g_n$ à valeurs dans un espace de Banach qui converge normalement sur un ensemble X converge uniformément sur X.*

Démonstration. CTE page 164. □

Remarque 11.53. La notion de convergence normale permet de montrer la convergence uniforme. Il existe des séries de fonctions uniformément convergentes mais non normalement convergente.

Dérivabilité et dérivée de la fonction limite.

Théorème 11.54. *Soit (f_n) une suite de fonctions de classe C^1 de $[a;\ b] \to E$ où E est un espace de Banach. On suppose que :*

i. Il existe $x_0 \in [a;b]$ tel que la suite $(f_n(x_0))_n$ converge.

ii. La suite de fonctions (f'_n) converge uniformément sur $[a;b]$ vers une fonction g.

Alors (f_n) converge uniformément vers une fonction f de classe C^1 et vérifie $f' = g$

Démonstration. CTE page 165. □

Corollaire 11.55. *Une suite de fonctions $(f_n)_n$ de classe C^p (telle que pour tout $k = 0, 1, ..., p$, $(f_n^{(k)})_n$ converge uniformément vers une fonction g_k) converge uniformément vers une fonction f de classe C^p qui vérifie $f^{(k)} = g_k$ pour $k = 0; 1; ...; p$*

Démonstration. CTE page 165 Cours de Topologie 2003-2004. □

11.4 Séries entières

11.4.1 Rayon de convergence

Définition 11.56. *On appelle série entière une série A de fonctions définies sur $\mathbb{C}$ à valeurs complexes dont le terme général (u_n) est de la forme $u_n : z \mapsto a_n z^n, a_n \in \mathbb{C}$.*

Proposition 11.57. *(Lemme d'Abel) Soit z_0 un nombre complexe. Si la suite $(a_n\ z_0^n)$ est bornée, la série entière A est absolument convergente pour tout nombre complexe de module strictement inférieur à $|z_0|$ et uniformément convergente sur tout disque fermé de centre O et de rayon strictement inférieur à $|z_0|$.*

11.4.1.1 Rayon de convergence.

Proposition 11.58. *L'ensemble des nombres réels positifs ρ tels que la série de terme général $(|a_n|\rho^n)$ converge est un intervalle d'origine 0*

Définition 11.59. *La borne supérieure R de cet intervalle (éventuellement égale à $+\infty$) s'appelle rayon de convergence de la série entière A.*

Définition 11.60. *L'ensemble D des nombres complexes z tels que $|z| < R$ s'appelle domaine de convergence*

Définition 11.61. *Si $R \in]0, +\infty[$, c'est un disque ouvert, appelé disque de convergence.*

Proposition 11.62.

1. *Une série entière converge absolument en tout point de D, diverge en tout point extérieur à D et converge uniformément sur toute partie fermée bornée de $\mathbb{C}$ contenue dans D.*
2. *La fonction $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur D.*

11.4.1.2 Somme et produit de deux séries entières.

Proposition 11.63. *Soient A et B deux séries entières, (a_n) et (b_n) les suites de leurs coefficients, R_1 et R_2 leurs rayons de convergence.*

1. *La série $A + B$ est une série entière,*
2. *Son rayon de convergence R est tel que $R \geqslant \inf(R_1, R_2)$, avec égalité si $R_1 \neq R_2$.*

Proposition 11.64. *La série dont le terme général est défini par* $z \mapsto \Big(\sum_{p+q=n} a_p b_q \Big) z^n$ *est une série entière.*

Définition 11.65. *La série dont le terme général est défini par* $z \mapsto \Big(\sum_{p+q=n} a_p b_q \Big) z^n$ *est appelée série produit des séries A et B.*

Proposition 11.66.

1. *Son rayon de convergence est supérieur à* $\inf(R_1, R_2)$.
2. *Pour tout nombre complexe z tel que* $|z| < \inf(R_1, R_2)$, *la somme de la série produit est le produit des sommes de chaque facteur.*

11.4.2 Dérivation et intégration

Proposition 11.67. *Soit A une série entière d'une variable réelle, de terme général* $x \mapsto a_n x^n$, *de rayon de convergence R et de somme f.*

1. *La série entière de terme général* $x \mapsto (n+1)a_{n+1}x^n$ *a pour rayon de convergence R.*
2. *La fonction f est dérivable sur* $]-R, R[$ *et* $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n = 0$.
3. *La série entière de terme général* $x \mapsto \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ *a pour rayon de convergence R et* $\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \Big) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

11.4.3 Développement d'une fonction en série entière

Définition 11.68. *Soient I un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$ *symétrique par rapport à* 0 *et f une fonction définie sur I à valeurs complexes. On dit que f est développable en série entière sur I s'il existe une suite* (a_n) *de nombres complexes telle que*

i. le domaine de convergence de la série entière de terme général $z \mapsto a_n z^n$ *contienne I,*

ii. pour tout point x de I, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Proposition 11.69. *La fonction f est nécessairement indéfiniment dérivable sur I, la suite* (a_n) *est unique et, pour tout entier naturel n,* $a_n = \frac{f^n(0)}{n!}$.

Définition 11.70. *La série entière de terme général* $x \mapsto \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ *s'appelle série de Maclaurin associée à f.*

Proposition 11.71. *pour que f soit développable en série entière sur I, il faut et il suffit que le reste de Maclaurin de f à l'ordre n converge simplement vers* 0 *sur I ; il suffit qu'il existe un nombre réel positif* β *tel que, pour tout point x de I et pour tout entier naturel n,* $|f^{(n)}(x)| \leqslant \beta$.

Développement en série entière des fonctions rationnelles.

Proposition 11.72. *Soit f une fonction rationnelle n'admettant pas* 0 *pour pôle. Alors f est développable en série entière sur l'intervalle* $]-R, R[$, *où R est le plus petit des modules des pôles de f. De plus, le rayon de convergence du développement en série entière de f est égal à R.*

Fonction analytique
CTE cours 2003-2004 page 4. Calcul différentiel.

Définition 11.73. *On dit que f est analytique sur I si pour tout* $a \in I$, *f est développable en série entière convergente sur un intervalle ouvert* $]a-\varepsilon; a+\varepsilon[\subset I$ *où* $\varepsilon = \varepsilon(a) > 0$. *Autrement dit,* $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \alpha_n (t-a)^n$. *On dit aussi que f est de classe* C^ω *sur I et on note* $f \in C^\omega$.

Remarque 11.74. On sait que $\alpha_n = f^{(n)}(a)$ donc $C^\omega(I) \subset C^\infty$.

Exemple 11.75. Exemple de fonction $C^\infty_{\mathbb{R}}$ mais pas $C^\omega(\mathbb{R})$.

$$f(t)=\begin{cases}\exp\left(\frac{-1}{1-t^2}\right)\text{si } t\in\,]-1;+1[\\ 0\,\text{si}\,|t|\geqslant 1\end{cases}$$

Démonstration. Voir cours CTE. □

11.4.4 Développements en série entière usuels

On déduit de ce tableau les développements limités des fonctions usuelles. Les développements en série entière des fonctions tangente et tangente hyperbolique font intervenir les nombres de Bernoulli ; les développements à l'ordre 8 de ces fonctions sont les suivants :

- $\text{th}(x)\equiv x-\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5-\frac{17}{315}x^7\,(\text{mod.}\mathcal{N}_8)$,
- $\tan(x)\equiv x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7\,(\text{mod.}\mathcal{N}_8)$,

où $\mathcal{N}_8$ désigne l'idéal des fonctions négligeables devant $x\mapsto x^8$ au voisinage de 0.

11.4.5 Fonctions transcendantes élémentaires complexes

11.4.5.1 Fonction exponentielle complexe

Définition 11.76. *La fonction $z\mapsto e^z$ est définie sur $\mathbb{C}$ par $e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+...+\frac{z^n}{n!}+....$*

Proposition 11.77.

1. *Pour tout nombre complexe $e^{\bar{z}}=e^{\overline{z}}$.*
2. *Pour tout couple (z,z') de nombres complexes, $e^{z+z'}=e^z e^{z'}$.*
3. *Pour tout entier rationnel n, $(e^z)^n=e^{nz}$.*
4. *Pour tout nombre complexe $z=x+i\,y$, où x et y sont réels, $e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos(y)+\text{isin}(y))$.*
5. *En particulier, $e^{i\frac{\pi}{2}}=i, e^{i\pi}=-1, e^{2i\pi}=1$.*
6. *L'application $z\mapsto e^z$ est continue périodique, de période 2π, c'est-à-dire que, pour tout couple $(z,\,z')$ de nombres complexes, la relation $e^z=e^{z'}$ équivaut à la relation $z'-z\in 2i\pi\mathbb{Z}$.*
7. *Autrement dit, le noyau du morphisme $z\mapsto e^z$ est $2i\pi Z$.*
8. *L'application $x\mapsto e^{ix}$ est un morphisme surjectif du groupe additif $(\mathbb{R},+)$ sur le groupe multiplicatif $(U,\times)$ des nombres complexes de module 1.*
9. *Son noyau est l'ensemble des multiples d'un nombre réel strictement positif, noté 2π.*
10. *Les fonctions $x\mapsto e^{ix}$, $x\mapsto\cos(x)$ et $x\mapsto\sin(x)$ ont pour plus petite période 2π. $\pi\approx 3,141592653589793238462643383279502 88...$*
11. *Par passage au quotient, cette application définit un isomorphisme φ du groupe $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z},+)$ sur le groupe $(U,\times)$.*

Définition 11.78. *L'isomorphisme réciproque de φ s'appelle argument, et se note* arg

Définition 11.79. *Le représentant de l'argument d'un élément u de U appartenant à $]-\pi,\pi]$ s'appelle argument principal de u et se note* $\text{Arg}\,(u)$.

Définition 11.80. *Soit z un nombre complexe non nul. On appelle argument (resp. argunment principal) de z et on note* $\arg(z)$ *(resp.* $\text{Arg}(z)$*) l'argument (resp.l'argunment principal) de $z/|z|$.*

Proposition 11.81.

1. *Pour tout couple* (z, z') *de nombres complexes non nuls,* $\arg(z\,z') = \arg(z) + \arg(z)$ *, ce qui équivaut à* $\mathrm{Arg}(z\,z') = \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(z')\,(\mathrm{mod.}\,2)$ *.*
2. *Il en découle que* $\arg(1/z) = -\arg(z)$*,*
3. *et que* $\arg(z/z') = \arg(z) - \arg(z)$*.*
4. *L'application* $z \mapsto e^z$ *est une surjection de* $\mathbb{C}$ *sur* $\mathbb{C}^*$ *plus précisément, soit* u *un nombre complexe non nul; l'équation* $e^z = u$ *admet pour solutions les nombres complexes* $z_k = \ln|u| + i\,\mathrm{Arg}(u) + 2\,i\pi k$*, où* $k \in \mathbb{Z}$*.*

11.4.5.2 Fonctions trigonométriques complexes

Pour tout nombre complexe z, $\mathrm{ch}(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$, $\mathrm{sh}(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$, $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2\,i}$,

Proposition 11.82.

1. $\mathrm{ch}(i\,z) = \cos(z)$*,* $\mathrm{sh}(i\,z) = i\sin(z)$*,* $\cos(i\,z) = \mathrm{ch}(z)$*,* $\sin(i\,z) = i\,\mathrm{sh}(z)$*.*
2. *Pour tout couple* (z, z') *de nombres complexes,*
   - *i.* $\cos(z + z') = \cos(z)\cos(z') - \sin(z)\sin(z')$*,*
   - *ii.* $\sin(z + z') = \sin(z)\cos(z') + \cos(z)\sin(z')$*.*
3. *Pour tout nombre complexe* $z = x + i\,y$*, où* x *et* y *sont réels,*
   - *i.* $\cos(x + i\,y) = \cos(x)\,\mathrm{ch}(y) - i\sin(x)\,\mathrm{sh}(y)$*,*
   - *ii.* $\sin(x + i\,y) = \sin(x)\,\mathrm{ch}(y) + i\cos(x)\,\mathrm{sh}(y)$*.*
4. *De plus, pour tout nombre complexe* z*,* $\cos(\bar{z}) = \overline{\cos(z)}$*,* $\sin(\bar{z}) = \overline{\sin(z)}$*.*
5. *Enfin, pour tout nombre complexe* $z = x + i\,y$ *,*
   - *i.* $|\cos(z)|^2 = \cos^2(x) + \mathrm{sh}^2(y) = \mathrm{ch}^2(y) - \sin^2(x)$*,*
   - *ii.* $|\sin(x)|^2 = \sin^2(x) + \mathrm{sh}^2(y)$*.*
6. *Pour tout couple* (z, z') *de nombres complexes,*
   - *i.* $\cos(z') = \cos(z) \Leftrightarrow \begin{cases} z \equiv z'\,(\mathrm{mod.}\,2\pi) \\ z \equiv -z'\,(\mathrm{mod.}\,2\pi) \end{cases}$
   - *ii.* $\sin(z') = \sin(z) \Leftrightarrow \begin{cases} z \equiv z'\,(\mathrm{mod.}\,2\pi) \\ z \equiv \pi - z'\,(\mathrm{mod.}\,2\pi) \end{cases}$
7. *Soit* z *un nombre complexe pour que* $\cos(z) = 0$*, il faut et il suffit que* z *appartienne à l'ensemble* P *des nombres réels congrus à* $\pi/2$ *modulo* π*.*
8. *L'application* $\tan\colon z \mapsto \sin(z)/\cos(z)$ *est une application continue de* $C\backslash P$ *dans* $\mathbb{C}$*.*
9. $P = \{x \in \mathbb{R};\, x = \frac{\pi}{2} + k\,\pi\}$*. L'image de* $\mathbb{C}\backslash P$ *par cette application est* $\mathbb{C}\backslash\{-i, i\}$*.*
10. *En outre, cette application est périodique de période* n *plus précisément, pour tout couple* (z, z') *d'éléments de* $C\backslash P$*,* $\tan(z') = \tan(z) \Leftrightarrow z \equiv z'\,(\mathrm{mod.}\,\pi)$*.*

11.4.6 Série de Fourier

Définition 11.83. *Soit* f *une fonction* 2π*-périodique continue par morceaux à valeurs complexes. On appelle coefficients de Fourier de* f *les nombres :* $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt, n \in \mathbb{Z}$*.*

Remarque 11.84. Dans les applications, on utilise parfois les nombres :

- $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt$,
- $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(n\,t)dt$,

– $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(n\,t)dt$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Lorsque la fonction f est paire (resp. impaire), les coefficients b_n (resp. a_n) sont nuls.

11.4.6.1 Coefficients de Fourier d'une dérivée

Proposition 11.85. *Si f est continue et de classe C^1 par morceaux, les coefticients de Fourier de f' sont liés à ceux de f par $c_n(f') = i\,n\,c_n(f)$*

11.4.6.2 Convergence simple

Proposition 11.86.

1. *(théorème de Dirichlet) Si f est de classe C^1 par morceaux, pour tout nombre réel x, la suite de terme général $S(x) = \sum_{p=-n}^{n} c_p e^{ipx}$ converge vers $f(x) = \frac{f(x+\bullet)+f(x-\bullet)}{2}$*
2. *En particulier, si, pour tout nombre réel x, $f(x) = \frac{f(x+\bullet)+f(x-\bullet)}{2}$ (condition de Dirichlet), la suite (S_n) converge simplement vers f.*
3. *(Egalité de parseval) Si f est continue par morceaux, la série de terme général $(|c_n|^2)$ converge et $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_n(t)|^2 dt$.*

11.4.6.3 Convergence normale

Proposition 11.87. *Si f est continue et de classe C^1 par morceaux, la série de terme général $(|c_n|^2)$ est convergente et la série de Fourier de f est normalement convergente sur $\mathbb{R}$.*

11.5 Fonctions à valeurs réelles en « treillis » !

Définition 11.88. *On notera $\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$ l'algèbre des applications continues de $E \to \mathbb{R}$ muni de la topologie de la convergence uniforme.*

Note 11.89. Il convient d'établir auparavant que l'ensemble des applications continues de $E \to \mathbb{R}$ à bien une structure d'algèbre.

Définition 11.90. *Ensemble réticulé : synonyme de treillis.*

Note 11.91. Définition dictionnaire de mathématiques P.U.F.

Définition 11.92. *Treillis : Ensemble ordonné E tel que toute partie $\{x; y\}$ de E, à deux éléments admette une borne inférieure (notée $x \wedge y$) et une borne supérieure (notée $x \vee y$).*

Note 11.93. Définition dictionnaire de mathématiques P.U.F.

Définition 11.94. *On dit qu'une partie A de $\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$ est réticulée si et seulement si pour toute $f, g \in A$, $\sup(f; g)$ et $\inf(f; g)$ appartiennent aussi à A.*

Lemme 11.95. *Soit A une partie réticulée de $\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$. Dire qu'une fonction $f \in \mathcal{C}(X; \mathbb{R})$ appartient à la fermeture $\bar{A}$ de A équivaut à dire que $\forall x; y \in E; \forall \varepsilon > 0; \exists g_{x,y} \in A; |f(x) - g_{x,y}(x)| < \varepsilon$ et $|f(y) - g_{x,y}(y)| < \varepsilon$.*

Remarque 11.96. On note la fonction trouvée $g_{x,y}$ pour bien marquer qu'elle dépend de x, y.

Démonstration. CTES page 166 2003-2004. Cours de Topologie. □

Exemple 11.97. Soit E un intervalle $[a; b]$ de $\mathbb{R}$ et A l'ensemble des fonctions f continues sur E qui sont affines par morceaux (c'est à dire qu'il existe un recouvrement fini de E par des intervalles dans chacun desquels f est affine). Cet ensemble est évidement réticulé et pour tout $x, y; \exists f \in A$ qui prend en x et y des valeurs données quelconques. Donc $\bar{A} = \mathcal{C}(E; \mathbb{R})$.

Lemme 11.98. *Toute sous-algèbre fermée A de $\mathcal{C}(E;\mathbb{R})$ est réticulée.*

Démonstration. Cours de licence de mathématiques CTE 2003-2004 page 167. □

11.6 Théorème de Stone-Weierstrass

Note 11.99. A mettre dans la partie Espace d'application. Remettre un peu d'ordre le théorème est énoncé plusieurs fois !

Rappel : On désigne par $\mathcal{C}(X, Z)$ l'ensemble des fonctions continues définies sur X, à valeurs dans Z. On travail ici avec la topologie de la convergence uniforme ?

CTES 2003-2004 page 166 ce « théorème ... stupéfia ses contemporains ».

Définition 11.100. *On dit que A sépare les points de X si et seulement si $\forall x, y \in X; x \neq y$, $\exists f \in A; f(x) \neq f(y)$.*

Théorème 11.101. *Soient X un espace topologique compact et A une partie de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ [resp. de $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$] ayant les propriétés suivantes :*

i. A est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ [resp. une sous algèbre autoadjointe de $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ au sens où $f \in A \Rightarrow \bar{f} \in A$].

ii. A contient les fonctions constantes.

iii. A sépare les points de X : $\forall x, y \in X; x \neq y, \exists f \in A; f(x) \neq f(y)$.

Alors A est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ [resp. de $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$] pour la topologie de la convergence uniforme.

Autrement dit une fonction de $C(X, \mathbb{C})$ est limite uniforme d'une suite de fonction de A.

Démonstration. Cours Fack. Licence mathématiques Lyon. Analyse réelle. □

Note 11.102. Applications : voir livre de topologie-ellipse p.129

- Approximation par des fonctions polynômes sur un compact de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$.
- Approximation par des polynômes trigonométriques.
- Approximation de fonctions vectorielles
- Partie dénombrable partout dense.

Note 11.103. Autre formulation CTE page 168

1. Si une famille (f_i) d'éléments de $\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$ sépare les points de E et si les f_i ne s'annulent pas tous en un même point de E, toute fonction $f \in \mathcal{C}(E; \mathbb{R})$ est limite uniforme de polynômes (sans terme constant) par rapport aux f_i.
2. Si A contient les constantes alors $\bar{A} = \mathcal{C}(E; \mathbb{R})$. (autrement dit A est dense dans $\mathcal{C}(E; \mathbb{R})$).

Note 11.104. Corollaire : C'est le théorème de Weierstass ! preuve CTE page 169 cours de topologie 2003-2004. Soit A une sous-algèbre sur le corps $\mathbb{C}$ de $\mathcal{C}(E; \mathbb{C})$ telle que :

1. A sépare les points de E.
2. Pour tout $x \in E$, il existe $f \in A$ telle que $f(x) \neq 0$.
3. Pour tout $f \in A$, on a aussi $\bar{f} \in A$ (où $\bar{f}$ désigne la conjugée de f)

Alors $\bar{A} = \mathcal{C}(E; \mathbb{C})$ (autrement dit A est dense dans $\mathcal{C}(E; \mathbb{C})$).

Remarque 11.105. La condition (3) $f \in A \Rightarrow \bar{f} \in A$ du corollaire est essentielle :

Prenons en effet pour E le disque unité $\mathbb{C}$ et soit A l'ensemble des polynômes de la variable complexe z. L'algèbre A vérifie les conditions (1) et (2) mais pas (3). On vérifie que $\bar{A} \neq \mathcal{C}(E; \mathbb{C})$:

Si $f \in A$ alors $f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it})dt$. En particulier cette identité est valable quelque soit $\bar{f} \in \bar{A}$, cependant cette égalité n'est pas valable $\forall f \in \mathcal{C}(E;\ \mathbb{C})$. Si par exemple $f(z) = z$, cette identité est fausse.

11.7 Approximation de fonction

Prérequis : Théorème de Stone Weierstrass.

11.7.1 ... continue par des polynômes sur un compact de $\mathbb{C}^n$

Théorème 11.106. *Pour toute fonction continue $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$, il existe une suite $(P_1, P_2, ...)$ de polynômes à coefficients complexes telle que :*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - P_n(x)| \to 0$$

Autrement dit la suite de polynôme converge uniformément vers f.

Démonstration. Application directe du théorème de Stone-Weierstrass qui dit que $P(\mathbb{C})$ est dense dans $C([a,b],\mathbb{C})$. Cours Fack. Licence mathématiques Lyon. Analyse réelle. □

11.7.2 ... continue périodique par des polynômes trigonométriques

Rappel : Un polynôme trigonométrique P est une combinaison linéaire (à coefficient complexes) d'exponentielles complexes $e^{int}, n \in \mathbb{Z}$ i.e.

$$P(t) = \sum_{|n|\leqslant N} C_n\, e^{int}$$

Théorème 11.107. *Pour toute fonction continue $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique, il existe une suite $(P_1, P_2, ...)$ de polynômes trigonométriques à coefficients complexes telle que :*
$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - P_n(x)| \to 0.$

Démonstration. Même remarque que précédement. Cours Fack. Licence mathématiques Lyon. Analyse réelle. □

Chapitre 12
Séries entières

12.1 Développements en série entière : DSE

12.1.1 Définitions

Définition 12.1. *Soient $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(0)$, $f \in \mathbb{C}^V$. On dit que f est développable en série entière (centrée) en 0 si et seulement si :*

1. *il existe une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ de rayon noté $R>0$,*
2. *et $U \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(0)$ tels que $\forall x \in U \cap V \cap]-R;R[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$*

12.1.2 Développements usuels en série entière centrée en 0 : DSE(0)

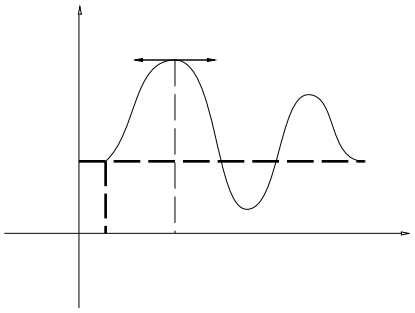
D.S.E.(0) : Développement en série entière centrée en 0.
R.C. : Rayon de convergence.
E.V. : Ensemble de validité.

Fonctions	Séries	D.S.E.(0)	R.C.	E.V.
e^x	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...$	$+\infty$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{ch}(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...$	$+\infty$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{sh}(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+...$	$+\infty$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$	$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...$	$+\infty$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$1-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+...$	$+\infty$	$\mathbb{R}$
$(1+x)^{\alpha(\in\mathbb{N})}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-(n-1))x^n}{n!}$	$1+\frac{\alpha x}{1!}+\frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!}+...$	$+\infty$	$\mathbb{R}$
$(1+x)^{\alpha(\in\mathbb{R})}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-(n-1))x^n}{n!}$	$1+\frac{\alpha x}{1!}+\frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!}+...$	1	$]-1,1[$
$\frac{1}{1+x}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$	$1-x+x^2-x^3+...$	1	$]-1,1[$
$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	$1+x+x^2+x^3+...$	1	$]-1,1[$
$\ln(1+x)$	$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$	$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...$	1	$]-1,1]$
$-\ln(1-x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$	$x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+...$	1	$[-1,1[$
$\arg\mathrm{th}(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+...$	1	$]-1,1[$
$\arctan(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{2n+1}$	$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-...$	1	$[-1,1]$
$\sqrt{1+x}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n+2)!x^n}{2^{2n-1}(n-1)!n!}$	$1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+...$	1	$-1,1$
$\frac{1}{\sqrt{1+x}}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2n)!x^n}{2^{2n}(n!)^2}$	$1-\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{8}-...$	1	$-1,1$
$\arg\mathrm{sh}(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{3}{8}\cdot\frac{x^5}{5}-...$	1	$[-1,1]$
$\arcsin(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{3}{8}\cdot\frac{x^5}{5}+...$	1	$[-1,1]$

Chapitre 13
Dérivation

13.1 Théorème de Rolle et des accroissements finis

13.1.1 Théorème de Rolle



Théorème 13.1. *(Théorème de Rolle)*
Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, *tels que* $a<b$, $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ *une application.*

si $\left\{\begin{array}{c} f \text{ est continue sur } [a,b] \\ f \text{ est dérivable sur }]a,b[\\ f(a)=f(b) \end{array}\right|$, *alors il existe* $c\in]a,b[$ *tel que* $f'(c)=0$.

Démonstration. Analyse I J.M. Monier p.137 □

13.1.2 Théorème des accroissements finis

Chapitre 14
Matrices

Introduite vers 1850 par Sylvester, la notion de matrice, dont la théorie a été développée par Hamilton et Cayley est un outil efficace en algèbre linéaire et en mathématiques appliqué (Dictionnaire des Mathématiques A. Bouvier et M. George PUF).

Soit n un entier. Notons $\mathbb{N}_n$ l'ensemble des entiers inférieurs ou égaux à n : $\mathbb{N}_n = \{1, 2, ..., n\}$. Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif. Tous les $\mathbb{K}$-ev considérés seront supposés de dimension finie et supérieure ou égale à 1.

On verra que l'ensemble des matrices est isomorphe à l'ensemble des applications linéaires continues. Ce qui explique la similitude des définitions et propriétés des deux ensembles.

Rajouter la structure d'espace euclidien.

14.1 Notion de matrice

Définition 14.1. *Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif,*
soient n et p deux entiers naturels non nuls,
soient les ensembles $I = \mathbb{N}_n$ et $J = \mathbb{N}_p$.
- On appelle ***matrice à n lignes et p colonnes à éléments dans $\mathbb{K}$ ou matrice (n, p)*** *une application A:* $\left| \begin{array}{c} I \times J \longrightarrow \mathbb{K}. \\ (i,j) \mapsto \alpha_{\mathrm{ij}} \end{array} \right.$.
- On la note $(\alpha_{\mathrm{ij}})_{(i,j)\in I\times J}$ ou $(\alpha_{i,j})$ si aucune confusion n'est à craindre.
- L'image $\alpha_{i,j}$ du couple (i, j) est appelée ***élément, terme ou coefficient de la matrice*** *A. Il est d'usage de définir une matrice par la liste de ses éléments disposés sous forme d'un tableau :*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & ... & \alpha_{1,p} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & ... & \alpha_{2,p} \\ ... & ... & ... & ... \\ \alpha_{1,n} & \alpha_{2,n} & ... & \alpha_{n,p} \end{pmatrix}$$

- Pour tout $i \in I$: le p-uple $\left(\alpha_{i,1}, \ ..., \ \alpha_{i,p} \right)$ s'appelle la $i^{\text{ème}}$ ***ligne de la matrice*** *A.*
- Pour tout $j \in J$: le p-uple $\left(\alpha_{1,j}, \ ..., \ \alpha_{n,j} \right)$ s'appelle la $j^{\text{ème}}$ ***colonne de la matrice*** *A.*
- (n,p) est appelé ***format de la matrice*** *A.*
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la ***matrice*** *A est dite* ***réelle****. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la matrice est dite* ***complexe****.*
- Si $m = n$, la matrice A est dite ***carrée d'ordre n****.*
- Si p=1, la matrice A est appelée ***matrice-colonne ou unicolonne*** *.*
- Si n=1, la matrice A est appelée ***matrice-ligne ou uniligne****.*
- On appelle ***matrice élémentaire*** *et on note E_{ij} :*
la matrice dont le terme $\alpha_{i,j}$ vaut *1 et tous les autres sont nuls :*

$$E_{\mathrm{ij}} = \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & & j & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Note 14.2. On note $M_{n,p}(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices (n, p) à éléments dans $\mathbb{K}$.

Note 14.3. On note $M_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à éléments dans $\mathbb{K}$.

Dans ce cas, on a $M_n(\mathbb{K}) = M_{n,p}(\mathbb{K})$.

Proposition 14.4. *En utilisant le symbole de Kronecker noté δ et défini par* $\delta_{xy} = \begin{cases} 1 \text{ si } x = y \\ 0 \text{ si } x \neq y \end{cases}$ *, on a :* $E_{ij} = (\delta_{ki}\delta_{lj})_{k\in\mathbb{N}_n; l\in\mathbb{N}_p}$.

14.2 Exemples d'application

Nous allons maintenant établir des relations entre un espace vectoriel de dimension finie, l'ensemble des applications linéaires $\mathcal{L}(E, F)$ (on peut noter $L(E, F)$ où $\mathcal{L}(E, F)$ car en dimension finie toute application linéaire est continue) et l'ensemble des matrices $M_{n,p}(\mathbb{K})$. Ce qui permettra de comprendre le choix des définitions des notions de rang, addition et multiplications des matrices.

14.2.1 ... en algèbre linéaire

14.2.1.1 Matrice associé à un vecteur

Définition 14.5. *Soient E un $\mathbb{K}-$ev, $n = \dim(E)$.*
Soient $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E.
Soit x un vecteur de E, notons $(x_1, ..., x_n)$ les composantes de x dans $\mathcal{B}$: $x = \sum_{i=1}^{n} x_i \times e_i$.
La matrice colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *s'appelle la* ***matrice-colonne des composantes*** *de x dans $\mathcal{B}$.*
On la note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$.

Remarque 14.6. L'application $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}$: $\left|\begin{array}{ccc} E & \to & M_{n,1}(\mathbb{K}) \\ x & \mapsto & X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \end{array}\right.$ est une bijection.

On peut donc renforcer le lien entre X et x en disant que " ***x* est représentée par *X* dans *$\mathcal{B}$* ", ou que " ***X* représente *x* dans la base *$\mathcal{B}$* ".

14.2.1.2 Matrice associée à une famille de vecteur

Définition 14.7. *Soient E un $\mathbb{K}-$ev, $n = \dim(E)$.*
Soient $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E.
Soit $\mathcal{F} = \{V_1, ..., V_p\}$ une famille non vide de p vecteurs de E.
Notons $(a_{1j}, ..., x_{nj})$ les composantes de V_j dans $\mathcal{B}$ $(j \in \mathbb{N}_p^*)$: $V_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \times e_i$.
La matrice $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$ *de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ s'appelle la* ***matrice de la famille*** *$\{V_1, ..., V_p\}$ de x dans $\mathcal{B}$.*
On la note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.

14.2.1.3 Matrice associée à une application linéaire

Définition 14.8. *Soient E, F deux $\mathbb{K}-$ev, $p = \dim(E)$, $n = \dim(F)$.*
Soient $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ et $\mathcal{C} = (f_1, ..., f_n)$ deux bases de E et F.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire.
Notons $(a_{1j}, ..., a_{nj})$ les composantes de $f(e_j)$ dans $\mathcal{C}$: $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} (a_{ij} \times f_i)$.
- On appelle ***matrice de (ou associé à) l'application linéaire f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$,*** *et on note* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$, *la matrice de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par :*
$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = (a_{ij})$.

Remarque 14.9. Autrement dit, c'est la matrice dont les colonnes sont les composantes de $f(e_j)$ dans $\mathcal{C}$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)=\begin{pmatrix} f(e_1) & \dots & f(e_j) & \dots & f(e_p) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

Esquisse de Relation entre $\mathcal{L}(E,F)$ et $M_{n,p}(\mathbb{K})$

Remarque 14.10. L'application $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$: $\left|\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \to & M_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \end{array}\right.$ est une bijection.

On peut donc renforcer le lien entre f et A en disant que **«f est représentée par A»**, ou que **«A représente f dans les bases $\mathcal{B},\mathcal{C}$ »**.

14.2.1.4 Matrice associée à un endomorphisme

Définition 14.11. *Soient E un $\mathbb{K}-$ev, $n=\dim(E)$.*
Soient $\mathcal{B}=(e_1,...,e_n)$ une base de E.
Soit $f\in\mathcal{L}(E)$ un endomorphisme.
*On appelle **matrice de (ou associé à) l'endomorphisme f relativement à la base** $\mathcal{B}$, et on note* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$*, la matrice de $M_n(\mathbb{K})$ définie par :*
$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$.

Remarque 14.12. Ce n'est qu'un cas particulier de la section précédente : E=F et $\mathcal{B}=\mathcal{B}'$.

14.2.2 ... en calcul différentiel

Matrice jacobienne.

14.3 Rang d'une matrice

Proposition 14.13. *Le rang de la famille de colonnes de A dans $M_{n,1}(\mathbb{K})$ est égal au rang de la famille de lignes de A dans $M_{1,p}(\mathbb{K})$. ?????*

Définition 14.14. *Soit $A\in M_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **rang** de A et on note rg(A) :*
le rang de la famille de colonnes [lignes] de A dans $M_{n,1}(\mathbb{K})$[resp. $M_{1,p}(\mathbb{K})$].

Proposition 14.15. *Soit $A\in M_{n,p}(\mathbb{K})$.* $\mathrm{rg}(A)\leqslant\mathrm{Min}(n,p)$.

Proposition 14.16. *Soient E, F deux $\mathbb{K}-$ev. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des bases de E et F.*
Si $f\in\mathcal{L}(E,F)$ et $A=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$. On a $\mathrm{rg}(f)=\mathrm{rg}(A)$.

14.4 Construction de l'espace vectoriel normé $M_{n,p}(\mathbb{K})$

Pour munir $M_{n,p}(\mathbb{K})$ d'une structure d'espace vectoriel, on doit définir une loi de composition interne et un loi de composition externe. Cette définition ne se fait pas au hasard (voir livre J.M. Monier Algèbre 1 page 264). Etant donné que l'on a définit une bijection entre l'ensemble des fonctions linéaires $\mathcal{L}(E,F)$ et l'ensemble des matrices $M_{n,p}(\mathbb{K})$, on définit sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$ une addition puis une multiplication par un scalaire de telle manière qu'elles correspondent respectivement avec l'addition puis la multiplication par un scalaire dans $\mathcal{L}(E,F)$. Conséquence immédiate : l'application $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ définie précédement devient un isomorphisme. Comme $M_{n,p}(\mathbb{K})$ est un *e.v.* on peut définir sur celui des normes comme sur n'importe-quel *e.v.*. Dans le cas des matrices carrées, nous pourrons également définir une structure d'algèbre et les normes subordonnées. ?Lire auparavant le cours sur l'espace vectoriel normé?

14.4.1 Addition et multiplication sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition 14.17. *Soit $A=(a_{ij})$ et $B=(b_{ij})$ deux matrices de $M_{n,p}(\mathbb{K})$.*

- On appelle addition dans $M_{n,p}(\mathbb{K})$, la loi interne, notée $+$, définie par :

$$\left|\begin{array}{ccc} M_{n,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & M_{n,p}(\mathbb{K}) \\ (A,B) & \mapsto & A+B=(a_{ij}+b_{ij}) \end{array}\right.$$

- On appelle multiplication par un scalaire, la loi externe, notée par l'absence de symbole ou un point et définie par :

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times M_{n,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & M_{n,p}(\mathbb{K}) \\ (\alpha,A) & \mapsto & \alpha B=(\alpha\times a_{ij}) \end{array}\right.$$

Remarque 14.18. On ne peut additionner que des matrices de même format.

Proposition 14.19. *$(M_{n,p}(\mathbb{K}),+,.)$ est un $\mathbb{K}-$ev.*

L'élément neutre pour l'addition est la matrice de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les termes sont nuls :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}_{n,p}$$

, on la note $0_{n,p}$ ou 0.

Proposition 14.20.

- $(E_{ij})_{i\in\mathbb{N}_n;j\in\mathbb{N}_p}$ est une base de $M_{n,p}(\mathbb{K})$, appelée base canonique de $M_{n,p}(\mathbb{K})$.

- $\dim(M_{n,p}(\mathbb{K}))=n\times p$

Exemple 14.21. $E_{11}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $E_{12}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $E_{21}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $E_{22}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$(E_{11};E_{12};E_{21};E_{22})$ est la base canonique de $M_2(\mathbb{K})$.

Renforcement de la relation entre $\mathcal{L}(E,F)$ et $M_{n,p}(\mathbb{K})$

Proposition 14.22. *Pour tous $\mathbb{K}-$ ev E (de dimension p) et F (de dimension n) et pour toutes bases $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{C}$ de F, l'application :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}:\left|\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \to & M_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \end{array}\right.$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}-$ev.

14.4.2 Normes sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$

Comme précédement $M_{n,p}(\mathbb{K})$ étant isomorphe à $\mathcal{L}(E,\,F)$, on va définir sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$ le même type de norme que sur $\mathcal{L}(E,F)$.

Proposition 14.23. *Les applications N_a:* $\left|\begin{array}{ccc} M_{n,p}(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{R}^+ \\ (a_{ij}) & \mapsto & N_a(a_{ij}) \end{array}\right.$ *suivantes sont des normes sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$:*

- $N_1(a_{ij})=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n,p}|a_{ij}|$,
- $N_2(a_{ij})=\sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n,p}|a_{ij}|^2}$, *norme de Frobenius*
- $N_\infty(a_{ij})=\max_{1\leqslant i,j\leqslant n,p}|a_{ij}|$

Note 14.24. $N_1(M^2)\leqslant(N_1(M))^2$? Est ce vrai aussi pour N_2 et N_∞ ?

Proposition 14.25. *Soient $A\in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $\|.\|_n,\|.\|_p$ deux normes de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ et $M_{p,1}(\mathbb{K})$ alors on a :*

$$\inf_{X\in M_{p,1}(\mathbb{K})}\{k\in\mathbb{K};\|AX\|_n\leqslant|k|\times\|X\|_p\}=\sup_{\substack{X\neq 0\\ X\in M_{p,1}(\mathbb{K})}}\frac{\|AX\|_n}{\|X\|_p}=\sup_{\substack{\|X\|_p\leqslant 1\\ X\in M_{p,1}(\mathbb{K})}}\|AX\|_n=\sup_{\substack{\|X\|_p=1\\ X\in M_{p,1}(\mathbb{K})}}\|AX\|_n.$$

Ce réel est noté $\|A\|_{n,p}$ ou simplement $\|A\|$ si aucune confusion n'est possible.

Définition 14.26. *Soient $\|.\|_n, \|.\|_p$ deux normes de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ et $M_{p,1}(\mathbb{K})$.*

*On appelle **norme d'opérateur définie à partir de** ou **subordonnée à** $\|.\|_n$, $\|.\|_p$ d'une matrice, l'application notée $\|.\|_{n,p}$ telle que :*

$$\|.\|_{n,p}: \left| \begin{array}{ccc} M_{n,p}(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{R}_+ \\ A & \mapsto & \|A\|_{n,p} \end{array} \right.$$

Théorème 14.27.

1. *L'application $\|.\|_{n,p}$ est une norme sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$.*
2. *Si $A \in M_{n,p}(\mathbb{K}), X \in M_{p,1}(\mathbb{K})$, $\|A\,X\|_n \leqslant \|A\|_{n,p} \times \|X\|_p$*
3. *Si $A \in M_{n,p}(\mathbb{K}), B \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ $\|A\,B\|_{n,q} \leqslant \|A\|_{n,p} \times \|B\|_{p,q}$*

Proposition 14.28. *Toutes les normes sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes.*

14.5 Multiplication des matrices

Comme précédement cette définition ne se fait pas au hasard. Etant donné que l'on a définit une bijection entre l'ensemble des applications linéaires $\mathcal{L}(E,\ F)$ et l'ensemble des matrices $M_{n,p}(\mathbb{K})$, on définit la multiplication afin que la composition de 2 applications $f \circ g$ corresponde au produit des matrices qui les représentent $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f \circ g)$.

Définition 14.29. *Soient $A = (a_{\mathrm{ik}})_{\mathrm{ik}} \in M_{n,p}(\mathbb{K}), B = (b_{\mathrm{kj}})_{\mathrm{kj}} \in M_{p,q}(\mathbb{K})$.*

*On appelle **produit de A par B** et on note $A \times B$ ou AB, la matrice de $M_{n,q}(\mathbb{K})$ définie par :*
$A \times B = (c_{\mathrm{ij}})_{\mathrm{ij}}$ où $\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_q$ et $c_{\mathrm{ij}} = \sum_{k=1}^{p} a_{\mathrm{ik}} \times b_{\mathrm{kj}}$

$$\begin{pmatrix} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ i \to & a_{i1} & \dots & a_{\mathrm{ik}} & \dots & a_{\mathrm{ip}} \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} & j & \\ & \downarrow & \\ \dots & b_{1j} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & b_{\mathrm{kj}} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & b_{\mathrm{pj}} & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & j & \\ & & \downarrow & \\ & \dots & \dots & \dots \\ i \to & \dots & \sum_{k=1}^{p} a_{\mathrm{ik}} \times b_{\mathrm{kj}} & \dots \\ & \dots & \dots & \dots \\ & \dots & \dots & \dots \\ & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Remarque 14.30. Le produit AB existe si et seulement si le nombre de colonne de A est égal au nombre de ligne de B.

Définition 14.31. *Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$.*

*- On appelle **noyau de A** le sev de $M_{p,1}(\mathbb{K})$, noté $\mathrm{Ker}(A)$, tel que :*

$$\mathrm{Ker}(A) = \{X \in M_{p,1}(\mathbb{K}); \mathrm{AX} = 0\}.$$

*- On appelle **image de A** le sev de $M_{p,1}(\mathbb{K})$, noté $\mathrm{Im}(A)$, tel que :*
$\mathrm{Im}(A) = \{\mathrm{AX}; X \in M_{p,1}(\mathbb{K})\}$.

Proposition 14.32.

- (Pseudo-distributivité à gauche) Soient $A \in M_{n,p}(\mathbb{K}), B, C \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ alors

$$A(B+C) = \mathrm{AB} + \mathrm{AC}.$$

- (Pseudo-distributivité à droite) Soient $A, B \in M_{n,p}(\mathbb{K}), C \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ alors

$$(A+B)C = \mathrm{AC} + \mathrm{BC}.$$

- Soient $A \in M_{n,p}(\mathbb{K}), B \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors

$$(\lambda A)B = \lambda(\mathrm{AB}) = A(\lambda B).$$

- (Pseudo-associativité) Soient $A \in M_{n,p}(\mathbb{K}), B \in M_{p,q}(\mathbb{K}), C \in M_{q,r}(\mathbb{K})$ alors
$(\mathrm{AB})C = A(\mathrm{BC})$.

Proposition 14.33. *Soient E,F,G 3 $\mathbb{K}$-ev; $\mathcal{B},\mathcal{C},\mathcal{D}$ des bases respectives de E,F,G et 2 applications $f\in\mathcal{L}(E,F)$ et $g\in\mathcal{L}(F,G)$. On a :*
- $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(f)\times\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g)=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f\circ g)$.
- $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f(x))=(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f))\times(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x))$.

14.6 Transposition et transposée d'une matrice

Définition 14.34. *Soit une matrice* $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \dots & a_{\mathrm{np}}\end{pmatrix}$ *de* $M_{n,p}(\mathbb{K})$.

On appelle ***transposée*** *de A la matrice notée* ${}^tA$ *de* $M_{p,n}(\mathbb{K})$ *définie par :*

${}^tA=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{1p} & \dots & a_{\mathrm{np}}\end{pmatrix}$

Exemple 14.35. si $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\end{pmatrix}$ alors ${}^tA=\begin{pmatrix}1&5\\2&6\\3&7\\4&8\end{pmatrix}$

Remarque 14.36.

-On peut dire que l'on obtient ${}^tA$ en échangeant les lignes et les colonnes ou par symétrie par rapport à la diagonale.

-La transposée d'une matrice colonne est une matrice ligne et réciproquement.

Proposition 14.37.

-Soit A une matrice de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ alors ${}^{\mathrm{tt}}A=A$
-Soient A,B deux matrices de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\alpha\in\mathbb{K}$ alors ${}^t(\alpha A+B)=\alpha{}^tA+{}^tB$
-Soient A,B deux matrices de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $M_{p,q}(\mathbb{K})$ ${}^t(\mathrm{AB})={}^tB\,{}^tA$
-$\mathrm{rg}({}^tA)=\mathrm{rg}(A)$?

14.7 Transconjugaison ou Matrice adjointe

Définition 14.38. *Soit une matrice* $A=(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}=\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p}\end{pmatrix}$ *de* $M_{n,p}(\mathbb{C})$.

On appelle ***transconjuguée ou matrice adjointe*** *de A la matrice notée* A^* *de* $M_{p,n}(\mathbb{C})$ *définie par :*

- $A^*=\overline{{}^tA}={}^t\bar{A}$
- ou $A^*=(\overline{a_{i,j}})_{\substack{1\leqslant j\leqslant p\\1\leqslant i\leqslant n}}=\begin{pmatrix}\overline{a_{1,1}} & \dots & \overline{a_{n,1}}\\ \vdots & & \vdots\\ \overline{a_{1,p}} & \dots & \overline{a_{n,p}}\end{pmatrix}$

Exemple 14.39. si $A=\begin{pmatrix}1&i&0\\2+i&3&1-i\end{pmatrix}$ alors $A^*=\begin{pmatrix}1&2-i\\-i&3\\0&1+i\end{pmatrix}$

Proposition 14.40.

1. *Soient A,B deux matrices de* $M_{n,p}(\mathbb{C})$ *et* $\alpha\in\mathbb{K}$ *alors* $(\alpha A+B)^*=\bar{\alpha}A^*+B^*$,
2. *Soit A une matrice de* $M_{n,p}(\mathbb{C})$ *alors* $A^{**}=A$,
3. *Soient A une matrice de* $M_{n,p}(\mathbb{C})$ *alors* $\mathrm{rg}(A^*)=\mathrm{rg}(A)$,
4. *Soient A,B deux matrices de* $M_{n,p}(\mathbb{C})$ *alors* $(\mathrm{AB})^*=B^*A^*$.

14.8 Opérations élémentaires

Soit A une matrice de $M_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle opérations élémentaires sur A l'échange de deux colonnes/lignes, le remplacement d'une colonne/ligne C_j par αC_j où $\alpha \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$, le remplacement d'une colonne/ligne par $C_j + \alpha C_k$ où $\alpha \in \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}_p\backslash\{j\}$.

Proposition 14.41. *Les opérations élémentaires sur les colonnes ou sur les lignes ne changent pas le rang. Autrement dit, si B se déduit de A par des opérations élémentaires alors* $\mathrm{rg}(B) = \mathrm{rg}(A)$.

Exemple 14.42. $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 10 & 11 \\ 9 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 2 & 8 \\ 7 & 1 & 7 & 2 \\ 20 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A') = \mathrm{rg}(A'') = \mathrm{rg}(A''')$

- $(2 \times C_1) \to A' = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 10 & 11 \\ 18 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 4 & 2 & 8 \\ 14 & 1 & 7 & 2 \\ 40 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$,
- $(C_2 + 3 \times C_3 \to C_2) \to A'' = \begin{pmatrix} 4 & 35 & 10 & 11 \\ 9 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 10 & 2 & 8 \\ 7 & 22 & 7 & 2 \\ 20 & 15 & 5 & 1 \end{pmatrix}$,
- $(L_2 \leftrightarrow L_5) \to A''' = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 10 & 11 \\ 20 & 0 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 8 \\ 7 & 1 & 7 & 2 \\ 9 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

14.9 Spécificités propres aux matrices carrées

On s'intéresse désormais plus spécifiquement à l'ensemble des matrices carrées qui peut être muni de plusieurs structures, anneau, espace vectoriel et algèbre. Nous avons également regroupé dans cette partie toutes les définitions et les propriétés vérifiées uniquement par les matrices carrées.

14.9.1 Construction de l'anneau et de l'algèbre normée $M_n(\mathbb{K})$

Proposition 14.43.
- $(M_n(\mathbb{K}), +, \times)$ *est un anneau unitaire.*
- $(M_n(\mathbb{K}), +, ., \times)$ *est une $\mathbb{K}$-algèbre associative et unitaire.*

L'élément neutre pour la multiplication dans $M_n(\mathbb{K})$ est la matrice de $M_n(\mathbb{K})$ notée I_n telle que :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Définition 14.44. *La norme subordonnée à $\|.\|_n$ et $\|.\|_n$ est appelé norme subordonnée et on la note $\|.\|_s$.*

Proposition 14.45. *Toutes les normes subordonnées sur $M_n(\mathbb{K})$ sont des normes d'algèbre. Le couple formé par l'ensemble des matrices carrées et la norme subordonnée i.e. $(M_n(\mathbb{K}), \|.\|_s)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre normée.*

Remarque 14.46.
- Dans le cas des matrices la norme d'algèbre est aussi appelé norme matricielle.

– Il existe des normes matricielles non subordonnées à un norme : exemple la norme de Frobénius $F(A)=\sqrt{\mathrm{tr}(A^*A)}$.

Exemple 14.47. rajouter des exemples de normes subordonnées.

Norme de $M_{n,1}(\mathbb{K})$	Nom	Norme subordonnée	Nom
$\|X\|_1=\sum_{i=1}^n \|x_i\|$	convergence moyenne	$\|A\|_{s_1}=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^n \|a_{ij}\|$	
$\|X\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}(\|x_i\|)$	convergence absolue	$\|A\|_{s_\infty}=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^n \|a_{ij}\|$	
$\|X\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i)^2}$	euclidienne	$\|A\|_{s_2}=\sqrt{\rho}$, ρ rayon spectral de A	spectrale

Proposition 14.48. *Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E, l'application :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}:\left|\begin{array}{ccc}\mathcal{L}(E) & \to & M_n(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\end{array}\right. \quad \textit{est un isomorphisme de } \mathbb{K}\textit{-algèbre.}$$

14.9.2 Trace d'une matrice carrée

La notion trace n'est définie que pour les matrices carrées.

Définition 14.49. *Soit $A=(a_{ij})$ une matrice de $M_n(\mathbb{K})$.*
*On appelle **trace** de A et on note $\mathrm{tr}(A)$ l'élément de $\mathbb{K}$ défini par : $\mathrm{tr}(A)=\sum_{i=1}^n a_{ii}$.*
Autrement dit, $\mathrm{tr}(A)$ est la somme des éléments diagonaux de A.

Proposition 14.50.

1.
2. *Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{K})$ alors $\mathrm{tr}({}^tA)=\mathrm{tr}(A)$,*
3. *Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ $\mathrm{tr}(A^*)=\overline{\mathrm{tr}(A)}$?? ou ?? $\mathrm{tr}(A)$.*

14.9.3 Matrice carrée nilpotente

La notion nilpotence n'est définie que pour les matrices carrées.

Définition 14.51. *Une matrice carrée A de $M_n(\mathbb{K})$ est dite **nilpotente** si et seulement s'il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $A^k=0$.*

Proposition 14.52. *L'ensemble $\{k\in\mathbb{N}^*; A^k=0\}$ admet un plus petit élément.*

Définition 14.53. *Le plus petit élément de l'ensemble $\{k\in\mathbb{N}^*; A^k=0\}$ est appelé **indice de nilpotence** et est noté $\nu(A)$.*

14.9.4 Matrice carrée inversible et groupe linéaire $\mathbf{GL}_n(\mathbb{K})$

La notion de matrice inversible n'est définie que pour les matrices carrées.

14.9.4.1 Matrice carrée inversible

Définition 14.54.
*- Une matrice A de $M_n(\mathbb{K})$ est dite **inversible** si et seulement s'il existe $A'\in M_n(\mathbb{K})$ telle que $AA'=A'A=I_n$.*
- Dans ce cas A' est appelée inverse de A et est noté A^{-1}.
*- Une matrice A de $M_n(\mathbb{K})$ est dite **singulière** si et seulement elle n'est pas inversible.*

Proposition 14.55. *Si A est inversible, alors A^{-1} est unique*

Théorème 14.56. *Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{K})$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*
- A est inversible à gauche.
- A est inversible à droite.

- *A est inversible.*
- *A est régulière à gauche.*
- *A est régulière à droite.*
- *A est régulière.*

14.9.4.2 Groupe Linéaire

Définition 14.57. *On appelle* **groupe linéaire** *et on note* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *:*
l'ensemble des matrices carrées inversibles de $M_n(\mathbb{K})$.

Proposition 14.58. *Comme son nom l'indique* $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$ *est un groupe.*

Proposition 14.59. *Soit E un* $\mathbb{K}-$ev *de dimension n et* $\mathcal{B}$ *une base de E, l'application :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}: \left| \begin{array}{ccc} (\mathrm{GL}(E), \circ) & \to & (M_n(\mathbb{K}), \times) \\ f & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \end{array} \right. \text{ est un isomorphisme de groupe.}$$

Autrement dit, chaque matrice inversible représente un automorphisme et inversement

14.9.4.3 Transposé d'une matrice carrée inversible

La définition de tranposée a déjà été vue dans le cas général.
Pour une matrice carrée, on la propriété supplémentaire suivante :

Proposition 14.60. $({}^tA \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})) \Leftrightarrow (A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}))$ *et* $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

Autrement dit : La transposée de la matrice carrée A est inversible $\Leftrightarrow$ *La matrice carrée A est inversible.*

De plus : l'inverse de la transposée est égale à la transposée de l'inverse.

14.9.4.4 Transconjugaison et matrice adjointe d'une matrice carrée inversible

La définition de transconjuguée a déjà été vue dans le cas général.
Pour une matrice carrée, on a la propriété supplémentaire suivante :

Proposition 14.61. $(A^* \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})) \Leftrightarrow (A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$ *et* $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$

Autrement dit : L'adjointe de la matrice carrée A est inversible $\Leftrightarrow$ *La matrice carrée A est inversible.*

De plus : l'inverse de l'adjointe est égale à l'adjointe de l'inverse.

14.9.4.5 Rang et matrice carrée inversible

La définition de rang a déjà été vue dans le cas général.
Pour une matrice carrée on a les propriétés supplémentaires suivantes :

Proposition 14.62. *Soit A une matrice de* $M_n(\mathbb{K})$. $(\mathrm{rg}(A) = n) \Leftrightarrow (A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}))$.
Autrement dit le rang d'une matrice carrée inversible correspond à son ordre.

Proposition 14.63. *Soit A une matrice de* $M_n(\mathbb{K})$, $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *et* $Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$.

$$\mathrm{rg}(\mathrm{AP}) = \mathrm{rg}(A) \text{ et } \mathrm{rg}(\mathrm{QA}) = \mathrm{rg}(A).$$

Autrement dit la multiplication par une matrice inversible ne modifie pas le rang d'une matrice.

14.9.5 Matrices carrées symétrique et antisymétrique

Les notions de matrice symétrique et antisymétrique ne sont définies que pour les matrices carrées.

14.9.5.1 Matrice carrée symétrique

Définition 14.64. *Une matrice carrée de* $M_n(\mathbb{K})$ *est dite* ***symétrique*** *si et seulement si :* ${}^tA = A$. *On note* $S_n(\mathbb{K})$ *l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n à coefficients dans* $\mathbb{K}$.

Proposition 14.65. $S_n(\mathbb{K})$ *est un sev de* $M_n(\mathbb{K})$.

Proposition 14.66.
-Soient deux matrices symétriques, $(AB \in S_n(\mathbb{K})) \Leftrightarrow (AB = BA)$.
autrement dit : dire que leur produit commute équivaut à dire que leur produit est symétrique.
-Si $A \in S_n(\mathbb{K}) \cap GL_n(\mathbb{K})$ *alors* $A^{-1} \in S_n(\mathbb{K})$
autrement dit si A est une matrice symétrique inversible A^{-1} *est aussi symétrique.*

14.9.5.2 Matrice carrée antisymétrique

Définition 14.67. *Une matrice carrée de* $M_n(\mathbb{K})$ *est dite antisymétrique si et seulement si :* ${}^tA = -A$. *On note* $A_n(\mathbb{K})$ *l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n à coefficients dans* $\mathbb{K}$.

Proposition 14.68. $A_n(\mathbb{K})$ *est un sev de* $M_n(\mathbb{K})$.

14.9.5.3 Relation entre les deux notions

Proposition 14.69. *Les sev* $S_n(\mathbb{K})$ *et* $A_n(\mathbb{K})$ *sont supplémentaires dans* $M_n(\mathbb{K})$.

14.9.5.4 Matrice carrée symétrique semi-définie positive et définie positive

Définition 14.70. *Une matrice carrée A de* $M_n(\mathbb{K})$ *est dite :*

1. ***Semi-définie positive*** *si et seulement si* $\forall X \in \mathbb{K}^n, X^t A X \geqslant 0$
2. ***Définie positive*** *si et seulement si*
   - $\forall X \in \mathbb{K}^n, \begin{cases} X^t A X \geqslant 0 \\ X^t A X = 0 \Rightarrow X = 0 \end{cases}$,
   - *Autrement dit* $\forall X \in \mathbb{K}^{n*}, X^t A X > 0$

14.9.6 Matrice orthogonale

Définition 14.71. *Une matrice carrée inversible A de* $GL_n(\mathbb{K})$ *est dite* ***orthogonale*** *si et seulement si :*
$A^{-1} = {}^tA$, *Matrice dont l'inverse est égale à l'adjointe.*

14.9.7 Matrices carrées hermitienne et antihermitienne

Les notions de matrice symétrique et antisymétrique ne sont définies que pour les matrices carrées.

14.9.7.1 Matrices hermitiennes

Définition 14.72. *Une matrice carrée A de* $M_n(\mathbb{C})$ *est dite* ***hermitienne*** *si et seulement si :* $A^* = A$. *On note* $H_n(\mathbb{C})$ *l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n à coefficients dans* $\mathbb{C}$.

Remarque 14.73. Si A est hermitienne, alors les éléments diagonaux de A sont réels.

Exemple 14.74. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & -5 \end{pmatrix}$ sont hermitiennes, mais pas $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

14.9.7.2 Matrices antihermitienne

Définition 14.75. *Une matrice carrée A de* $M_n(\mathbb{C})$ *est dite* ***antihermitienne*** *si et seulement si :* $A^* = -A$.

14.9.7.3 Matrice carrée hermitienne semi-définie positive et définie positive

Définition 14.76. *Une matrice carrée A de* $M_n(\mathbb{C})$ *est dite :*

1. ***Semi-définie positive*** *si et seulement si* $\forall X \in \mathbb{C}^n, X^* A X \geqslant 0$

2. ***Définie positive*** *si et seulement si*

– $\forall X \in \mathbb{C}^n, \begin{cases} X^* A X \geqslant 0 \\ X^* A X = 0 \Rightarrow X = 0 \end{cases}$,

– *Autrement dit* $\forall X \in \mathbb{C}^{n*}, X^* A X > 0$

14.9.8 Matrice unitaire

Définition 14.77. *Une matrice carrée inversible A de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est dite* ***unitaire*** *si et seulement si :*
$A^{-1} = A^*$ *ou* $A^*A = AA^* = I_n$*, Matrice dont l'inverse est égale à l'adjointe.*

14.9.9 Matrice normale

Définition 14.78. *Une matrice A carrée de $M_n(\mathbb{C})$ est dite* ***normale*** *si et seulement si :*
$A^*A = AA^*$*, matrice dont le produit avec son adjointe est commutatif.*

14.9.10 Matrices carrées triangulaires

La notion de matrice triangulaire n'est définie que pour les matrices carrées.

Définition 14.79. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.*
- Une matrice carrée $A = (\alpha_{i,j})$ est dite ***triangulaire ou trigonale inférieure****, si tous les éléments situés au-dessus de la diagonale sont nuls, c'est à dire $\alpha_{i,j} = 0$ pour $i < j$.*
- L'ensemble des matrices triangulaires inférieures de $M_n(\mathbb{K})$ est noté $T_{n,i}(\mathbb{K})$.

Exemple 14.80. matrice triangulaire inférieure $\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & 45 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 6 & 92 \end{pmatrix}$

Définition 14.81. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.*
- Une matrice carrée $A = (\alpha_{i,j})$ est dite ***triangulaire ou trigonale supérieure****, si tous les éléments situés au-dessous de la diagonale sont nuls, c'est à dire $\alpha_{i,j} = 0$ pour $i > j$.*
- L'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $M_n(\mathbb{K})$ est noté $T_{n,s}(\mathbb{K})$.

Définition 14.82. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.*
Une matrice carrée $A = (\alpha_{i,j})$ est dite ***triangulaire ou trigonale*** *si et seulement si A est triangulaire supérieure ou inférieure.*

Exemple 14.83. matrice triangulaire supérieure $\begin{pmatrix} 10 & 2 & 6 & 12 \\ 0 & 7 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & i \\ 0 & 0 & 0 & 92 \end{pmatrix}$

Remarque 14.84. $\forall A \in M_n(\mathbb{K}), (A \in T_{n,i}(\mathbb{K})) \Leftrightarrow ({}^tA \in T_{n,s}(\mathbb{K}))$.
Autrement dit, si une matrice d'ordre n est triangulaire inférieure, sa transposée est triangulaire supérieure.

14.9.11 Matrices carrées diagonales

La notion de matrices diagonales n'est définie que pour les matrices carrées.

Définition 14.85. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.*
Les éléments $\alpha_{i,i}$ tels que $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sont appelés ***éléments diagonaux*** *et forment la* ***diagonale principale*** *de la matrice.*

Exemple 14.86. Eléments diagonaux $\begin{pmatrix} \mathbf{10} & 2 & 6 & 12 \\ 4 & \mathbf{7} & -2 & 0 \\ 5 & 45 & \mathbf{3} & i \\ 0 & 7 & 6 & \mathbf{92} \end{pmatrix}$

Définition 14.87. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.*

*- Une matrice carrée $A = (\alpha_{i,j})$ est dite **diagonale** si tous les éléments hors de la diagonale sont nuls, c'est à dire $\alpha_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$. Si ses éléments diagonaux sont $\lambda_1, ..., \lambda_n$ on la note* $\mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.

- L'ensemble des matrices diagonales de $M_n(\mathbb{K})$ est noté $D_n(\mathbb{K})$.

Exemple 14.88. Matrice diagonale $\begin{pmatrix} \mathbf{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{92} \end{pmatrix}$.

Remarque 14.89. L'ensemble des matrices diagonales de $M_n(\mathbb{K})$ est l'intersection des ensembles des matrices triangulaires supérieures et inférieures de $M_n(\mathbb{K})$:
$D_n(\mathbb{K}) = T_{n,s}(\mathbb{K}) \cap T_{n,i}(\mathbb{K})$

Proposition 14.90. *$D_n(\mathbb{K})$est une sous-algèbre commutative et unitaire de $M_n(\mathbb{K})$.*

Proposition 14.91. *Soit $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ une matrice diagonale de $D_n(\mathbb{K})$.*

- $(D \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})) \Longleftrightarrow (\forall i \in \mathbb{N}_n, \lambda_i \neq 0)$.

Autrement dit, si D est inversible et aucun de ses éléments n'est nul.

- $(D \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})) \Rightarrow (D^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1^{-1}, ..., \lambda_n^{-1}))$.

Autrement dit, la matrice inverse de D est diagonale, ses éléments sont les inverses dans $\mathbb{K}$ des éléments de D. $\lambda_i \neq 0$ alors $\begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_i^{-1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}$

Exemple 14.92. $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{4} \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

14.10 Matrices équivalentes, changement de base

14.10.1 Matrices de passage

Définition 14.93. *Soient E un $\mathbb{K}-$ev de dimension n. $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E.*

On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, et on note $\mathrm{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$*, la matrice de $M_n(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont formées des composantes des vecteurs de $\mathcal{B}$ exprimés sur la base B' :*

$\mathrm{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$

Proposition 14.94. *Pour toutes bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ de E :* $\mathrm{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E)$

Proposition 14.95. *Soit E un $\mathbb{K}-$ev $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$ des bases de E.*

-$\mathrm{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}'') = \mathrm{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')\mathrm{Pass}(\mathcal{B}', \mathcal{B}'')$

-$\mathrm{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}) = I_n$

-$\mathrm{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ *est inversible et* $(\mathrm{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}'))^{-1} = \mathrm{Pass}(\mathcal{B}', \mathcal{B})$

Remarque 14.96. L'application : $\left| \begin{array}{ccc} \{\text{bases de } E\} & \to & \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \\ \mathcal{B}' & \mapsto & \mathrm{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') \end{array} \right.$ est une bijection, autrement dit :

-Toute matrice de passage est inversible.

-Toute matrice inversible peut être considérée comme matrice de passage (on peut même choisir la base de départ, ou d'arrivée ???).

14.10.2 Formules de changement de base

Proposition 14.97. *Soient E un $\mathbb{K}-$ev, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E, $P = \text{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$, $x \in E$, $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $X' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$ alors :*
$X = P \times X'$.

Proposition 14.98. *Soient E, F deux $\mathbb{K}-$ev. Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E avec $P = \text{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ et $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ deux bases de F avec $Q = \text{Pass}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $A = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ et $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f)$ alorsx*
$A' = Q^{-1} \times A \times P$

Proposition 14.99. *Soient E un $\mathbb{K}-$ev. Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E avec $P = \text{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ alors*
$A' = P^{-1} \times A \times P$

14.10.3 Matrices équivalentes

Définition 14.100. *Soient A,B deux matrices de $M_{n,p}(\mathbb{K})$.*
On dit que A est équivalente à B, et on note A eq B si et seulement si :
$\exists (P, Q) \in \text{GL}_p(\mathbb{K}) \times \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $B = Q^{-1} \times A \times P$

Proposition 14.101.
-La relation eq est une relation d'équivalence dans $M_{n,p}(\mathbb{K})$.
-Soient A une matrice de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r=rg(A) alors :
A est équivalente à la matrice $J_{n,p,r} = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$.
En particulier $J_{n,p,0} = 0$.
-Soient A,B deux matrices de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ alors $(A \text{ eq } B) \Leftrightarrow (\text{rg}(A) = \text{rg}(B))$.

Proposition 14.102. *Deux matrices A,B de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes, si et seulement si elles représentent (dans des bases) la même application linéaire.*

14.10.4 Matrices carrées semblables

Définition 14.103. *On dit que A est **semblable** à B et on note $A \sim B$, si et seulement s'il existe une matrice P de $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1} \times A \times P$.*

Proposition 14.104. *La relation $\sim$ (appelée similitude des matrices carrées) est une relation d'équivalence dans $M_n(\mathbb{K})$.*

Proposition 14.105. *Soient A, B deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$, $(A \sim B) \Rightarrow (\text{tr}(A) = \text{tr}(B))$.*

Définition 14.106. *Soient E un $\mathbb{K}-$ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On appelle trace de f, et on note $\text{tr}(f)$, la trace de n'importe quelle matrice représentant l'endomorphisme f.*

Proposition 14.107. *Soit E un $\mathbb{K}-$ev.*
-L'application $\text{tr}: \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \to & \mathbb{K} \\ f & \mapsto & \text{tr}(f) \end{array} \right.$ *est une forme linéaire.*
-Soient f et g deux endomorphismes de E, alors $\text{tr}(g \circ f) = \text{tr}(f \circ g)$
-Soit f un endomorphisme de E, pour tout automorphisme de E $\text{tr}(h^{-1} \circ f \circ h) = \text{tr}(f)$.

Exercice 14.1. Voir Livre Analyse I J.M. Monier

14.11 Exponentielle d'une matrice carrée

14.11.1 Définition

Proposition 14.108. *La série d'applications* $\sum_{k\geqslant 0}\left(\begin{array}{|ccc} M_n(\mathbb{K}) & \to & M_n(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto & \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}A^k \end{array}\right)$ *converge normalement sur toute partie bornée de* $M_n(\mathbb{K})$.

Définition 14.109. *On appelle* ***exponentielle d'une matrice carrée****, et on note exp, l'application :*

$$\exp:\left|\begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{K}) & \to & M_n(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto & \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}A^k \end{array}\right. ,\ \exp(A)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}A^k$$

14.11.2 Propriétés

14.12 Déterminant d'une matrice carrée

Application multilinéaire, Déterminant d'une famille de vecteur et d'un endomorphisme.

14.12.1 Définition

Définition 14.110. *Soit* $A=(a_{ij})$ *une matrice carrée de* $M_n(\mathbb{K})$. *On appelle déterminant de A, et on note* $\det(A)$, *ou* $\left|\begin{array}{ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{array}\right|$*,l'élément de* $\mathbb{K}$ *défini par :*

$\det(A)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1)1}\times\dots\times a_{\sigma(n)n}$.

On dit que $\det(A)=\left|\begin{array}{ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{array}\right|$ *est un déterminant d'ordre n.*

autrement dit, en notant $C_1,\dots,C_n$ les colonnes de A et en choisissant $\mathcal{B}$ la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{K})$, on a $\det(A)=\det_{\mathcal{B}}(C_1,\dots,C_n)$.

Exemple 14.111. Calcul d'un déterminant d'ordre 2 et 3.

1. $\mathfrak{S}_2=\{\mathrm{Id}_{\{1,2\}},\tau_{12}\}$ donc
$$\left|\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right|=\varepsilon(\mathrm{Id}_{\{1,2\}})a_{(1)1}b_{(2)2}+\varepsilon(\tau_{12})a_{(2)1}a_{(1)2}=\mathrm{ad}-\mathrm{bc}.$$
2. $\mathfrak{S}_3=\{\mathrm{Id}_{\{1,2,3\}},\tau_{12},\tau_{13},\tau_{23},\tau_{23}\circ\tau_{12},\tau_{23}\circ\tau_{13}\}$ donc
$$\left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right|=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{11}a_{32}a_{23}+a_{31}a_{12}a_{23}+a_{21}a_{32}a_{13}$$

Proposition 14.112. *Soient E un* $\mathbb{K}-$ ev *de dimension n, f un endomorphisme de* $\mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ *une base de E,* $A=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. *On a :* $\det(f)=\det(A)$.

Proposition 14.113. *Soit* $n\in\mathbb{N}$, $k\in\mathbb{Z}$, $\alpha\in\mathbb{K}$, $(A,B)\in M_n(\mathbb{K})^2$, $C\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

1. $\det(I_n)=1$.

2. $\det(\alpha \times A) = \alpha^n \times \det(A)$.
3. $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$.
4. $\det(A^n) = (\det(A))^n$ *et* $\det(C^k) = (\det(C))^k$.
5. $(A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})) \Leftrightarrow (\det(A) \neq 0)$
6. $\det(C^{-1}) = (\det(C))^{-1}$
7. $\det({}^tA) = \det(A)$.
8. *Si A est nilpotente ou antisymétrique alors* $\det(A) = 0$.

14.12.2 Méthodes élémentaires de calcul

14.12.2.1 Lignes ou colonnes liées

Remarque 14.114. (Deux lignes ou deux colonnes sont liées) $\Leftrightarrow$ (le déterminant de la matrice est nul). $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

14.12.2.2 Mineur, Cofacteur et Développement par rapport à une rangée

Définition 14.115. *Soit* $A = (a_{ij})$ *une matrice de* $M_n(\mathbb{K})$.

- *On appelle* ***mineur*** *de la place* (i, j) *dans A (ou mineur de* a_{ij} *) le déterminant noté* Δ_{ij} *d'ordre n-1 obtenu en supprimant dans A la* $i^{\text{ème}}$ *ligne et la* $j^{\text{ème}}$ *colonne :*

$$\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

- *On appelle* ***cofacteur*** *de la place* (i, j) *dans A (ou cofacteur de* a_{ij} *) le produit noté* A_{ij} *de* Δ_{ij} *par* $(-1)^{i+j}$ *ainsi :* $A_{ij} = (-1)^{i+j}$.

Proposition 14.116. *(Développement par rapport à une rangée)*
Soit $A = (a_{ij})$ *une matrice de* $M_n(\mathbb{K})$.

1. *Developpement par rapport à la* $j^{\text{ème}}$ *colonne :* $\forall j \in \mathbb{N}_n$, $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \times A_{ij}$.
2. *Developpement par rapport à la* $i^{\text{ème}}$ *ligne :* $\forall i \in \mathbb{N}_n$, $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \times A_{ij}$.

Exemple 14.117. $A = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & -5 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ Developpement de A par rapport à la $4^{\text{ème}}$ colonne

$$A = (-1)^{1+4} \times 4 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4} \times (-5) \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} + 0 + (-1)^{4+4} \times 6 \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Développons M,N,P par rapport à leur $3^{\text{ème}}$ ligne :

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \times (-3) \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 + (-1)^{3+3} \times 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$M = -3 \times (3 \times 2 - 4 \times 1) + 3 \times (1 \times 1 - 3 \times 4) = -6 - 33 = -39,$$

$$N = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \times (-3) \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 + (-1)^{3+3} \times 3 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$N = -3\times 15 - 3\times 22 = -111$

$$P = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}\times 4 \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}\times 1 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}\times 2 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$P = 4\times 33 - 1\times 11 + 2\times 0 = 121$

Conclusion : $A = -4\times(-39) - 5\times(-111) + 6\times 123 = 156 + 555 + 726 = 1437$

Le choix des développements par ligne ou par colonne est arbitraire. D'autres choix auraient pu être fait pour chacun des déterminants.

Remarque 14.118.

1. Le développements par rapport à une rangée est utile lorsque la rangée contient beaucoup d'éléments nuls.
2. Nous allons développer par la suite des méthodes plus rapides de calcul des déterminants.

14.12.2.3 Comatrice

Définition 14.119. *Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $M_n(\mathbb{K})$. On appelle comatrice de A la matrice carrée d'ordre n, notée* $\mathrm{com}(A)$*, définie par :*

$$\mathrm{com}(A) = (A_{ij})_{ij} = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$*, ou A_{ij} est le cofacteur de la place (i,j) dans A.*

Proposition 14.120. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, $A \times {}^t\mathrm{com}(A) = {}^t\mathrm{com}(A) \times A = \det(A)$.*

Corollaire 14.121. *Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \times {}^t\mathrm{com}(A)$.*

Exemple 14.122. Pour n=2, si $ad - bc \neq 0$, alors $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible et : $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Remarque 14.123. Méthode quasiment inutilisable dès que $n \geqslant 3$. Puisqu'elle nécessite le calcul de n^2 déterminants d'ordre $n-1$ et d'un déterminant d'ordre n.

14.12.3 Cas d'une matrice triangulaire

Proposition 14.124. *Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des éléments diagonaux :* $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Remarque 14.125. Une matrice diagonale est aussi une matrice triangulaire, son déterminant est donc aussi égal au produit des éléments diagonaux.

14.12.4 Manipulation de lignes et de colonnes

Remarque 14.126.

1. On peut utiliser la multilinéarité du déterminant d'une matrice pour facilité son calcul :

$$\begin{vmatrix} & \lambda a_{1j} + b_{1j} & \\ I & \vdots & \mathrm{II} \\ & \lambda a_{nj} + b_{nj} & \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} & a_{1j} & \\ I & \vdots & \mathrm{II} \\ & a_{nj} & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & b_{1j} & \\ I & \vdots & \mathrm{II} \\ & b_{nj} & \end{vmatrix}$$

Exemple 14.127. Calculons le déterminant suivant :

$$d=\begin{vmatrix}1&6&1&1\\0&10&2&2\\0&12&3&3\\0&16&0&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&4\times1+2&1&1\\0&4\times2+2&2&2\\0&4\times3+0&3&3\\0&4\times4+0&0&4\end{vmatrix}=4x\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&2&2\\0&3&3&3\\0&4&0&4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&2&1&1\\0&2&2&2\\0&0&3&3\\0&0&0&4\end{vmatrix}$$ or

$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&2&2\\0&3&3&3\\0&4&0&4\end{vmatrix}=0$ (Car deux colonnes sont identiques) et $\begin{vmatrix}1&2&1&1\\0&2&2&2\\0&0&3&3\\0&0&0&4\end{vmatrix}=1\times2\times3\times4=$ 24 donc d=24.

2. On ne change pas la valeur d'un déterminant en remplaçant une colonnes/lignes par la somme de celle-ci et d'une combinaison linéaire des autres colonnes/lignes.
3. On ne change pas la valeur d'un déterminant en remplaçant (simultanément) chaque colonne/ligne par la somme de celle-ci et d'une combinaison linéaire des colonnes/lignes précédentes/suivantes.

14.12.5 Déterminants d'ordre 2 et 3

Les formules vues précédement peuvent être retrouvées grâce à la règle de Sarrus. Attention celle-ci n'est valable que pour $n=2$ ou $n=3$.

14.12.6 Déterminant de Vandermonde

Définition 14.128. *Soit* $(x_1,...,x_n)\in\mathbb{K}^n$.

On appelle ***déterminant de Wandermonde****, et on note* $V(x_1,\ ...,\ x_n)$*, l'élément de* $\mathbb{K}$ *défini par :*

$$V(x_1,...,x_n)=\begin{vmatrix}1&x_1&x_1^2&...&x_1^{n-1}\\|&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&x_n&x_n&...&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\det\Big(\Big(x_i^{j-1}\Big)\Big)_{i,j\in\mathbb{N}_n^*}.$$

Proposition 14.129. $\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall(x_1,...,x_n)\in\mathbb{K}^n, V(x_1,...,x_n)=\prod_{i>j\in\mathbb{N}_n^*}^{n}(x_i-x_j)$.

Corollaire 14.130. $\forall(x_1,...,x_n)\in\mathbb{K}^n, V(x_1,...,x_n)$ *est non nul si et seulement si* $x_1,...,x_n$ *sont deux à deux distincts.*

14.13 Rang et sous-matrice

Définition 14.131. *Soit* $(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2$ *et une matrice* $A=(a_{ij})$ *de* $M_{n,p}(\mathbb{K})$, $(u,v)\in(\mathbb{N}^*)^2$,

$$\begin{cases}(i_1,...,i_u)\in\{1,...,n\}^u, i_1<...<i_u\\(j_1,...,j_v)\in\{1,...,n\}^v, j_1<...<j_u\end{cases}$$

On appelle sous-matrice (ou matrice extraite) de A, par utilisation des lignes $i_1,...,i_u$ *et colonnes* $j_1,...,j_v$*, la matrice* $(a_{i_kj})_{\substack{1\leqslant k\leqslant u\\1\leqslant l\leqslant v}}$ *de* $M_{u,v}(\mathbb{K})$.

Exemple 14.132. La matrice $\begin{pmatrix}a&c&d\\a''&c''&d''\end{pmatrix}$ est une sous-matrice de $\begin{pmatrix}a&b&c&d\\a'&b'&c'&d'\\a''&b''&c''&d''\end{pmatrix}$, par utilisation des lignes 1,3 et des colonnes 1,3,4.

Théorème 14.133. *Pour toute matrice A de* $M_{n,p}(\mathbb{K})$*, le rang de A est égal à l'ordre maximum des sous-matrices carrées inversibles extraites de A.*

Exemple 14.134. Quel est le rang de $A=\begin{pmatrix}2&1&4&-3\\4&0&6&1\end{pmatrix}\in M_{2,4}(\mathbb{R})$?

$\text{rg}(A)\leqslant2$, puisque $A\in M_{2,4}(\mathbb{R})$.

D'autre part la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ d'ordre 2 extraite de A est inversible (car son déterminant -4 est $\neq 0$).

Conclusion : $\mathrm{rg}(A) = 2$.

Corollaire 14.135. *Pour toute matrice A de $M_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathrm{rg}({}^tA) = \mathrm{rg}(A)$.*

14.14 Réduction des matrices carrées

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif.

14.14.1 Eléments propres, spectre et rayon spectral

14.14.1.1 Valeur ou vecteur propres

Définition 14.136. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$.*

1. *Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, on dit que λ est une **valeur propre** (vp) de A si et seulement si :*
$$\exists X \in M_{n,1}(\mathbb{K}), (X \neq 0 \text{ et } A.X = \lambda X).$$
2. *Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, on dit que X est un **vecteur propre** ($\vec{\text{vp}}$) de A si et seulement si :*
$$X \neq 0 \text{ et } (\exists \lambda \in \mathbb{K}; A.X = \lambda X).$$
3. *Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $X \in M_{n,1}(\mathbb{K}) - \{0\}$.*
*"λ et X sont des **valeurs propres et vecteurs propres associés"***
si et seulement si : $A.X = \lambda X$.

Remarque 14.137. Les valeurs propres et vecteurs propres sont globalement appelés éléments propres.

Proposition 14.138.

1. *les valeurs propres d'une matrice hermitiene sont réelles.*
2. *Les valeurs propres d'une matrice unitaire sont complexes de module 1.*

Remarque 14.139. $\mathrm{tr}(A) = \sum \lambda_{ii}$ autrement dit $\sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i=1}^n \lambda_i$, $\det(A) =$ produit des valeurs propres c.s. page 16

Avertissement 14.140. $\mathrm{Vp}(A+B) \neq \mathrm{Vp}(A) + \mathrm{Vp}(B)$, $\mathrm{Vp}(A\,B) \neq$ produit des valeurs propres.

14.14.1.2 Spectre, Sous-espace propre d'une matrice

Définition 14.141. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$.*

1. *On appelle **spectre** de A et on note $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$ ou $\mathrm{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A.*
2. *On appelle **rayon spectral** de A, et on note $\rho(A)$, le réel $\geqslant 0$ défini par : $\rho(A) = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} |\lambda|$.*

Proposition 14.142. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :*
"$\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$" $\Leftrightarrow$ "$\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0\}$" $\Leftrightarrow$ "$A - \lambda I_n \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$" $\Leftrightarrow$ "$\mathrm{rg}(A - \lambda I_n) < n$".

Proposition 14.143. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :*
$\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$ *est un sous-espace vectoriel formé des $\vec{\text{vp}}$ pour A associés à λ.*

Définition 14.144. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.*

*On appelle **sous-espace propre pour A associé à la vp λ** de A, le sev $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$ de $M_{n,1}(\mathbb{K})$. On le note $\mathrm{SEP}(A, \lambda)$.*

$\mathrm{SEP}(A,\lambda) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$

14.14.2 Polynôme caractéristique

Proposition 14.145. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\det(A - X.I_n)$ est un polynôme à une indéterminée $\mathbb{K}[X]$.*

Définition 14.146. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.*
Le polynôme $\det(A - X.I_n)$, appelé ***polynôme caractéristique*** *de A.*

Proposition 14.147.

1. *Deux matrices carrées semblables ont même polynôme caractéristique.*
2. *Les racines du polynôme caractéristique d'une matrice carrée A constituent le spectre de A. Autrement dit $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \chi_A^{-1}(\{0\})$.*

Définition 14.148. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, λ_0 une valeur propre de A.*
On appelle ***ordre de multiplicité*** *de λ_0, l'ordre de multiplicité de λ_0 en tant que racine du polynôme caractéristique de A.*

Proposition 14.149. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, pour toute vp simple λ_0 de A, la dimension de $\mathrm{SEP}(A, \lambda_0)$ vaut 1.*

14.14.3 Diagonalisabilité

Définition 14.150. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.*
On dit que A est ***diagonalisable*** *si et seulement s'il existe une matrice diagonale D de $M_n(\mathbb{K})$ telle que A soit semblable à D.*
Autrement dit, $\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\exists D \in D_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PDP^{-1}$.

Remarque 14.151.

1. Si A est diagonalisable, on appelle **diagonalisation** de A, la donnée de $P, D, (P^{-1})$.
2. **Diagonaliser**, c'est déterminer $P, D, (P^{-1})$.
3. Sauf exception, il n'y a pas unicité d'une diagonalisation (P et D ne sont pas uniques).
4. Une matrice est diagonale $\Leftrightarrow$ il existe une base de vecteurs propres.

Théorème 14.152. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. A est diagonalisable si et seulement si :*

- *Le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{K}$.*
- *Pour chaque vp λ de A, $\dim(\mathrm{SEP}(A,\lambda))$ est égale à l'ordre de multiplicité de λ.*

Corollaire 14.153. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Si A admet n valeurs propres deux à deux distinctes, alors A est diagonalisable.*

14.14.4 Polynômes de matrices

14.14.5 Application de la diagonalisation

14.14.6 Trigonalisationbilité

Définition 14.154. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.*
On dit que A est ***trigonalisable*** *si et seulement s'il existe une matrice triangulaire T de $M_n(\mathbb{K})$ telle que A soit semblable à D.*

Autrement dit, $\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *et* $\exists T \in T_{n,s}(\mathbb{K}) \cup T_{n,i}(\mathbb{K})$, *telles que* $A = PTP^{-1}$.

Remarque 14.155.

1. Si A est trigonalisable, on appelle **trigonalisation** de A, la donnée de $P, T, (P^{-1})$.
2. **Trigonaliser**, c'est déterminer $P, T, (P^{-1})$.
3.
4.

Théorème 14.156. *Soit* $A \in M_n(\mathbb{K})$.
"A est trigonalisable" $\Leftrightarrow$ *"Le polynôme caractéristique de A est scindé sur* $\mathbb{K}$*."*

Corollaire 14.157. *Toute matrice carrée* $A \in M_n(\mathbb{C})$ $(n \geqslant 1)$ *est trigonalisable et la matrice triangulaire possède une diagonale formée par les valeurs propres*

14.14.7 Polynômes annulateurs

14.14.8 Décompostion de Dunford

14.14.9 Réduction de Jordan

14.14.10 Réduction de matrices symétriques réelle

14.14.11 Réduction des matrices hermitienne

Proposition 14.158. *Une matrice hermitienne est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteur propre.*

14.15 Blocs

14.16 Valeur singulière d'une matrice rectangulaire

Théorème 14.159. *Soit* $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$

1. *La matrice* A^*A *est une matrice carrée.*
2. *Si* A *est de rang* $= p$ *alors, la matrice* A^*A *est hermitienne définie positive.*
3. *Si* A *est de rang* $< p$ *alors, la matrice* A^*A *est hermitienne semi-définie positive.*

Définition 14.160. *Soit* $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $(\lambda_i)_{i=1,\dots,p}$ *les valeurs propres de* A^*A.
On appelle valeurs singulières de A *les nombres* $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$.

Voir cours Schaum. Fiche déterminant rajouter det d'une matrice particulière :
-matrice circulaire,
-matrice de vandermonde.

Chapitre 15

Intégration selon Cauchy-Riemann et Riemann

Rajouter un chapitre pour l'intégration des fonctions d'une variable réelle à valeurs dans un espace vectoriel . Voir Monier Tome 3 page 138-175 et 181-229

15.1 Intégrale de Riemann

Définition 15.1. *Soient $a, b \in \mathbb{R}; a < b$.*

- *On appelle **subdivision** de l'intervalle $[a,\ b]$ toute suite finie strictement croissante $(s_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de nombres réels tels que $s_0 = a$ et $s_n = b$.*
- *On appelle **pas d'une subdivision** la borne supérieure des longueurs des intervalles $]s_i,\ s_{i+1}[$.*

Définition 15.2. *Soient f une fonction $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ numérique et une subdivision $S = (s_i)$ du segment $[a,\ b]$. On appelle **somme de Riemann** associée à f relativement à cette subdivision toute somme : $R = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} (s_i - s_{i-1}) f(\xi_i)$ où $\forall i \in [1, n], \xi_i \in [s_{i-1}, s_i[$.*

RAjouter Sommes de Darboux associées à f ... Voir cours Goldman

Définition 15.3. *On dit qu'une fonction $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ est **intégrable au sens de Riemann-Cauchy ou Riemann-Cauchy-Intégrable ou** encore **$\mathcal{RC}$-Intégrable** sur $[a,\ b]$ ssi il existe un nombre réel α tel que pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $\eta > 0$ tel que, pour toute subdivision $S = (s_i)$ de pas inférieur à η et pour toute somme de Riemann ou de Darboux associée à f relativement à cette division $|R - \alpha| \leqslant \varepsilon$ ou $|D - \alpha| \leqslant \varepsilon$. $\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} = \sum_{i=1}^n (s_i - s_{i-1}) f(\xi_i)$ où $\forall i \in [1, n], \xi_i \in [s_{i-1}, s_i[$. (à vérifier)*

*Dans ce cas α est appelée **intégrale définie** de la fonction f sur le segment $[a, b]$ et notée : $\int_a^b f(t)dt$, a, b sont respectivement les bornes inférieure et supérieure de l'intégrale de f.*

Proposition 15.4.

1. *f intégrable $\Rightarrow$ f bornée. Autrement dit : si f n'est pas bornée alors f n'est pas intégrable.*
2. *Les fonctions continues, les fonctions monotones sont intégrables.*
3. *Critère de Cauchy (pour les fonctions continues) Cauchy l'a montré pour les fonctions continues sur $[a;\ b]$, elles sont intégrables sur $[a;\ b]$. On a $\int_a^b f(t) = \lim \sum (x_{i+1} - x_i) M(i, n) = \lim \sum (x_{i+1} - x_i) m(i, n)$. Propriété page 7 du cours de Goldman.*
4. *Critère de Riemann (pour les fonctions bornées) Riemann l'a montré pour les fonctions bornées elles sont intégrables si et seulement si il existe au moins une subdivision telle que la somme de Darboux converge vers 0. Dans ce cas pour toute subdivision (S_i), $\int_a^b f(t) = \lim \sum (x_{i+1} - x_i) M(i, n) = \lim \sum (x_{i+1} - x_i) m(i, n)$. Propriété du cours de Goldman.*
5. *Si une fonction $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann alors la fonction $|f|$ l'est aussi et l'on a : $\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leqslant \int_a^b |f(t)|dt$.*
6. *Conséquence immédiate si f est intégrable alors $\sup_{[a,b]}(f)$ et $\inf_{[a,b]}(f)$ sont aussi intégrables. $(E([a, b]), +, \times)$ est un espace vectoriel reticulé (à vérifier et à intégrer dans la suite).*

Remarque 15.5.

15.1.1 Structures construites sur $E([a,b])$

Proposition 15.6. *Notons $E([a,b])$ l'ensemble des fonctions intégrables sur $[a,b]$.*

1. *$(E([a,b]),+,\times,\cdot)$ est une sous-algèbre pleine de l'algèbre unitaire des fonctions numériques bornées sur $[a,b]$, autrement dit $E([a,b])$ est stable par addition, multiplication par un réel, multiplication (l'addition de 2 fonctions intégrables est intégrable, la multiplication par un réel d'une fonction intégrable sur $[a,b]$ est intégrable, la multiplication de deux fonctions intégrables est intégrable, l'identité est intégrable, l'application inverse si elle existe d'une fonction intégrable est intégrable) sans oublier les autres propriétés des lois : $+,\times,\cdot$. C'est cette propriété qui justifie l'intégrabilité des fonctions construites uniquement à l'aide des lois : $+,\times,\cdot$.*
2. *L'application $f\mapsto\int_a^b f(t)dt$ est une forme linéaire croissante, sa restriction au sous-espace vectoriel des fonctions continues sur $[a,b]$ est strictement croissante.*
3. *L'application $(f,\ g)\mapsto\int_a^b f(t)g(t)dt$ est une forme bilinéaire symétrique positive sur $(E([a,b]),+,\times)$ par conséquent $(E([a,b]),+,\times,<.>)$ est un espace préhilbertien réel. $f\mapsto\sqrt{\int_a^b f^2(t)dt}$ est une semi-norme. L'inégalité de Schwarz s'écrit : $\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2\leqslant\int_a^b f^2(t)dt\int_a^b g^2(t)dt$.*
4. *La restriction de cette forme bilinéaire symétrique positive au sous-espace vectoriel des fonctions continues sur $[a,b]$ est non dégénérée par conséquent $(E([a,b]),+,\times,<.>)$ est un espace euclidien. $f\mapsto\sqrt{\int_a^b f^2(t)dt}$ est une norme.*

Remarque 15.7. Dans le cadre de la théorie de Lebesgue, on perd la stabilité des fonctions Riemann-Intégrables pour la multiplication. Si deux fonctions sont Riemann-Intégrales alors leur produit est Riemann intégrable.

15.1.2 Première formule de la moyenne

Proposition 15.8. *Soient f,g deux fonctions numériques bornées et intégrales sur un intervalle fermé borné $[a,b]$, $a<b$. Soit (m,M) un couple de nombre réels tel que $m\leqslant f\leqslant M$ alors :*

i. $m\times\int_a^b g(t)dt\leqslant\int_a^b f(t)\times g(t)dt\leqslant M\times\int_a^b g(t)dt$.

ii. en particulier si $g=1$, $m\times(b-a)\leqslant\int_a^b f(t)dt\leqslant M\times(b-a)$.

iii. si f est continue alors il existe un point c de $]a,b[$ tel que $f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)$.

15.1.3 Valeur moyenne d'une fonction

Proposition 15.9. *Soit f une fonction intégrable sur un intervalle $[a,b]$. Alors :*

i. $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(a+k\frac{b-a}{n})=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)$.

ii. $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n f(a+k\frac{b-a}{n})=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)$.

Définition 15.10. *Soit f une fonction intégrable sur un intervalle $[a,b]$.*
Le nombre $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)$ est appelé valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[a,b]$.

15.1.4 Intégrale sur la réunion de segments adjacents (Relation de Chasles)

Proposition 15.11. *Soit a,b,c trois nombres réels tels que $a<b<c$ et f une fonction numérique bornée sur $[a,c]$. Pour que f soit intégrable sur $[a,c]$, il faut et il suffit qu'elle le soit sur $[a,b]$ et sur $[a,c]$. Dans ces conditions :*

$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt.$

15.1.5 Changement de variable

Proposition 15.12. *Soient φ une fonction numérique continûment dérivable sur un intervalle fermé borné $[a,b]$ et f une fonction numérique continue sur un intervalle I contenant l'image de $[a,b]$ par φ alors :*
$\int_a^b f(\varphi(t)) \times \varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt.$

15.1.6 Intégration par parties

Proposition 15.13. *Soient f et g deux fonctions numérique continûment dérivables sur un intervalle fermé borné $[a,b]$. Alors :*
$\int_a^b f(t) \times g'(t)dt = [f(t) \times g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t) \times g(t)dt.$

15.1.7 Fonction définie par une intégrale

15.1.8 Application $g: x \mapsto \int_a^x f(t)dt$: dite «intégrale de sa borne supérieure»

15.1.8.1 Continuite, variation

Proposition 15.14. *Soit f une fonction numérique définie, bornée et intégrable sur un intervalle fermé borné $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. Alors, pour tout point $x \in [a,x]$. La fonction :*
$$g: x \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

i. g est définie sur $[a,b]$.

ii. g est continue sur $[a,b]$.

iii. si f est positive g est croissante sur $[a,b]$.

iv. si f est négative g est décroissante sur $[a,b]$.

v. si f est continue en un point $x_0 \in [a,b]$, g est dérivable en x_0 et $g'(x_0) = f(x_0)$.

15.1.8.2 Dérivabilité, primitive et intégrale

Proposition 15.15. *Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.*

i. La fonction f admet une primitive sur I.

ii. L'unique primitive de f s'annulant en $a \in I$ est : $F: x \mapsto \int_a^x f(t)dt$.

iii. Réciproquement si F est une primitive de f et $a, b \in I$ alors $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$.

15.1.8.3 Intégrale convergente et intégrale généralisée ou impropre Intégrale sur un intervalle non borné ou borné ouvert : $[a,b[,]a,b],]a,b[$ de $\mathbb{R}$

Définition 15.16. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme $[a,b[$ (resp. $]a,b]$) où $a \in \mathbb{R}, b \in [a, +\infty]$ (resp. $b \in \mathbb{R}, a \in [-\infty, b]$) et f une fonction numérique définie sur I, bornée et intégrable sur tout intervalle fermé borné contenu dans I. Soit g la fonction numérique définie par $g: x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ (resp. $g: x \mapsto \int_x^b f(t)dt$).*

- *On dit que que l'**intégrale** de f sur $[a,b[$ (resp. $]a,b]$) est **convergente** ssi g admet un limite en b (resp. a). Sinon on dit qu'elle est **divergente**.*
- *Cette limite se note alors $\int_a^b f(t)dt$: $\lim_{x \to b} \int_a^x f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$ (resp. $\lim_{x \to a} \int_x^b f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$).*

Définition 15.17. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme $]a,b[$ où $a\in\mathbb{R}, b\in[a,+\infty]$ et f une fonction numérique définie sur I, bornée et intégrable sur tout intervalle fermé borné contenu dans I.*

- *On dit que que l'**intégrale** de f sur $]a,b[$ est **convergente** ssi il existe un point $c\in]a,b[$ tel que les intégrales sur $]a,c]$, $[c,b[$ soient convergentes. Sinon on dit qu'elle est **divergente**.*
- *Si elle est convergente, la valeur de $\int_a^c f(t)+dt\int_c^b f(t)dt$ se note $\int_a^b f(t)dt$.*

15.1.8.4 Critères de convergence pour des fonctions positives

Plus que les théorèmes se sont les démonstrations qu'il faut retenir. ?A l'laide d'une primitive?

Remarque 15.18. Lorsqu'on connait une primitive de la fonction, on peut utiliser cette primitive pour décider de la convergence.

Rajouter le critère de Cauchy : livre Genet page 31.

Proposition 15.19. *Soit f une fonction positive sur un intervalle de la forme $[a,b[$, bornée et intégrable sur tout intervalle fermé borné contenu dans $[a,b[$. L'intégrale de f sur $[a,b[$ converge si et seulement si la fonction $g: x\mapsto\int_a^x f(t)dt$ est majorée.*

Proposition 15.20. *Pour décider de la convergence d'une intégrale, on peut utiliser les intégrales de référence suivantes :*

	L'intégrale sur	*avec*	*de la fonction*	*est convergente ssi*	*divergente ssi*
1	$]0,b]$	$b>0$	$x\mapsto x^\alpha$	$\alpha>-1$	$\alpha\leqslant-1$
2	$[a,+\infty[$	$a>0$	$x\mapsto x^\alpha$	$\alpha<-1$	$\alpha\geqslant-1$
3	$[a,b[$	$a<b$	$x\mapsto(b-x)^\alpha$	$\alpha>-1$	
4	$[a,+\infty[$	$a>1$	$x\mapsto x^\beta(\ln(x))^\alpha$	$\beta<-1$ *ou* $(\beta=-1,\alpha<-1)$	
5	$]0,b[$	$b\in]0,1[$	$x\mapsto x^\beta\lvert\ln(x)\rvert^\alpha$	$\beta>-1$ *ou* $(\beta=-1,\alpha<-1)$	

Monier Analyse 2 page 115

Note 15.21.

i. Les intégrales définies dans les lignes (1), (2) et (3) sont appelées intégrales de Riemann.

ii. Les intégrales définies dans les lignes (4) et (5) sont appelées intégrales de Bertrand.

Exemple 15.22. TD AR p. 28.

Proposition 15.23. *(Comparaison des fonctions positives intégrables) Soit f, g des fonctions positives sur un intervalle de la forme $[a,b[$, bornées et intégrables sur tout intervalle fermé borné contenu dans $[a,b[$.*

i. si $f\leqslant g$ au voisinage de b et si l'intégrale de g est convergente alors l'intégrale de f est aussi convergente.

ii. si $f\sim g$ au voisinage de b, alors l'intégrale de f converge ssi l'intégrale de g converge.

Exemple 15.24.

Proposition 15.25. *(Règle de Riemann) Soit f une fonction positive sur un intervalle de la forme $]0,b]$ (resp. $[a,+\infty[$), bornée et intégrable sur tout intervalle fermé borné contenu dans $]0,b]$ (resp. $[a,+\infty[$).*

On suppose qu'il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $x^\alpha f(x)$ ait une limite $\beta\in[0,+\infty]$ en $+\infty$.

l'intégrale de f sur	*est convergente si*	*est divergente si*
$]0,b]$	$\alpha<1,\beta\in[0,+\infty[$	$\alpha\geqslant1,\beta\neq0$
$[a,+\infty[$	$\alpha>1,\beta\in[0,+\infty[$	$\alpha\leqslant1,\beta\neq0$

Exemple 15.26. sur $[1,+\infty[$, $f(t)=t^{x-1}e^{-t}$ est positive et bornée sur $[1,+\infty[$. Soit $\gamma(t)=t^2f(t)=t^{x+1}e^{-t}$, $\lim_{t\to+\infty}\gamma(t)=0$ donc l'intégrale de f converge.

15.1.8.5 Convergence absolue

Définition 15.27. *Soit f une fonction numérique définie sur $[a, b[$, intégrable sur tout intervalle fermé et borné contenu dans $[a, b[$.*

On dit que l'intégrale d'une fonction f sur $[a, b[$ est ***absolument convergente*** *ssi l'intégrale de $|f|$ sur $[a, b[$ est convergente.*

Proposition 15.28. *Si l'intégrale d'une fonction f sur $[a, b[$ est* ***absolument convergente*** *alors l'intégrale de f est convergente. <frak-u>Autrement dit, convergence absolue $\Rightarrow$ convergence.*

Remarque 15.29. La réciproque n'est pas vraie ce qui justifie la définition de la section suivante.

15.1.8.6 Semi-convergence

Définition 15.30. *On dit que l'intégrale d'une fonction f sur $[a, b[$ est* ***semi-convergente*** *ssi elle est convergente sans être absolument convergente.*

Exemple 15.31. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ mais $\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| dx$ n'est pas convergente.

15.1.9 Application g: $x \mapsto \int_a^b f(x, t)dt$: dite «intégrale dépendant d'un paramètre»

Transformer les propositions suivantes en propriétés.

Proposition 15.32. *Soit une fonction f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ numérique bornée, pour toute subdivision $S = (s_i)$ du segment $[a, b]$ on pose :*

i. $S_m(f, S) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} (s_i - s_{i-1}) \inf_{[s_{i-1}, s_i[}(f)$,

ii. $S_M(f, S) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} (s_i - s_{i-1}) \sup_{[s_{i-1}, s_i[}(f)$,

$S_m(f, S)$ et $S_M(f, S)$ admettent respectivement une borne supérieure et une borne inférieure.

Définition 15.33. *On dit qu'une fonction $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ est* ***intégrable*** *au sens de Riemann ssi :*

i. la fonction f est bornée.

ii. la borne supérieure de $m(f, S)$ est égale à la borne inférieure de $M(f, S)$.

La valeur commune de ces bornes est appelée ***intégrale définie*** *de la fonction f sur le segment $[a, b]$ et notée : $\int_a^b f(t)dt$.*

Définition 15.34. *Soit une fonction $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ numérique bornée et A une partie du segment $[a, b]$. On appelle* ***oscillation*** *de f dans A et on note $\omega(f, A)$ la différence $\sup_A(f) - \inf_A(f)$.*

Proposition 15.35. *Soit une fonction f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ numérique bornée. Pour que f soit intégrable au sens de Riemann, il faut et il suffit que la condition suivante soit satisfaite :*

Lorsque le pas de la subdivision S tend vers 0, la quantité $S_M(f, S) - S_m(f, S) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} (s_i - s_{i-1})\omega(f, [s_{i-1}, s_i[)$ tend vers 0.

15.1.10 Intégrales classiques

15.1.10.1 Intégrale de Walis

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}$ et $I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$

15.1.10.2 Intégrales d'Euler

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x))dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))dx = -\frac{\pi}{2}\ln(2)$.

15.1.10.3 Intégrale de Poisson

$\int_0^{\pi} \ln(x^2 - 2x\cos(t) + 1)\mathrm{dt} = 0$, si $|x| \leqslant 1$,
$\int_0^{\pi} \ln(x^2 - 2x\cos(t) + 1)\mathrm{dt} = 2\pi\ln|x|$, si $|x| > 1$

15.1.10.4 Fonction gamma (ou Fonctions eulériennes de deuxième espèce)

$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt, x > 0$.
$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x); \Gamma(n+1) = n!, n \in \mathbb{N}$.
$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \sqrt{\pi}, \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$
Formule des compléments : $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}, 0 < x < 1$
Formule de Stirling : $\Gamma(x+1) \sim x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}$ au voisinage de $+\infty$.

15.1.10.5 Fonction bêta (ou Fonctions eulériennes de première espèce)

$\mathrm{B}(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, p > 0, q > 0$.
$\mathrm{B}(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt = \int_0^{+\infty} \frac{u^{q-1}}{(1+u)^{p+q}}du = 2\int_0^1 (\cos(x))^{2p-1}(\sin(x))^{2q-1}dx$.

15.1.10.6 Intégrale de Dirichlet

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}$

Chapitre 16
Mesure et Intégrale de Lebesgue

Lire le livre de J. Genet (important pour tout ce qui est terminologie). Attention aux termes : ensembles et familles !

Quelle surprise ! Il existe d'autres intégrales que l'intégrale de Riemann que l'on enseigne en classe Terminale ou en premier Cycle. Ce qui me révolte c'est qu'il faut arriver à la fin du premier cycle pour que ces intégrales soient évoquées. Voici donc une introduction qui pourrait servir à plusieurs cours sur l'intégration. Les intégrales sont présentées par ordre chronologique de découverte.

L'intégrale de Cauchy,
L'intégrale de Riemann,

L'intégralle de Lesbesgues que l'on enseigne en deuxième cycle à été découverte par Lesbesgues en 1902. Elle étend le domaine d'intégration de l'intégrale de Riemann tout en coïncidant avec elle sur ce domaine (ont dit qu'elle est plus puissante). Son enseignement repose sur la théorie de la mesure ce qui rend son enseignement assez complexe.

L'intégrale de Kurzweil et Henstock n'est apparemment pas enseignée en France, elle a été découverte par Kurzweil et Henstock respectivement en 1957 et 1961. Ils ont utilisé des chemins différents mais leurs constructions se sont avérées équivalentes. Elle étend également de domaine d'intégration de l'intégrale de Lesbesgues tout en coïncidant avec elle (elle est donc plus puissante). Le seul livre en langue française est imprimé par un éditeur belge puisque c'est à l'université de Louvain que son auteur l'enseigne. Elle se définie à un détail près comme une intégrale de Riemann, ce qui rend sa construction assez aisée.

C'est à travers plusieurs articles que j'ai pu les découvrir et prendre conscience des problèmes liés à leur enseignement.

16.1 Enseignement de l'intégration

En l'an 2001 l'intégrale de Lebesgue fêtait son centième anniversaire, l'académie des sciences et d'autres établissements comme l'ENS de Lyon n'ont pas manqué de le célébrer. Mais force est de constater qu'un élève arrêtant ses études en terminale ne connaitra ni Cauchy, ni Riemann, qu'un étudiant de DEUG ignorera l'existence de l'intégrale de Lebesgue pourtant mondialement connue et enfin un étudiant de licence n'entendra pas parler des extensions ultimes de cette intégrale que sont les intégrales de Denjoy, Perron, Kurzweil et Henstock. L'enseignement du calcul intégral suit actuellement, dans le programme français, un cheminement tortueux et certains enseignants le trouvent déroutant pour les étudiants. Mais les difficultés liées à l'enseignement rendent cette progression indispensable. L'intégrale de Kurzweil et Henstock semble, pour certains, être l'opportunité idéale pour remettre un peu d'ordre. C'est cette quête, je me propose de faire découvrir à travers ce mémoire.

Dans un premier temps, il semble indispensable de retracer à travers un bref historique, la découverte de chacune des théories de l'intégration en essayant de faire apparaître la motivation de chaque approche. Puis nous ferons le constat sur l'enseignement de l'intégration, les motivations et difficultés liées à cet enseignement qui poussent à enseigner une approche plutôt qu'une autre. Enfin nous donnerons la définition de base de chaque théorie ainsi qu'une illustration de chaque concept. On exposera les avantages et inconvénients de chaque intégrale. Il s'agira d'un simple rappel avec un renvoi au cours cités précédemment, sauf pour l'intégrale de Kurzweil et Hentosck qui sera développée plus en détail avec quelques exemples.

16.1.1 Bref Historique

16.1.1.1 Mise en place intuitive

Le signe $\int$ est introduit par Leibniz en 1675, le mot "intégrale" apparaît avec Jacques Bernouilli en 1690. Mais pendant toute cette période, le calcul intégral relève de la démarche expérimentale et aucune définition formelle n'est donnée.

La notion de fonction continue, nécessaire à la définition de l'intégrale, n'est pas encore établie; elle est perçue intuitivement mais n'est pas définie. Il faut attendre Bolzano (1817) et Cauchy (1821) pour une formulation plus précise.

La notation $\int_a^b f(t)dt$ est employée par Fourier en 1822.

16.1.1.2 Première définition par Cauchy

C'est en 1823 que les bases de l'intégration sont posées par Augustin Cauchy (Voir Annexe 1). Voici comment Henri Lebesgue décrira plus tard cette étape :

« Avant Cauchy il n'y avait pas de définition de l'intégrale, au sens actuel du mot définition. On se bornait à dire quelles étaient les aires qu'il fallait additionner ou soustraire pour obtenir l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$. Pour Cauchy, une définition est nécessaire car avec lui apparait le souci de rigueur qui est la caractéristique des mathématiques modernes. Cauchy définit, à peu près comme nous le faisons maintenant, les fonctions continues et les intégrales de ces fonctions. Pour arriver à l'intégrale de $f(x)$, il suffit de former les sommes $S = \sum f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$ que les arpenteurs et tous les mathématiciens de tous les siècles ont utilisées pour le calcul approché des aires et d'en déduire $\int_a^b f(x)dx$ par un passage à la limite.

Seulement tandis que la légitimité d'un tel passage était évidente pour qui partait de la notion d'aire, Cauchy doit démontrer que les S tendent bien vers une limite dans les conditions qu'il envisage. Une nécessité analogue s'impose chaque fois qu'on remplace par une définition purement logique l'emploi d'une notion expérimentale.»

(Conférence faite à Copenhage, le 8 mai 1926).

16.1.1.3 Généralisation par Riemann

Cauchy est relayé par Riemann en 1854 et le concept se généralise. Les sommes indiquées dans la définition de Cauchy, permettaient depuis longtemps de calculer des intégrales. Riemann s'emploiera à revoir cette définition et à utiliser la convergence des sommes $S = \sum \underline{f}_i(x_{i+1} - x_i)$ et $S = \sum \bar{f}_i(x_{i+1} - x_i)$ comme condition nécessaire et suffisante d'intégrabilité ($\underline{f}_i$ et $\bar{f}_i$ sont respectivement les bornes inférieure et supérieure de $f(x)$ dans (x_i, x_{i+1}).

L'analyse de Lebesgue toujours au cours de la conférence de Copenhage n'est pas tendre :

« Du point de vue logique, voici des définitions très naturelles, n'est ce pas ? Pourtant, on peut dire qu'elles n'ont pratiquement servi à rien. Celle de Riemann, en particulier, a l'inconvénient de ne s'appliquer que rarement et, en quelque sorte, par hasard.»

16.1.1.4 Nouvelle approche de Lebesgue

A peine en place, l'intégrale de Riemann doit faire face à la multiplication des contre-exemples, aux difficultés de mise en oeuvre pour des opérations dénombrables. La notion d'intégrale n'a donc cessé d'évoluer jusqu'à atteindre sa forme optimale grâce à Lebesgue en (1901,1902). Porteur d'une idée simple et géniale, il lance le calcul intégral sur une nouvelle voie qui reste tout de même difficilement praticable.

Mais l'intégrale de Lebesgue a marqué un net progrès par rapport à l'intégrale de Riemann, en ce qu'elle s'est révélée capable d'intégrer une classe bien plus étendue de fonctions, qu'elle a résolu le problème des primitives pour les fonctions bornées, qu'elle a permis d'énoncer des théorèmes de convergence très efficaces, et qu'elle a produit une Théorie de la Mesure apte à se généraliser dans diverses situations.

Dans son intervention à Copenhage, Lebesgue présente sa démarche de la manière suivante :

«... avec le procédé de Riemann, on essayait de sommer les indivisibles en les prenant dans l'ordre où ils étaient fournis par la variation de x, on opérait donc comme le ferait un commerçant sans méthode qui compterait pièces et billets au harsard dans l'ordre où ils lui tomberaient sous la main, tandis que nous opérons comme le commerçant méthodique qui dit :

- j'ai $m(E_1)$ pièces de 1 couronne valant $1 \cdot m(E_1)$,
- j'ai $m(E_2)$ pièces de 2 couronnes valant $2 \cdot m(E_2)$,
- j'ai $m(E_3)$ pièces de 5 couronnes valant $5 \cdot m(E_3)$,
- etc, j'ai donc en tout :
- $S = 1 \cdot m(E_1) + 2 \cdot m(E_2) + 5 \cdot m(E_3) + \ldots$.

Les deux procédés conduiront, certes, le commerçant au même résultat parce que si riche qu'il soit, il n'a qu'un nombre fini de billet à compter; mais pour nous, qui avons à additionner une infinité d'indivisible, la différence entre les deux façons de faire est capitale.»

16.1.1.5 On peut encore faire mieux !

Mais même l'intégrale de Lebesgue doit faire face à certaines difficultés: elle ne permet par d'intégrer toutes les dérivées, d'autre part si deux fonctions sont intégrables au sens de Lebesgue, leur produit ne sera pas necéssairement intégrable au sens de Lebesgue (alors que cette propirété est vraie pour l'intégrale de Riemann). Ce sont Arnaud Denjoy (1912) et Oskar Perron (1914) de manières indépendantes mais équivalentes qui la perfectionneront (l'équivalence des intégrales de Denjoy et Perron est établi par Hake 1921 et 1925).

Leurs constructions sont encore plus compliquées que celle de l'intégrale de Lebesgue. De plus, il s'agit d'intégrales non absolues : l'intégrabilité de f n'implique pas celle de $|f|$. En fait, c'est la rançon à payer pour que toutes les dérivées soient KH-intégrables or cette propriété est importante en analyse pour toutes les démonstrations utilisant la relation $\left| \int_a^b f dt \right| \leqslant \int_a^b |f| dt$.

On montre également que les fonctions f qui sont L-intégrables sont exactement les fonctions f intégrables au sens de Denjoy-Perron telles que $|f|$ soit aussi KH-intégrable.

Tout ceci limitera l'utilisation de cette extension.

16.1.1.6 Ce n'est pas fini ... Riemann est de retour !

Mais voici que deux mathématiciens Jaroslav Kurzweil et Ralph Henstock découvrent à quelques années d'intervalle (resp. 1957 et 1961,1963) une nouvelle intégrale «plus puissante que l'intégrale de Lebesgue». Nouvelle pas exactement en fait, il s'avère qu'elle est équivalente aux intégrales de Denjoy et Perron. La nouveauté c'est son extrême simplicité puisqu'elle se définit à un détail près comme une intégrale de Riemann. Voilà donc une intégrale qui fédère toutes les définitions vues précédemment et dont la facilité d'apprentissage est incomparable par rapport à celle de ces concurrentes.

16.1.2 Photographie de l'enseignement actuel

Comment enseigne-t-on l'intégrale de nos jours ? La démarche semble respecter une progression historique.

16.1.2.1 Premier contact en terminale

Il faut attendre la classe de terminale pour découvrir la notion d'intégrale (voir annexe 2) les directives en limitent l'étude aux fonctions continues, à priori la définition de Cauchy suffirait, mais aucune définition n'est donnée. Les textes précisent d'ailleurs que tout développement théorique est exclu, le nom même de Cauchy n'est pas mentionné. On insiste sur la nécessité d'une approche intuitive en associant l'intégrale à «l'aire sous la courbe», aire qui peut être approchée par l'encadrement par deux suites adjacentes construites en quadrillant le plan. On peut donc dire qu'historiquement nous nous trouvons dans l'ère pré-Cauchy.

Les propriétés générales comme la linéarité, la relation de Chasles et l'inégalité de la moyenne, ne sont même pas démontrées.

Et enfin on établit un lien entre primitive, intégrale d'une fonction, c'est le premier théorème démontré (partiellement) ce qui en fait le point central de ce cours.

Théorème 16.1. *Si f est continue sur un intervalle I et si $a \in I$ la fonction F définie par F: $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a.*

Puis on aborde le calcul de $\int_a^b f(t)dt$ à l'aide de primitive c'est à dire le «théorème fondamental du calcul différentiel et intégral» :

Théorème 16.2. *Si f une fonction numérique continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et admet une primitive F alors $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.*

Le calcul intégral se limite donc à une recherche de primitive. Pour finir, on étudie une technique très courante du calcul intégral, l'intégration par partie.

16.1.2.2 Apparition du formalisme en BAC+2

A la trappe Cauchy. En DEUG/Classe préparatoire, on enchaîne directement sur Riemann. On retrouve la définition tant méprisée par Lebesgue :

A partir de là, on développe la théorie de l'intégrale de Riemann en n'oubliant pas de préciser que les fonctions continues (autrement dit les fonctions Cauchy-intégrables) ne sont qu'une partie des fonctions R-intégrables :

...

Proposition 16.3. *Si une fonction $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann alors la fonction $|f|$ l'est aussi et l'on a : $\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leqslant \int_a^b |f(t)|dt$.*

...

On construit sur l'ensemble un structure d'algèbre (les propriétés pressenties en Terminale sont formalisées) et en particulier, :

...

Proposition 16.4. *Si deux fonctions sont Riemann-intégrables alors leur produit est Riemann-intégrable.*

On peut même obtenir une structure d'espace préhilbertien et d'espace normé. Relation de Chasles, changement de variable.

On étudie également des fonctions définies par une R-intégrale

- application $g: x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ dite «intégrale de sa borne supérieure» déjà vue en terminale et permettant d'établir le théorème fondamental $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$, on rajoutera ici la notion de R-intégrale généralisée dite également R-intégrale impropre ou encore intégrale convergente, de convergence absolue, de semi-convergence en donnant certains critères.
- application $g: x \mapsto \int_a^b f(x,t)dt$ dite «intégrale dépendant d'un paramètre».

16.1.2.3 Au delà, il faut tout reprendre !

Les étudiants arrivent en licence/école d'ingénieur et la première citation qu'on leur offre à propos des acquis précédents c'est la réflexion de Lebesgue : « Du point de vue logique, voici des définitions très naturelles, n'est ce pas ? Pourtant, on peut dire qu'elles n'ont pratiquement servi à rien. Celle de Riemann, en particulier, a l'inconvénient de ne s'appliquer que rarement et, en quelque sorte, par hasard.»

Puis on ajoute, il faut tout reprendre en commençant par la théorie de la mesure puis en donnant la construction de Lebesgue.

J'ai déjà exposé l'idée de Lebesgue, il réarrange l'espace de départ de la fonction à intégrer afin de regrouper les valeurs ayant la même image et faire un compte d'épicier selon son expression. Si le principe semble simple, la mise en oeuvre est toute autre car il faut introduire toute une gamme d'outils :

- algèbre, anneau, tribu d'ensemble,

– fonction mesurable,

– mesure.

Pour pouvoir enfin définir l'intégrale de Lebesgue et les fonctions Lebesgue-intégrables (L-intégrables).

Sur l'ensemble des fonctions L-intégrables, pour les fonctions définies par une intégrale, on obtient les théorèmes de convergence dominée en particulier le plus «célèbre» :

Proposition 16.5. *(Théorème de convergence dominée de Lebesgue)*

Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables et la suite définie par $(\int f_n d\mu)$. On suppose que (f_n) vérifie les hypothèses suivantes :

i. *(f_n) converge μ.p.p. vers une fonction mesurable f.*

ii. *$\exists g \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{T}, \mu); g \geqslant 0, |f_n| \leqslant g, \mu.p.p., \forall n)$.*

Il existe une fonction positive μ-intégrable g majorant tous les termes de la suite et indépendante de l'indice de la suite.

(condition de domination : existence d'une majorante μ-intégrable)

Alors f est μ-intégrable, $\int f_n d\mu$ converge vers $\int f d\mu$, autrement dit, $\int f d\mu < +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} \int |f_n - f| d\mu = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$.

Remarque 16.6. Dans le cadre de la théorie de Lebesgue, on perd la stabilité des fonctions Riemann-intégrables pour la multiplication.

16.1.3 Exposé rapide des différentes théories

16.1.3.1 Intégrale de Riemann

Définition 16.7. *Soient $a, b \in \mathbb{R}; a < b$.*

- *On appelle **subdivision pointée** ou **P-subdivision** de l'intervalle $[a, b]$ toute suite finie strictement croissante $\Pi = ((x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}, (\zeta_j)_{I\leqslant j\leqslant n})$ de couples de nombres réels tels que $x_0 = a$ et $x_n = b$ et $\zeta_i \in [x_{i-1}, x_i]$.*
- *On appelle **pas d'une subdivision** la borne supérieure des longueurs des intervalles $]x_i, x_{i+1}[$.*

Définition 16.8. *Soient $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction $f: I \to \mathbb{R}$ numérique et une subdivision $\Pi = ((x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}, (\zeta_j)_{I\leqslant j\leqslant n})$ du segment I. On appelle **somme de Riemann** associée à f relativement à cette subdivision toute somme : $S(I, f, \Pi) = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} (x_i - x_{i-1}) f(\zeta_i)$.*

Définition 16.9. *Soit $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $f: I \to \mathbb{R}$ est **intégrable au sens de Riemann ou Riemann-intégrable ou** encore **R-intégrable** sur I si et seulement s'il existe un nombre réel α tel que pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que, pour toute P-subdivision Π de I de pas inférieur à δ et pour toute somme de Riemann associée à f relativement à cette division, on ait : $|S(I, f, \Pi) - \alpha| \leqslant \varepsilon$.*

*Dans ce cas α est appelée **intégrale définie** de la fonction f sur le segment $[a, b]$ et notée : $\int_a^b f(t)dt$, a, b sont respectivement les bornes inférieure et supérieure de l'intégrale de f.*

Pour une fonction positive, cela revient à calculer tout simplement l'aire «sous la courbre représentative de f». La surface entre la courbe et l'axe des abscisses est découpée suivant la subdivision de I, en rectangle dont on somme l'aire.

16.1.3.2 Intégrale de Lebesgue

...

On commence à la définir pour une fonction étagée positive : c'est à dire une fonction ne prenant qu'un nombre fini de valeurs : $(m_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$.

Définition 16.10. *Soit μ une mesure sur une tribu $\mathcal{T}$ de Ω, f une application étagée positive telle que $f = \sum m_k \mathbb{1}_{A_k}$.*

On appelle intégrale définie par rapport ou associée à μ l'application :

$$L_{\mu_:}\left|\begin{array}{lll} \bar{\mathcal{E}}_+(\mathcal{T}) & \to & [0,+\infty] \\ f & \mapsto & \sum m_k \mu(A_k) \end{array}\right. \quad \text{avec pour convention } 0\times(+\infty) = +\infty \times 0 = 0$$

$L_\mu(f)$ est appelée intégrale de f par rapport à μ. On la note $\int f d\mu$ ou $\int f(x) d\mu(x)$.

... et on étend la définition à une fonction mesurable positive :

Définition 16.11. *Soit μ une mesure sur une tribu $\mathcal{T}$ de Ω.*

Soit f une application mesurable positive.

On appelle intégrale définie par rapport ou associée à μ l'application :

$$L_{\mu_:}\left|\begin{array}{lll} \mathcal{L}_+(\mathcal{T}) & \to & [0,+\infty] \\ f & \mapsto & \sup_{g\in\mathcal{E}_+(\mathcal{T}); g\leqslant f}(L_\mu(g)) \end{array}\right.$$

$L_\mu(f)$ est appelée intégrale de f par rapport à μ. On la note $\int f d\mu$ ou $\int f(x) d\mu(x)$

...

Une fonction intégrale est définie par :

Définition 16.12. *Soit $f : E \to \bar{\mathbb{R}}^+$ une fonction mesurable réelle et μ une mesure.*

- *On dit que f est **μ-intégrable** par rapport à μ si et seulement si :*
  $\int |f| d\mu < +\infty$.
- *Dans ce cas le nombre réel noté $\int f d\mu$ est appelé **intégrale (de Lebesgue abstraite)** ou **L-intégrale** de f pour la mesure μ.*

Encore un fois, on a calculé l'aire «sous la courbe», et $\sum \lambda_k \mu(A_k)$ représente une approximation de cette aire, correspondant à l'idée de réarrangement de Lebesgue.

16.1.3.3 Kurzweil-Henstock

Les sommes de Riemann sont la notion-clé de cette nouvelle intégrale!

Nous avons vu dans le cas de l'intégrale de Riemann que pour une fonction f positive, son intégrale représente l'aire située sous la courbe représentative de cette fonction, et que la somme de Riemann est une approximation de cette aire.

Supposons que l'on veuille empiriquement dessiner une somme de Riemann qui approche cette intégrale du mieux possible. Spontanément, nous ferons varier le pas $x_j - x_{j-1}$ de la subdivision en fonction de la manière dont varie f sur le segment $[x_{j-1}, x_j]$ qui contient ζ_j : si f subit là de grandes variations, il faudra prendre un pas petit pour que $f(x)$ ne puisse trop s'éloigner de la valeur $f(\zeta_j)$; si f ne varie pas beaucoup, un pas plus grand est possible.

C'est cette simple observation (qui se trouvait déjà dans un écrit d'Euler de 1768) qui a conduit à la définition de la nouvelle intégrale découverte par Kurzweil et Henstock en 1957 et 1961.

L'idée est la suivante : un réel $\varepsilon > 0$ étant donné, on ne va pas majorer uniformément le pas $x_j - x_{j-1}$. de la subdivision Π par un réel constant $\delta > 0$, mais par une fonction strictement positive $\delta(\zeta_j)$, plus capable de s'adapter aux variations de la fonction f : cette fonction, on l'appellera une jauge.

Définition 16.13. *On appelle **jauge** sur $I = [a, b]$ toute fonction S définie sur I et à valeurs réelles strictement positives.*

Définition 16.14. *Une telle jauge δ étant définie sur un segment $I = [a, b]$, une P-subdivision $\Pi = ((x_j)_{0\leqslant j\leqslant n}, (\zeta_j)_{1\leqslant j\leqslant n})$ de I sera dite **δ-fine** si et seulement si elle vérifie : $0 < x_j - x_{j-1} \leqslant \delta(\zeta_j)$ pour tout $j \in \{1, 2, , n\}$.*

Nous pouvons désormais définir l'intégrale de Kurzweil-Henstock (ou KH-intégrale).

Définition 16.15. *Soit $I=[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $f: I \to \mathbb{R}$ est* ***intégrable au sens de Henstock ou Kurzweil ou*** *encore* ***KH-intégrable*** *sur I si et seulement s'il existe un nombre réel α tel que pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe une jauge δ sur I telle que pour toute P-subdivision δ-fine Π de I et pour toute somme de Riemann associée à f relativement à cette division, on ait :*

$$|S(I,f,\Pi)-\alpha| < \varepsilon.$$

Dans ce cas α est appelée ***KH-intégrale*** *de la fonction f sur le segment $[a,b]$ et notée : $\int_a^b f(t)dt$, a, b sont respectivement les bornes inférieure et supérieure de l'intégrale de f.*

Proposition 16.16. *Ce réel α, s'il existe, est unique.*

Pour que cette définition ait un sens, il faut établir le lemme de Cousin :

Lemme 16.17. *Pour toute jauge δ sur un segment I, il existe au moins une P-subdivision δ-fine Π de I.*

A la lumière de cette définition, l'intégrale de Riemann n'est autre qu'une KH-intégrale dont la jauge est fixe.

16.1.3.4 Relations entre toutes ses intégrales

La KH-intégrale possède les propriétés classiques

- L'ensemble $P(I, \mathbb{R})$ des fonctions KH-intégrables sur un segment $I = [a, b]$ et à valeurs réelles est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- On a la linéarité et la positivité de l'intégrale.
- On a la propriété de restriction : une fonction KH-intégrable sur un segment $I=[a,b]$ est KH-intégrable sur tout segment inclus dans I.
- On a aussi l'additivité relative aux segments d'intégration : si $c \in [a, b]$, alors : $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$ (Théorème de Chasles).
- La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est continue sur I, et dérivable en tout point où f est continue.

Pour démontrer la KH-intégrabilité d'une fonction sans connaître à priori la valeur de l'intégrale, on dispose du critère de Cauchy :

Proposition 16.18. *La fonction f est KH-intégrable sur $I = [a, b]$ ssi pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe une jauge δ sur $I=[a,b]$ telle que, quelles que soient les P-subdivisions δ-fnes Π et Π' du segment I=⌈a,b⌋, on ait : $|S(I,f,\Pi) - S(I,f,\Pi')| < \varepsilon$.*

Remarque 16.19. Ceci peut se démontrer progressivement en reprenant mot pour mot les exposés traditionnels de l'intégrale de Riemann.

- Toute fonction R-intégrable sur un segment est KH-intégrable sur ce segment : les fonctions R-intégrables sont celles pour lesquelles il existe une jauge δ constante. On peut dire que ce sont les fonctions uniformément KH-intégrables.
- Les fonctions réglées sur un segment y sont donc KH-intégrables, ce qui comprend les fonctions en escalier, monotones, à variation bornée, continues par morceaux, continues, et leur KH-intégrale est égale à leur R-intégrale.

Nouveautés apportées par la KH-intégrale.

- Un exemple bien connu de non R-intégrabilité est celui de la fonction indicatrice des rationnels, de Dirichlet. Prenons un exemple un peu plus général, qui comprend cette fonction comme cas particulier.

Exemple 16.20. Soit un segment $I=[a,b]$ de $\mathbb{R}$, avec $a<b$, soit $D=\{a_0,a_1,a_2,...\}$ une partie infinie dénombrable de I, et soit une fonction f définie sur I, nulle sur $I\backslash D$ et non nulle sur D : $f(a_k)=c_k\neq 0$. Pour chaque $\varepsilon>0$, on définit une jauge δ sur I en posant : $\begin{cases}\delta(a_k)=\frac{\varepsilon}{2^{k+2}|c_k|}\\ \delta(x)=1, x\in I\backslash D\end{cases}$, pour $x\in I\backslash D$. Soit Π une P-subdivision δ-fine de I, et soit la somme de Riemann $S(I,f,\Pi)=\sum_{j=1}^{n} f(\zeta_j)(x_j-x_{j-1})$. Si $\zeta_j\in I\backslash D$ alors $f(\zeta_j)(x_j-x_{j-1})=0$. Si $\zeta_j\in D$, alors $f(\zeta_j)=a_k$ pour certain $k\in\mathbb{N}$ d'où $0<x_j-s_{j-1}\leqslant\delta(\zeta_j)=\delta(a_k)=\frac{\varepsilon}{2^{k+2}|c_k|}$ et donc $|f(\zeta_j)|(x_j-x_{j-1})\leqslant|c_k|\frac{\varepsilon}{2^{k+2}|c_k|}=\frac{\varepsilon}{2^{k+2}}$

Attention, le même $\zeta_j=a_k$ peut être élément de deux segments de la subdivision (qui sont alors consécutifs), mais pas de plus, et sa contribution à la somme de Riemann est donc majorée par le double du majorant que nous venons de trouver, soit $\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$. On en déduit : $|S(I,f,\Pi)|=\sum_{j=1}^{n}|f(\zeta_j)|(x_j-x_{j-1})\leqslant\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}=\varepsilon$. Cette fonction f se trouve ainsi KH-intégrable avec une KH-intégrale nulle, alors qu'elle n'est pas R-intégrable dans beaucoup de cas, notamment si $\bar{D}=I$.

– On a le corollaire suivant :

Corollaire 16.21. *si l'on modifie les valeurs d'une fonction KH-intégrable sur I en des points de I qui forment un ensemble infini dénombrable, alors la nouvelle fonction est encore KH-intégrable, et sa KH-intégrale reste la méme.*

– Il n'y a pas de KH-intégrale impropre ou plus exactement, i1 n'y en a pas besoin, en vertu du théorème de Hake (1921)

Théorème 16.22. *si une fonction f est KH-intégrable sur tout $[x,\,b]\subseteq\,]a,\,b]$, et si $\lim_{x\to a^-}\int_x^b f(t)\,dt=H\in\mathbb{R}$, alors la fonction f est KH-intégrable sur $[a,b]$, et bien sûr $\int_a^b f(t)\,dt=H$*

Puissance de la KH-intégrale par rapport à l'intégrale de Lebesgue

Comme pour l'intégrale de Denjoy-Perron, une différence importante avec la R-intégrale et la L-intégrale, c'est que la KH-intégrale est une intégrale non-absolue.

Mais cette fois-ci la facilité de mise en oeuvre suffit à imposer son utilisation quitte à se restreindre aux fonctions intégrables naturellement et absolument.

Les théorèmes de convergence, qui constituent l'un des grands progrès de la L-intégrale par rapport à la R-intégrale, sont satisfaits par la KH-intégrale. On a le Théorème de convergence monotone, de Beppo Levi :

Théorème 16.23. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite monotone de fonctions KH-intégrables sur $I=[a,b]$, qui converge simplement vers une fonction f; la fonction f est KH-intégrable si et seulement si la suite $\left(\int_a^b f_n(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie, et dans ce cas, $\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)dt=\int_a^b f(t)dt$.*

Le Théorème de convergence dominée, de Lebesgue, doit subir une modification pour tenir compte du fait que la KH-intégrale est une intégrale non absolue (comme nous le verrons plus loin). Il devient le Théorème de convergence majorée et minorée :

Théorème 16.24. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ b une suite de fonctions KH-intégrables sur $I=[a,b]$, qui converge simplement vers une fonction f; on suppose qu'il existe deux fonctions KH-intégrables g et h telles que $g\leqslant f\leqslant h$; alors, la fonction f est KH-intégrable et $\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)dt=\int_a^b f(t)dt$.*

C'est déjà un progrès, mais il y a plus : toute fonction dérivée est KH-intégrable. D'une façon plus précise :

Proposition 16.25. *soit F une fonction dérivable sur $I=[a,\,b]$, et soit $F'=f$; alors, f est KH-intégrable sur I, et $\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$.*

En résumé

On montre que toute fonction C-intégrable est R-intégrable, que toute fonction R-intégrable est L-intégrable et que toute fonction L-intégrable est KH-intégrable.

16.1.4 Conclusion

La KH-intégrale assure donc la synthèse des trois grands concepts d'intégrale qui ont marqué successivement la progression de la théorie de l'intégration : les intégrales de Cauchy, de Riemann, de Lebesgue. De façon plus précise, les fonctions f qui sont L-intégrables sont exactement les fonctions f KH-intégrables telles que $|f|$ soit aussi KH-intégrable or les fonctions L-intégrables sont les fonctions L-intégrables. Ainsi, on peut donc définir l'intégrale de Lebesgue au moyen de la KH-intégrale, et en déduire tout ce qui s'ensuit : la théorie de la mesure, la notion de propriété vraie presque partout, les théorèmes classiques de convergence presque partout, etc. On obtient un exposé plus simple que tous ceux que l'on a pu lire auparavant, et qui est cohérent avec les autres modes classiques d'intégration. Alors pourquoi attendre ? Certains professeur pensent que la KH-intégrale peut être enseignée au niveau BAC+1; leur réticence : elle n'est pas au programme des concours, l'enseigner se serait pénaliser leurs élèves. Cependant il parait difficile de l'ignorer c'est pourquoi certaines universités l'ont tout de même mise au programme de la licence en complément de l'enseignement de l'intégrale de Lebesgue : de futurs professeurs, qui risquent de l'enseigner, doivent au moins connaître son existence !

Prérequis :

1. Anneau, Algèbre et tribu de parties d'un ensemble.
2. Application mesurable.

16.2 Convention de calcul dans $\bar{\mathbb{R}}$

$$
\begin{array}{rll}
 & 0\times(+\infty)=(+\infty)\times 0=0 & (-\infty)\times 0=0\times(-\infty)=0 \\
\forall x\in\,]0,+\infty] & x\times(+\infty)=(+\infty)\times x=+\infty & x\times(-\infty)=(-\infty)\times x=-\infty \\
\forall x\in[-\infty,0[& x\times(+\infty)=(+\infty)\times x=-\infty & x\times(-\infty)=(-\infty)\times x=+\infty \\
\forall x\in\,]-\infty,+\infty] & x+(+\infty)=(+\infty)+x=+\infty & \\
\forall x\in[-\infty,+\infty[& x+(-\infty)=(-\infty)+x=-\infty &
\end{array}
$$

16.3 Anneau, Algèbre et Tribu de parties d'un ensemble

Cette section est à mettre avec le chapitre sur les ensembles.

16.3.1 Anneau ou clan de parties d'une ensemble

Définition 16.26. *On appelle* ***anneau ou clan ou anneau algébrique*** *de partie d'un ensemble E, toute famille de parties $\mathcal{C}$ tel que :*

- $\mathcal{C}\subset\mathcal{P}(E)$, *" $\mathcal{C}$ est un ensemble de partie de E "*
- $(A,B\in\mathcal{C})\Rightarrow(A\cup B\in\mathcal{C}$ et $A-B\in\mathcal{C})$, *" $\mathcal{C}$ stable par réunion et différence ".*

Exemple 16.27.

1. Soit E admettant une infinité d'éléments. Coit $\mathcal{C}$ la famille des sous-ensembles de E ne comportant qu'un nombre fini d'élément de E. $\mathcal{C}$ est un clan (J. Genet page 11).
2. $\varnothing$ est un anneau ? (à vérifier)
3. Soit $A\in\mathcal{P}(E)$ alors $\mathcal{C}=\{\varnothing,A\}$ est un anneau.

4. Définissons les ensembles $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4, \mathcal{A}_5,$ par :
   - $\mathcal{A}_1 = \mathcal{P}(E)$
   - $\mathcal{A}_2 = \{\varnothing, E, A, E - A\}$ avec $A \in \mathcal{P}(E)$
   - $\mathcal{A}_3 = \left\{A = \bigcup_{i\in I} A_i; I \subset \{1, ..., n\}\right\} \cup \{\varnothing\}$ avec $A_1, ..., A_n$ une partition finie de E . «$\mathcal{A}_3$ ensemble des réunions finies d'éléments de la partition, $\varnothing$ compris»
   - On prend $E = \mathbb{R}$ et $\mathcal{C} = \{]a; b]; a, b \in \mathbb{R}; a < b\} \cup \{]-\infty; b]; b \in \mathbb{R}\} \cup \{]a; +\infty[\}$ alors $\mathcal{A}_4 = \left\{A = \bigcup_{i\in I} A_i; A_i \in \mathcal{C}; A_i \cap A_j = \varnothing; \text{si } i \neq j; \text{card}(I) < +\infty\right\} \cup \{\varnothing\}$ est une algèbre. Elle permet de construire la mesure d'une longueur. «$\mathcal{A}_4$ est l'ensemble des runions finies d'intervalle disjoints de la forme $]-\infty; a];]a; b];]b; +\infty[; a, b \in \mathbb{R}$; $a < b$, $\varnothing$ compris.
   - Soit $E = E_1 \times E_2$ puis $\mathcal{C} = \{B \times C; B \subset E_1 \text{ et } C \subset E_2\}$ alors $\mathcal{A}_5 = \left\{A = \bigcup_{i\in I} A_i; A_i \in \mathcal{C}; \text{card}(I) < +\infty\right\}$ est une algèbre. Elle permet de construire les mesures produits. «$\mathcal{A}_5$ est l'ensemble des réunions finies des produits d'une partie de E_1 et d'une partie de E_2».

   $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4,$ sont des anneaux.
5. L'ensemble des intervalles $(a,\ b)$ de $\mathbb{R}$, sans préciser si ce sont des intervalles ouverts, fermés ou bornés est un anneau.
6. Contre exemple : Les espaces topologiques ne sont pas des clans (J. Genet page 12), en fait il ne suffit pas d'assurer la stabilité par rapport à 2 quelconques des lois ($\cap, \cup$ et $\Delta, -$).

Proposition 16.28. *Une famille de parties de E est un clan ou un anneau d'ensemble si et seulement si elle est stable par Δ ou $\cap$.*

Proposition 16.29. *Soit $\mathcal{C}$ un anneau de partie d'un ensemble E.*

1. $\varnothing \in \mathcal{C}$.
2. $(A, B \in \mathcal{C}) \Rightarrow (A \cap B \in \mathcal{C})$ *($\mathcal{C}$ stable par intersection).*
3. $(A, B \in \mathcal{C}) \Rightarrow (A \Delta B \in \mathcal{C})$ *($\mathcal{C}$ stable par différence symétrique).*
4. $(A_1, ..., A_n \in \mathcal{C}) \Rightarrow \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{C} \text{ et } \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{C}\right)$ *(Stabilité par intersection et réunion finies).*
5. *L'image réciproque d'un clan est un clan.*

Démonstration. J. Genet page 11. □

Note 16.30. Sur le terme Anneau : (Livre J. Genet page 12) On peut définir sur $\mathcal{P}(E)$ une structure d'anneau au sens algébrique à l'aide des deux lois de composition :

– loi additive $+ : \left|\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ (A, B) & \mapsto & A\Delta B \end{array}\right.$ i.e. $A + B = A\Delta B$

– loi multiplicative $\times : \left|\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ (A, B) & \mapsto & A\Delta B \end{array}\right.$ i.e. $A \times B = A \cap B$

16.3.2 Algèbre de partie d'un ensemble

Définition 16.31. *On dit qu'un ensemble $\mathcal{A}$ est une* ***algèbre*** *(ou algèbre de boole ou anneau de boole unitaire ou clan unitaire) de partie d'une ensemble E si et seulement si :*

– *il vérifie les conditions suivantes :*
   - $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$, *" $\mathcal{A}$ est un ensemble de partie de E "*

- $E \in \mathcal{A}$, *" $\mathcal{A}$ contient E "*
- $(A, B \in \mathcal{A}) \Rightarrow (A \cup B \in \mathcal{A} \text{ et } A - B \in \mathcal{A})$, *" $\mathcal{A}$ stable par réunion et différence ".*

– *Autrement dit, $\mathcal{A}$ est un anneau de partie de E, contenant E.*

Remarque 16.32. On aurait pu définir une algèbre à partir des conditions suivantes.

– Le terme algèbre de boole est justifié par l'exercice (affirmation à vérifier) 1.06 Intégrale de Lebesgue édition Cépadues - Edition Michel Bouyssel page 24-25.

– On aurait pu définir une algèbre à partir des conditions suivantes.

Proposition 16.33. *(Autres Conditions nécessaires et suffisantes) $\mathcal{A}$ est une **algèbre** ... si et seulement si :*

- $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$, *" $\mathcal{A}$ est un ensemble de partie de E "*
- $E \in \mathcal{A}$, *" $\mathcal{A}$ contient E "*
- $(A, B \in \mathcal{A}) \Rightarrow (A \cup B \in \mathcal{A} \text{ et } A^C \in \mathcal{A})$, *" $\mathcal{A}$ stable par réunion et complémentarité ".*
- *De manière plus complète $\mathcal{A}$ est une algèbre si et seulement si : $\mathcal{A}$ est stable pour $(\cup \text{ ou } \cap)$ et $(C_E \text{ ou } - \text{ ou } \Delta)$*

Démonstration.

-
-
-
- Exercice (affirmation à vérifier) 1.06 Intégrale de Lebesgue édition Cépadues - Edition Michel Bouyssel page 24-25. □

Exemple 16.34.

1. $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4, \mathcal{A}_5$ sont des anneaux mais ce sont aussi des algèbres.
2. L'ensemble des réunions finies d'intervalles (au sens algébrique) est un clan unitaire.
3. L'ensemble des réunions finies d'intervalles de $[\alpha; \beta[$ du type $[a, b[$ est une algèbre clan unitaire de parties de $[\alpha; \beta[$.
4. Par contre, il n'en est pas de même de l'ensemble des intervalles ouverts (ou fermés) de $\mathbb{R}$ qui n'est pas un clan.

Théorème 16.35. *(Stabilité par intersection et réunion finies)*
Soit $\mathcal{A}$ une algèbre alors $(A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}) \Rightarrow \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A} \text{ et } \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A} \right)$

16.3.3 σ-Anneau ou σ-clan de partie d'un ensemble. Espace et ensemble mesurables

Définition 16.36. *On appelle σ-anneau ou σ-clan de partie d'un ensemble E :*

– *tout fammile $\mathcal{S}$ tel que :*

- $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(E)$, *« $\mathcal{S}$ est une fammille de partie de E ».*
- $(A_n \in \mathcal{S}) \Rightarrow \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S} \right)$, *« $\mathcal{S}$ est stable par réunion dénombrable ».*
- $(A, B \in \mathcal{S}) \Rightarrow (A - B \in \mathcal{S})$, *« $\mathcal{S}$ stable par différence ».*

– *Tout anneau $\mathcal{S}$ de partie de E stable par réunion infinie dénombrable.*

Remarque 16.37. remarque, on aurait pu définir un σ-anneau à partir des conditions suivantes.

Proposition 16.38. *(Autres Conditions nécessaires et suffisantes) $\mathcal{S}$ est un* ***σ-anneau*** *... si et seulement si :*

- $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(E)$, *" $\mathcal{S}$ est un ensemble de partie de E "*
- $(A, A_i \in \mathcal{S}) \Rightarrow \left(\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{S} \text{ et } A^C \in \mathcal{S} \right)$, *" $\mathcal{S}$ stable par réunion dénombrable et complémentarité ". complémentarité ?*

Théorème 16.39. *(Stabilité par intersection infinie dénombrable)*
Soit $\mathcal{S}$ un σ-anneau alors $(A_1, ..., A_n \in \mathcal{S}) \Rightarrow \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{S} \right)$.

Définition 16.40. *On appelle espace* ***mesurable*** *un couple $(E, \mathcal{T})$ où $\mathcal{T}$ est un σ-anneau d'un ensemble E. Les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés ensembles mesurables de $(E, \mathcal{T})$ ou $\mathcal{T}$-mesurables.*

Remarque 16.41.

1. Certains ouvrages emploient mesurable à la place de probabilisable.
2. A ne pas confondre avec μ-mesurable ou μ est une mesure.

16.3.4 Tribu ou σ-algèbre ou corps de Borel de partie d'un ensemble. Espace probabilisable

Définition 16.42. *On appelle Tribu (ou σ-algèbre ou corps de Borel) de partie d'un ensemble E :*

- *tout ensemble $\mathcal{T}$ tel que :*
  - $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(E)$, *" $\mathcal{T}$ est un ensemble de partie de E "*
  - $E \in \mathcal{T}$, *" $\mathcal{T}$ contient E "*
  - $(A_n \in \mathcal{T}) \Rightarrow \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{T} \right)$, *" $\mathcal{T}$ est stable par réunion dénombrable "*
  - $(A, B \in \mathcal{T}) \Rightarrow (A - B \in \mathcal{T})$, *" $\mathcal{T}$ stable par différence ".*
- *tout ensemble $\mathcal{T}$ à la fois σ-anneau et algèbre de partie de E, autrement dit*
- *tout ensemble $\mathcal{T}$ σ-anneau de partie de E, contenant E, ou encore*
- *tout ensemble $\mathcal{T}$ algèbre de partie de E stable par réunion infinie dénombrable.*

Remarque 16.43. remarque, on aurait pu définir une tribu à partir des conditions suivantes.

Proposition 16.44. *(Autres Conditions nécessaires et suffisantes) $\mathcal{T}$ est une* ***tribu*** *... si et seulement si :*

- $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(E)$, *" $\mathcal{T}$ est un ensemble de partie de E "*
- $E \in \mathcal{T}$, *" $\mathcal{T}$ contient E "*
- $(A, A_i \in \mathcal{T}) \Rightarrow \left(\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{T} \text{ et } A^C \in \mathcal{T} \right)$, *" $\mathcal{T}$ stable par réunion dénombrable et complémentarité ".*

Exemple 16.45.

1. $\mathcal{A}_1 = \mathcal{P}(E)$ est une tribu.
2. Soit $A_n, n \geqslant 1$ une partition de E alors $\mathcal{A}_2 = \left\{ A = \bigcup_{i\in I} A_i; I \in \mathcal{P}(\mathbb{N}^*) \right\}$ est une tribu.
3. $\mathcal{A}_4$ et $\mathcal{A}_5$ ne sont pas des tribus.

Théorème 16.46. *(Stabilité par intersection infinie dénombrable)*
Soit $\mathcal{C}$ une tribu alors $(A_1, ..., A_n \in \mathcal{T}) \Rightarrow \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{T} \right)$.

Définition 16.47. *On appelle espace* ***probabilisable*** *un couple $(E, \mathcal{T})$ où $\mathcal{T}$ est une tribu d'un ensemble E. Les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés ensembles mesurables de $(E, \mathcal{T})$ ou $\mathcal{T}$-mesurables.*

Remarque 16.48.

1. Certains ouvrages emploient mesurable à la place de probabilisable.
2. A ne pas confondre avec μ-mesurable ou μ est une mesure.

16.3.5 Anneau, algèbre, σ-Anneau et Tribu engendrés par $C \subset \mathcal{P}(E)$

Proposition 16.49. *Soit $\{E_j\}_{j\in J}$ une famille d'anneau, d'algèbre, de σ-anneau ou de tribu, alors*

1. *$\bigcap_{j\in J} E_i$ n'est pas vide.*
2. *c'est également un anneau, une algèbre, un σ-anneau ou une tribu.*
3. *Soit $C \in \mathcal{P}(E), C \in E_j, \forall j \in J$, $\bigcap_{j\in J} E_i$ alors est le plus petit anneau, algèbre, σ-anneau ou tribu contenant C.*

Définition 16.50. *Soit $C \subset \mathcal{P}(E)$ une classe d'ensemble de E. On appelle :*
Anneau, Algèbre, σ-Anneau engendrés ou Tribu engendré(e) par C :
le plus petit anneau, algèbre, σ-anneau ou tribu d'ensemble contenant C.
Autrement dit c'est aussi l'intersection des anneau, algèbre, σ-anneau ou tribu contenant C.
*l'**Algèbre engendrée par C** est notée $a(C)$. la tribu **engendrée par C** est notée $\sigma(C)$.*

Théorème 16.51. *Tout **Anneau, Algèbre, σ-Anneau engendrés ou Tribu engendré(e) par C** est contenu dans une réunion finie d'élément de C.*

Démonstration. □

Théorème 16.52. *L'image réciproque d'un anneau, d'une algèbre, d'un σ-anneau ou d'une tribu est un anneau, une algèbre, un σ-anneau ou une tribu.*

Démonstration. □

16.3.6 Tribu produit

Rajouter page 22 définition 2.9 livre exercice calcul intégral Joël Benoist, rajouter la défintion d'un espace produit page 187.

16.3.7 Tribu engendrée par une topologie

La notion de tribu a été définie jusqu'à présent sur des espaces E amorphes, i.e. que l'on a pas muni d'une topologie. Cependant dans les situations usuelles $E = \mathbb{R} = \mathbb{R}^n = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$ il est donc fréquent de supposer que E est un espace topologique ou même métrique; il est alors souhaitable de disposer d'une tribu compatible avec la topologie de E.

16.3.7.1 Définition générale

Théorème 16.53. *Soit T un espace topologique, $\mathcal{O}$ l'ensemble de ses ouverts et $\mathcal{F}$ l'ensemble de ses fermés alors $\sigma(\mathcal{O}) = \sigma(\mathcal{F})$.*

***Démonstration.** Voir cours licence* □

Définition 16.54. *Soit T un espace topologique, $\mathcal{O}$ l'ensemble de ses ouverts et $\mathcal{F}$ l'ensemble de ses fermés.*

1. *On appelle **tribu borélienne** de T la tribu engendrée par les ouverts ou les fermés de T. On la note $\mathcal{B}(T)$. Ainsi $\mathcal{B}(T) = \sigma(\mathcal{O}) = \sigma(\mathcal{F})$.*
2. *Les éléments d'une tribu borélienne sont appelés **boréliens**.*

16.3.7.2 Cas d'un Espace métrique

Théorème 16.55. *Soit $(T,\ d)$ et $(S,\ d')$ 2 espaces métriques; $\mathcal{B}(T)$, $\mathcal{B}(S)$ leurs tribus boréliennes respectives et $f: T \to S$ une application continue.*
On a alors : $\forall A \in \mathcal{B}(S), f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(T)$. Autrement dit $f^{-1}(\mathcal{B}(S)) \subset \mathcal{B}(T)$.

Démonstration. Voir cours de licence □

Remarque 16.56. Autrement dit une application continue conserve la borélienité d'une partie.

16.3.7.3 Tribu borélienne de $\mathbb{R}$

Théorème 16.57. *La tribu borélienne de $\mathbb{R}$ est engendrée par :*

1. *La classe des intervalles bornés : $[x;y];]x;y];[x;y[;]x;y[$ où $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $x<y$.*
2. *Les classes des intervalles $]-\infty;x[;]-\infty;x];[x;+\infty[;]x;+\infty[$ où $x \in \mathbb{R}$.*
3. *$\mathcal{A}_4$*

Démonstration. Voir cours de licence. □

Rajouter tribu borélienne de $[0,+\infty]$ où $\bar{\mathbb{R}}$ page 190.

16.3.7.4 Tribu borélienne de $\mathbb{R}^n$

Théorème 16.58. *La tribu borélienne de $\mathbb{R}^n$ est engendrée par :*

1. *La classe des intervalles bornés :*
   $\prod_{i=1}^n [x;y]; \prod_{i=1}^n]x;y]; \prod_{i=1}^n]x;y[; \prod_{i=1}^n [x;y[$ *où* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *et* $x<y$.
2. *Les classes des intervalles*
   $\prod_{i=1}^n]-\infty;x[; \prod_{i=1}^n]-\infty;x]; \prod_{i=1}^n [x;+\infty[; \prod_{i=1}^n]x;+\infty[$ *où* $x \in \mathbb{R}$.
3. *$\prod_{i=1}^n B_i$ tel que $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

Remarque 16.59. Du fait que $]a;b] = \bigcap_{\substack{c\in\mathbb{Q}\\ c\geqslant b}}]a;c]$ et $]a;c] = \bigcup_{\substack{d\in\mathbb{Q}\\ d\geqslant b}}]d;c]$, on peut se limiter, dans l'énoncé des théorèmes précédents à prendre des bornes rationnelles.

Rajouter tribu borélienne de $\mathbb{C}$ page 190.

16.3.7.5 $\mathcal{P}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$?

Théorème 16.60. *Soit E un ensemble $(C_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{P}(E)$ distincts. On a alors* $\operatorname{card}(\sigma\{C_n, n\geqslant 1\}) = \operatorname{card}(\mathbb{R})$.

En particulier $\operatorname{card}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = \operatorname{card}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) = \operatorname{card}(\mathbb{R}) = \operatorname{card}(\mathbb{R}^n)$
or $\operatorname{card}(\mathcal{P}(\mathbb{R})) = \operatorname{card}(\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)) > \operatorname{card}(\mathbb{R})$
Conclusion : il existe donc des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ non boréliens !, mais pour l'instant, on ne sait pas le montrer, on ne dispose que de preuves indirectes voir commentaires JP Marco page 189.

16.3.7.6 σ-Anneau engendré par les compacts

16.3.8 π-Classe et λ-Classe

16.4 Fonctions étagées

A mettre avec les fonctions.

16.4.1 Définitions

Définition 16.61. *Soit E_1 et E_2 deux ensembles et $f: E_1 \to E_2$.*
*f est une application **étagée** $\Leftrightarrow$ $f(E_1)$ est un partie finie de E_2*
Autrement dit, elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

Définition 16.62. *Soit $f: E_1 \to E_2$ une application étagée, $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ l'ensemble des valeurs de f (i.e. $f(E_1)$) et Ω une classe de partie de E_1.*
*f est une application **étagée sur Ω** ou **Ω-étagée** $\Leftrightarrow \forall k \in \{1, ..., n\}, f^{-1}(\{y_k\}) \in \Omega$*

16.4.2 Fonctions numériques étagées (Cas $E_2 = \mathbb{R}, \bar{\mathbb{R}}$)

Théorème 16.63.

1. *Soit $f: E_1 \to \mathbb{R}, \bar{\mathbb{R}}$ une application étagée et $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ l'ensemble de ses valeurs.*
   $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \times \mathbb{1}_{A_i}$ avec $A_i = f^{-1}(\{\alpha_i\})$ (c'est la décomposition canonique de f).
2. *Soit E un espace muni d'une tribu borélienne $\mathcal{B}$ et $f: E \to \mathbb{R}, \bar{\mathbb{R}}$ une application étagée.*
   f est $\mathcal{B}$-mesurable $\Leftrightarrow$ f est étagée sur $\mathcal{B}$.
   Autrement dit les fonctions étagées sur $\mathcal{B}$ sont toutes des fonctions mesurables.
3. *Soit $(E, \mathcal{B})$ un espace probabilisable. L'ensemble $\mathcal{E}(\mathcal{B})$ des fonctions étagées sur $\mathcal{B}$ est un espace vectoriel.*

16.5 Applications mesurables et espace $\mathcal{L}_0$

A mettre avec les fonctions.

Les applications mesurables sont à la théorie des mesures ce que sont les fonctions continues pour la topologie, elle conserve la mesurabilité d'un ensemble, par rapport à des σ-anneaux ou tribu.

16.5.1 Définition

Définition 16.64. *Soit $(E_1, \mathcal{T}_1)$ et $(E_2, \mathcal{T}_2)$ deux espaces mesurables.*
*On appelle application **($\mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2$ mesurable) ou mesurable**, toute application $f: E_1 \to E_2$ telle que :*

- $\forall A \in \mathcal{T}_2, f^{-1}(A) \in \mathcal{T}_1$,
- *autrement dit, $f^{-1}(\mathcal{T}_2) \subset \mathcal{T}_1$ ou encore si A et $\mathcal{T}_2$-mesurable alors $f^{-1}(A)$ est $\mathcal{T}_1$-mesurable.*

Remarque 16.65.

1. Si E_2 est muni d'une topologie $\mathcal{O}$, on convient de dire qu'une application $f: E_1 \to E_2$ est mesurable ou $\mathcal{T}_1$-mesurable si et seulement si elle est $\mathcal{T}_1 - \sigma(\mathcal{O})$ mesurable.
2. Si $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ sont les tribus boréliennes de deux espaces topologiques E_1, E_2, on dit que l'application est borel-mesurable ou borélienne.
3. Entre deux espaces mesurables, il n'existe pas forcément d'application mesurable !
4. Si $\mathcal{T}_1 = \mathcal{P}(E)$, alors au contraire toute application $f: E_1 \to E_2$ est mesurable.
5. $f^{-1}(\mathcal{T}_2)$ est une tribu, c'est la plus petite tribu rendant f mesurable, dite tribu engendrée par f, on la note $\sigma(f)$.
6. En pratique, $\mathcal{T}_2$ sera une tribu borélienne de $\mathbb{R}$, il sera donc nécessaire de supposer $(E_1, \mathcal{T}_1)$ probabilisable.

16.5.2 Propriétés générales

16.5.2.1 "Critère de mesurabilité"

Théorème 16.66. *Soit $(E_1, \mathcal{T}_1)$ et $(E_2, \mathcal{T}_2)$ deux espaces probabilisables, Ω un sous-ensemble de $\mathcal{P}(E_2)$ engendrant $\mathcal{T}_2$.*
(l'application $f: E_1 \to E_2$ est mesurable) $\Leftrightarrow$ ($f^{-1}(\Omega) \subset \mathcal{T}_1$)

16.5.2.2 Composition d'applications mesurables

Théorème 16.67. *Soit $(E_1, \mathcal{T}_1)$, $(E_2, \mathcal{T}_2)$ et $(E_3, \mathcal{T}_3)$ trois espaces mesurables.*
Si $f: E_1 \to E_2$ et $g: E_2 \to E_3$ sont deux applications mesurables alors :
l'application $g \circ f: E_1 \to E_3$ est mesurable.

16.5.2.3 Applications continues et mesurabilité

Proposition 16.68. *Soit $(E_1, \mathcal{B}_1)$ et $(E_2, \mathcal{B}_2)$ deux espaces probabilisables, munis de leurs tribus boréliennes respectives.*
Toute application $f: E_1 \to E_2$ continue est borélienne.

16.5.2.4 Notation

Définition 16.69. *On désignera par $\mathcal{L}^0(E_1, \mathcal{T}_1, E_2, \mathcal{T}_2)$ l'ensemble des applications mesurables de $(E_1, \mathcal{T}_1)$ dans $(E_2, \mathcal{T}_2)$.*

Remarque 16.70. Les ensembles $\mathcal{L}^0(E, \mathcal{T}, \mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $\mathcal{L}^0(E, \mathcal{T}, \bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$, $\mathcal{L}^0(E, \mathcal{T}, \mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ et $\mathcal{L}^0(E, \mathcal{T}, \bar{\mathbb{R}}^+, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}^+))$ pourront être notés $\mathcal{L}^0(\mathcal{T})$, $\overline{\mathcal{L}^0}(\mathcal{T})$, $\mathcal{L}^0_+(\mathcal{T})$, $\overline{\mathcal{L}^0}_+(\mathcal{T})$ si aucune confusion n'est possible.

16.5.3 Applications mesurables à valeurs dans un espace métrique

Théorème 16.71. *Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables $E \to F$ où E est un espace mesurable et F un espace métrique.*

Si (f_n) converge simplement vers f, alors f est également mesurable.

16.5.4 Application à valeurs dans un espace produit

Proposition 16.72. *Soient $(E, \mathcal{T}), (E_1, \mathcal{T}_1), ..., (E_n, \mathcal{T}_n)$ des espaces probabilisables, $\left(\prod_{i=1}^n E_i, \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{T}_i\right)$ l'espace probabilisable produit et f_i: $E \to E_i$, $i = 1, ..., n$ des applications mesurables alors l'application* $\bar{f}: \left| \begin{array}{ccc} E & \to & \prod_{i=1}^n E_i \\ x & \mapsto & (f_i(x), ... f_n(x)) \end{array} \right.$ *est mesurable.*

Où est défini la tribu produit ! ou alors définir la tribu produit auparavant. A déplacer vers intégration.

16.5.5 Applications numériques mesurables

Il s'agit d'étudier le cas particulier des applications de $E \to \mathbb{R}$ ou $\bar{\mathbb{R}}$ mesurables où $\mathbb{R}$, $\bar{\mathbb{R}}$ sont munis de leurs tribus boréliennes. On a vu que dans ce cas E doit être un espace probabilisable (dans le cas contraire, il est impossible de définir des applications de $E \to \mathbb{R}$ mesurables).

16.5.5.1 "Critère de mesurabilité"

Proposition 16.73. *Soit $\mathcal{T}$ une tribu de partie de E.*
L'application $f: E \to \bar{\mathbb{R}}^+$ est dite $\mathcal{T}$-mesurable si et seulement si :

i. $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^+$; $f^{-1}([a, b[) \in \mathcal{T}$, *ce qui peut s'écrire* $[a \leqslant f < b] \in \mathcal{T}$,

ii. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^+;\ f^{-1}([a,b]) \in \mathcal{T}$*,ce qui peut s'écrire* $[a \leqslant f \leqslant b] \in \mathcal{T}$*,*

iii. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^+;\ f^{-1}([a,+\infty[) \in \mathcal{T}$*,ce qui peut s'écrire* $[a \leqslant f < +\infty] \in \mathcal{T}$*,*

iv. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^+;\ f^{-1}(]a,+\infty[) \in \mathcal{T}$*,ce qui peut s'écrire* $[a < f < +\infty] \in \mathcal{T}$*,*

v. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^+;\ f^{-1}([a,+\infty]) \in \mathcal{T}$*,ce qui peut s'écrire* $[a \leqslant f] \in \mathcal{T}$*,*

vi. Idem en remplaçant $\mathbb{R}^+$ *par* $\mathbb{Q}^+$

vii. Idem en remplaçant $\mathbb{Q}^+$ *par l'ensemble des nombres dyadiques* $D^+ = \{k \times 2^{-n}; k, n \in \mathbb{N}\}$*.*

viii. $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$ *on a* $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$*, l'espace* $\bar{\mathbb{R}}^+$ *étant muni de la topologie d'alexandroff.*

ix. Si $\mathcal{C}$ *est une classe de partie de* $\mathbb{R}^+$ *vérifiant* $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$ *alors on a* $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$ *pour tout* $B \in \mathcal{C}$*, l'espace* $\bar{\mathbb{R}}^+$ *étant muni de la topologie d'alexandroff.*

Démonstration. □

Remarque 16.74.

1. C'est une application directe du théorème précédent puisque $[a, b[$, ... engendrent la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.
2. Une application indicatrice $\mathbb{1}_A$ est mesurable, si et seulement si $A \in \mathcal{T}$, (à mettre dans une section précédente, lire intégrale de Lebesgue).

16.5.5.2 Opérations sur les applications numériques mesurables

Théorème 16.75.

1. *Si* f *et* g *sont des fonctions mesurables sur* $(E, \mathcal{B})$ *à valeur dans* $\bar{\mathbb{R}}$ *alors les fonctions suivantes sont mesurables :*
   - $f + g$ *(quand elle existe)* ; $c \times f$ $(c \in \mathbb{R})$; $f \times g$; f^2
   - $\sup(f; g)$; $\inf(f; g)$
   - f^+ ; f^-
   - $|f|$
2. *Pour que* f *soit mesurable, il faut et il suffit que* f^+ *et* f^- *le soient.*

Remarque 16.76.

1. $(|f| \text{ mesurable}) \not\Rightarrow (f^+ \text{ et } f^- \text{ mesurables})$ et par conséquent : f mesurable.
2. L'expression "quand elle existe" se rapporte aux cas où $f(x) = \pm\infty$ et $g(x) = \pm\infty$ pour lequel $(f + g)(x)$ n'a pas de sens.
3. Lorsqu'il s'agit de $\mathbb{R}$ au lieu de $\bar{\mathbb{R}}$, il n'y évidement aucune restriction.
4. Le théorème précédant peut se résumer en disant que :
   "$\mathcal{M}(\mathcal{B})$ est une algèbre réticulée sur $\mathbb{R}$ pour la relation d'ordre naturelle $f \leqslant g$".

16.5.5.3 Suite d'applications numériques mesurables

Théorème 16.77. *Soit* (f_n) *une suite de fonctions mesurables* $E \to \bar{\mathbb{R}}$ *où* E *est un espace mesurable.*

1. *Les fonctions suivantes sont mesurables :*
   - $\sup(f_n)$, $\inf(f_n)$
   - $\overline{\lim}_{n\to\infty}(f_n)$, $\underline{\lim}_{n\to\infty}(f_n)$
2. *Soient* $f, g\colon (E, \mathcal{T}) \to \bar{\mathbb{R}}$ *des fonctions mesurables et* $h\colon \bar{\mathbb{R}} \to \bar{\mathbb{R}}$*,* $k\colon \bar{\mathbb{R}} \times \bar{\mathbb{R}} \to \bar{\mathbb{R}}$ *des fonctions continues, alors* $h \circ f$ *et* $k \circ (f, g)$ *sont mesurables.*
3. *Si* (f_n) *converge simplement vers* f*, alors* f *est également mesurable.*

4. *Si* $\exists A \in \mathcal{T};\ \forall x \notin A,\ f_n(x)$ *converge dans* $\bar{\mathbb{R}}$ *alors la fonction définie par* $\begin{cases} f(x) = \lim_{n\uparrow+\infty} f_n(x), \forall x \notin A \\ f(x) = 36, \forall x \in A \end{cases}$ *est mesurable.*

Remarque 16.78.

1. On peut résumer ce théorème en écrivant que :
   "$\mathcal{M}(\mathcal{B})$ est fermé au sens de la convergence simple des suites".
2. Ce théorème reste valable pour $\lim(f_n) = f$ pour des fonctions à valeur dans un espace métrique.
3. Une application immédiate de ce théorème est le lemme suivant :

Exemple 16.79.

1. Prenons $(E, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}^p, \mathcal{B}(\mathbb{R}^p))$, les fonctions mesurables définies sur $\mathbb{R}^p$ sont alors boréliennes (ou boréliennes-mesurables).
2. La complexité des fonctions boréliennes apparait lorsqu'on constate :
   - que toute limite simple d'une suite (f_n) de fonctions continues définies sur $\mathbb{R}^p$ est borélienne,
   - et que toute limite simple d'une suite de telles fonctions est aussi borélienne etc ...

Théorème 16.80. *(Trouver un emplacement)*

1. *Soit E un espace muni d'une tribu borélienne* $\mathcal{B}$ *et* $f: E \to \mathbb{R}, \bar{\mathbb{R}}$ *une application étagée.*
   f est $\mathcal{B}$*-mesurable* $\Leftrightarrow$ *f est étagée sur* $\mathcal{B}$ *.*
   Autrement dit les fonctions étagées sur $\mathcal{B}$ *sont toutes des fonctions mesurables.*
2. *Soit* $(E, \mathcal{B})$ *un espace probabilisable. L'ensemble* $\mathcal{E}(\mathcal{B})$ *des fonctions étagées sur* $\mathcal{B}$ *est un espace vectoriel.*

16.6 Approximation de $\begin{matrix}\text{fonctions}\\ \text{mesurables}\end{matrix}$ par des $\begin{matrix}\text{fonctions étagées}\\ \text{mesurables}\end{matrix}$

A revoir !

Théorème 16.81. *(d'approximation) Soit* $(E, \mathcal{B})$ *un espace probabilisable.*

1. *Toute application* $f: E \to \bar{\mathbb{R}}^+$ $\mathcal{B}$*-mesurable est limite simple d'une suite croissante de fonctions étagées mesurables à valeurs dans* $\mathbb{R}^+$*.*
2. *Toute application* $f: E \to \mathbb{R}^+$*? *$\mathcal{B}$*-mesurable est limite simple d'une suite de fonctions étagées mesurables à valeurs dans* $\mathbb{R}^+$*.*
   (il suffit d'écrire $f = f^+ - f^-$ *et d'appliquer (1) à* f^+ *puis* f^-*.*
3. *Toute application* $f: E \to \bar{\mathbb{R}}^+$ $\mathcal{B}$*-mesurable et bornée est limite uniforme d'une suite croissante de fonctions étagées mesurables à valeurs dans* $\mathbb{R}^+$*.*
4. *Toute application* $f: E \to \mathbb{R}^+$*? *$\mathcal{B}$*-mesurable et bornée est limite uniforme d'une suite de fonctions étagées mesurables à valeur dans* $\mathbb{R}^+$*.*
   (il suffit d'écrire $f = f^+ - f^-$ *et d'appliquer (3) à* f^+ *puis* f^-*.*

Remarque 16.82. Entre (1) et (2) on a perdu la monotonie.

16.7 Mesures

Les boréliens de $\mathbb{R}$ sont indescriptibles de manière explicite.

Par contre les intervalles $\mathbb{R}$ sont facilement descriptibles $[a,\ b[,\ ]a,\ b[,\ ...$ et l'application : $\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ [a,b[& \mapsto & b-a \end{array}$ est une mesure au sens de la théorie de la mesure sur l'ensemble de ces intervalles (qui est un anneau mais pas une tribu comme ?) de même pour $\mathcal{A}_4$ et sa mesure. L'extension permettra de l'étendre aux tribus.

On préfère travailler dans une algèbre car les éléments de cette algèbre sont des réunions finies d'éléments de cette algèbre. Pour définir une mesure c'est beaucoup plus simple.

Nous allons définir la notion de mesure sur une tribu. Mais les tribus sont très/trop complexes, pour pouvoir définir directement de manière explicite une mesure sur elle. Nous allons donc définir des mesures sur des ensembles moins complexe (comme un anneau, voir une algèbre une algèbre) puis l'étendre à la tribu. Par exemple la mesure de Lebesgue (voir page 15).

16.7.1 Application additive d'ensemble

Définition 16.83. *Soient E un ensemble, $\mathcal{C}$ un anneau d'ensemble sur E et F un ensemble muni d'une loi additive (groupe, e.v., ...).*
*On appelle **application additive d'ensemble** toute application $\mu:\mathcal{C}\to F$ satisfaisant l'axiome : $\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)$, si $A\cap B=\varnothing$.*

Remarque 16.84. En pratique $F=\bar{\mathbb{R}}_+,\mathbb{R},\bar{\mathbb{R}},\mathbb{C}$.

Proposition 16.85. *Posons $F=\bar{\mathbb{R}}_+$. Hypothèses.*

1. *$\mu(\varnothing)=0$ ou $\mu(A)=+\infty, \forall A\in\mathcal{C}$. (le deuxième cas conduit à une situation triviale, on pourra donc dans les définitions suivantes imposer $\mu(\varnothing)=0$ ou $\exists A\in\mathcal{C};\mu(A)\neq+\infty$ i.e. μ non identiquement infinie).*
2. *$(A\subset B)\Rightarrow(\mu(A)\leqslant\mu(B))$. (monotonie-croissante).*
3. *$(A\subset B \text{ et } \mu(A)<+\infty)\Rightarrow(\mu(B-A)\leqslant\mu(B)-\mu(A))$.*
4. *Pour toute réunion finie $\bigcup_{i=1}^n A_i$ d'éléments $\mathcal{C}$,*
   - *Si ces éléments sont 2 à 2 disjoints $A_i\cap A_j=\varnothing$, $\forall i\neq j\in\{1,\ ...n\}$ on a $\mu\big(\bigcup_{i=1}^n A_i\big)=\sum_{i=1}^n\mu(A_i)$ (additivité finie).*
   - *Autrement $\mu\big(\bigcup_{i=1}^n A_i\big)\leqslant\sum_{i=1}^n\mu(A_i)$ (sous-additivité).*

16.7.2 Application σ-additive d'ensemble

Définition 16.86. *Soient E un ensemble, $\mathcal{C}$ un anneau d'ensemble sur E et F un ensemble topologique muni d'une loi additive (groupe, e.v., ...).*
*On appelle **application σ-additive d'ensemble** toute application $\mu:\mathcal{C}\to F$ telle que : pour toute suite $(A_i)_{i\geqslant1}$ d'éléments disjoints de $\mathcal{A}$ ($A_i\cap A_j=\varnothing$ si $i\neq j$) et telle que $\bigcup_{i=1}^\infty A_i\in\mathcal{A}$.*
On a : $\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i\Big)=\sum_{i=1}^{+\infty}\mu(A_i)$ (σ-additivité).

Remarque 16.87. Les propositions précédentes restent valables.

Proposition 16.88. *Posons $F=\bar{\mathbb{R}}_+$. Soit une suite d'élément de $\mathcal{A}$ telle que $\bigcup_{i=1}^\infty A_i\in\mathcal{A}$. On a alors $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)$ (σ-sous-additive).*

16.7.3 Mesure sur un anneau d'ensemble

Définition 16.89. *Soient E un ensemble, $\mathcal{C}$ un anneau d'ensemble sur E.*

On appelle ***mesure*** *toute application* $\mu: \mathcal{C} \to \bar{\mathbb{R}}_+, \mathbb{R}, \bar{\mathbb{R}}, \mathbb{C}$ *telle que :*

- $\mu(\varnothing) = 0$
- *et* μ *σ-additive : pour toute suite* $(A_i)_{i\geqslant 1}$ *d'éléments disjoints de* $\mathcal{A}$ *(*$A_i \cap A_j = \varnothing$ *si* $i \neq j$*) et telle que* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{C}$.
  On a : $\mu\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ *(σ-additivité).*

Remarque 16.90. Suivant l'ensemble des valeurs on a :

μ est une mesure	si l'ensemble de valeur est
positive	$\bar{\mathbb{R}}_+$
réelle	$\mathbb{R}$
réelle positive finie	$\mathbb{R}_+$
signée ou réelle généralisée	$\bar{\mathbb{R}}$
complexe	$\mathbb{C}$

Définition 16.91. *Une mesure sur* $\mathcal{C}$ *est dite* ***bornée ou finie*** *si et seulement si* $\exists M \in \mathbb{R}^+; \forall A \in \mathcal{C}; |\mu(A)| < M$*, est-ce équivalent à* $|\mu(\mathcal{C})| < +\infty$ *? oui ! (évident) !*

Définition 16.92. *Une mesure sur* $\mathcal{C}$ *est appelée* ***probabilité*** *si et seulement si* $|\mu(\mathcal{C})| < 1$

Définition 16.93. μ *est dite* ***σ-bornée ou σ-finie*** *si et seulement si* $\exists (A_i)_{i\geqslant 1}$ *une suite d'éléments de* $\mathcal{A}$ *telle que :*

i. $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ *«*$(A_i)_{i\geqslant 1}$ *recouvre* E*»*

ii. $\mu(A_i) < +\infty$

Proposition 16.94. *Soit* μ *une mesure. Si* μ *est bornée alors* μ *est σ-bornée.*

Exemple 16.95.

1. Soit $E = \{1, ..., n\}$, $n \geqslant 1$, n fixé et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(E)$.
   l'application μ: $\left|\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \to & \mathbb{R}^+ \\ A & \mapsto & \mathrm{card}(A) \end{array}\right.$ est une mesure bornée.
2. Soit $E = \mathbb{N}$ et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
   l'application μ: $\left|\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \to & \overline{\mathbb{R}^+} \\ A & \mapsto & \mathrm{card}(A) \end{array}\right.$ est une mesure σ-bornée.
3. Soit $E = \mathbb{R}$ et $\mathcal{A} = \mathcal{A}_4$.
   l'application μ: $\left|\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_4 & \to & \overline{\mathbb{R}^+} \\ A & \mapsto & \mu(A) \end{array}\right.$ définie par :
   i. $\mu(A) = +\infty$ si A contient un intervalle de la forme $]b; +\infty[$ ou $]-\infty; a]$,
   ii. $\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$ si $A = \bigcup_{i=1}^{n}]a_i; b_i[$
   μ est une mesure σ-bornée.
4. Rajouter page 15, calcul intégral de Buchwalter.
5. L'application $\delta_x: A \mapsto \mathbb{1}_A(x)$ est appelée mesure de Dirac au point x.
6. Soit E un ensemble quelconque, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(E)$, $n \geqslant 1$ un nombre entier fixé, $(\alpha_i)_{i=1,...n}$ une suite finie d'élément de $\mathbb{R}^+$ et $(x_i)_{i=1,...n}$ une suite finie de point de E.
   l'application μ: $\left|\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \to & \mathbb{R}^+ \\ A & \mapsto & \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_A(x_i) \end{array}\right.$ est une mesure positive et bornée.

16.7.4 Mesures définies sur une algèbre

Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable.

Théorème 16.96. *Soit μ une mesure définie sur une algèbre $\mathcal{A}$ d'un ensemble E.*
μ est σ-finie $\Leftrightarrow$ $\mu(E) < +\infty$.

Théorème 16.97. *Soit $\mu\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ une mesure définie sur une algèbre $\mathcal{A}$ et $(A_i)_{i\geqslant 1}$ une suite croissante d'élément de $\mathcal{A}$ convergent vers un ensemble $A \in \mathcal{A}$. On a alors $\lim_{i\to+\infty} \mu(A_i) = \mu(A)$.*

Théorème 16.98. *Soit $\mu\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ une mesure définie sur une algèbre $\mathcal{A}$ et $(A_i)_{i\geqslant 1}$ une suite décroissante d'élément de $\mathcal{A}$ convergent vers un ensemble $A \in \mathcal{A}$. Si de plus $\exists i_0$; $\mu(A_{i_0}) < +\infty$, on a alors $\lim_{i\to+\infty} \mu(A_i) = \mu(A)$.*

16.7.5 Mesures définies sur une tribu

Remarque 16.99. Comme $\mathcal{A}$ est une tribu, on n'est plus obligé de s'assurer dans la définition de la mesure que pour la σ-additivité on a bien : $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$. On obtient la C.N.S. (qui pourrait servir de définition) suivante :

Théorème 16.100. *Soit $\mu\colon \mathcal{T} \to \bar{\mathbb{R}}^+$ une mesure définie sur une tribu $\mathcal{T} = \sigma(\mathcal{A})$ engendrée par une algèbre $\mathcal{A}$.*
Si il existe une suite $(A_i)_{i\geqslant 1}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que :

i. $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$,

ii. $\mu(A_i) < +\infty$.

Alors $\forall A \in \mathcal{T}$ et $\varepsilon > 0$ fixé, il existe un ensemble $B(\varepsilon) \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A \Delta B(\varepsilon)) \leqslant \varepsilon$.

Théorème 16.101. *Soit μ, $\mu'\colon \mathcal{T} \to \bar{\mathbb{R}}^+$ 2 mesures définies sur une tribu $\mathcal{T} = \sigma(\mathcal{A})$ engendrée par une algèbre $\mathcal{A}$.*
Si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. *$\mu(A) = \mu'(A), \forall A \in \mathcal{A}$,*
2. *il existe une suite $(A_i)_{i\geqslant 1}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que :*
   i. $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$,
   ii. $\mu(A_i) = \mu'(A_i) < +\infty, \forall i \geqslant 1$.

Alors $\mu(A) = \mu'(A), \forall A \in \mathcal{T}$.

Remarque 16.102. On vient de montrer qu'une mesure définie naturellement sur une algèbre admet au plus 1 prolongement à la tribu engendrée. Ainsi si le prolongement existe il est unique. Reste à prouver qu'il en existe effectivement une ! Cette construction est faite à l'aide de la notion de mesure extérieure.

16.7.6 Espace mesuré

Définition 16.103. *Soit E un ensemble, $\mathcal{S}$ un σ-anneau/tribu et μ une mesure positive.*
On appelle espace mesuré/probabilisé le triplet $(E,\mathcal{S},\mu)$.

16.8 Mesures extérieures, ensemble négligeable

C'est une notion indépendante ! qui peut se comporter comme une mesure dans certains cas précis. Comme on ne dispose pas de mesure sur une tribu, on va étendre la mesure définie ? On part d'une mesure connue sur des ensembles simples pour l'étendre le plus possible !

16.8.1 Mesure extérieure

Définition 16.104. *Soit E un ensemble quelconque.*

On appelle ***mesure extérieure*** *toute application $\mu\colon \mathcal{P}(E) \to \bar{\mathbb{R}}^+$ vérifiant les axiomes suivants :*

1. $\mu(\varnothing) = 0$,
2. $(A \subset B) \Rightarrow (\mu(A) \leqslant \mu(B))$, $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$ *(monotonie-croissante).*
3. $\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{+\infty} \mu^*(A_i)$, $\forall A_i \in \mathcal{P}(E)$ *(σ-sous additivité), la mesure extérieure d'une somme dénombrable et plus petite que la somme dénombrable des mesures extérieures.*

Exemple 16.105. *La mesure extérieure associée à une mesure (notion définie dans la section suivante) est une mesure extérieure.*

Remarque 16.106.

1. *Attention, l'appellation mesure extérieure est un abus de vocabulaire puique μ^* n'est pas une mesure (elle n'est pas σ-additive mais seulement σ-sous-additive).*
2. *Par contre, si la mesure extérieure est additive alors elle est une mesure positive.*

16.8.2 Mesure extérieure associée à une mesure et ensemble négligeable

Définition 16.107. *Soit $\mu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$ une mesure σ-bornée définie sur un anneau/algèbre/tribu $\mathcal{A}$ d'un ensemble E.*

On appelle ***mesure extérieure associée à μ*** *l'application :* $\mu^*\colon \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \bar{\mathbb{R}}^+ \\ A & \mapsto & \mu^*(A) \end{array} \right.$ *telle que :*

- *Si $\mathcal{A}$ est un anneau*
$$\mu^*(A) = \begin{cases} +\infty, \text{ si } E \text{ ne peut pas être recouvert par une suite d'éléments de } \mathcal{A} \\ \inf\Big(\Big\{\sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i); A \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i; A_{i=1,\dots n} \in \mathcal{A}\Big\}\Big), \text{ sinon} \end{cases}$$
- *Si $\mathcal{A}$ est une algèbre,*
$$\mu^*(A) = \inf\Big(\Big\{\sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i); A \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i; A_{i=1,\dots n} \in \mathcal{A}\Big\}\Big)$$
C'est la borne inférieure des sommes des mesures des recouvrements de A par des éléments de l'algèbre.
- *Si $\mathcal{A}$ est une tribu, on a plus simplement*
$\mu^*(A) = \inf(\{\mu(B); A \subset B, B \in \mathcal{A}\})$
C'est la borne inférieure de toutes les mesures des ensembles de la tribu contenant A.

Proposition 16.108.

1. $\mu^*(\varnothing) = 0$,
2. $(A \subset B) \Rightarrow (\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B))$, $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$ *(monotonie-croissante).*
3. $\mu^*\Big(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{+\infty} \mu^*(A_i)$, $\forall A_i \in \mathcal{P}(E)$ *(σ-sous additivité).*

Autrement dit, la mesure extérieure associée une mesure est une mesure extérieure.

Remarque 16.109. Comme précédement pour la mesure extérieure, la mesure extérieure associée à une mesure n'est pas d'une manière générale une mesure.

Définition 16.110. *On dit qu'un ensemble $A \in \mathcal{P}(E)$ est* ***μ-négligeable*** *si et seulement si $\mu^*(A) = 0$. Autrement dit il est contenu*

Remarque 16.111. Dans le cas d'une tribu A est μ-négligeable si et seulement si il est contenu dans une ensemble de mesure nulle. ?????

Proposition 16.112. *Soit μ^* la mesure extérieure associée à une mesure μ σ-bornée définie sur une algèbre $\mathcal{A}$ d'un ensemble E.*

1. $\mu^*(A)=\mu(A)$, $\forall A\in\mathcal{A}$, " *la mesure extérieure et sa mesure associée coïncident sur* $\mathcal{A}$ "
2. $(\mu^*(A)=0)\Rightarrow(\exists B\supset A;\mu^*(B)=0)$, *autrement dit "A μ-négligeable $\Rightarrow$ A est contenu dans un ensemble B μ-négligeable",*
3. $\forall A_i\in\mathcal{P}(E)$, $i\geqslant 1$ *tels que* $\mu^*(A_i)$ *alors* $\mu^*\Big(\bigcup_{i=1}^{+\infty}A_i\Big)=0$.

Rajouter la définition d'un espace complet ici, livre de JP. Marco Mathématique pour la licence.

16.8.3 Ensembles μ-mesurables (au sens de Carathéodory)

Théorème 16.113. *Soit μ^* la mesure extérieure associée à une mesure μ bornée définie sur une algèbre $\mathcal{A}$ d'un ensemble E.*

On note $\mathcal{M}=\{A\in\mathcal{P}(E);\mu^*(A)+\mu^*(A^c)=\mu(E)\}$ et on a alors :

1. $\mathcal{M}=\{A\in\mathcal{P}(E);A=B\cup N;B\in\sigma(\mathcal{A})\text{ et }\mu^*(N)=0\}$
2. *La classe $\mathcal{M}$ est une tribu et $\mathcal{M}\supset\sigma(\mathcal{A})$.*
3. *l'application* μ^*: $\left|\begin{array}{ccc}\mathcal{M}&\to&\bar{\mathbb{R}}^+\\A&\mapsto&\mu^*(A)\end{array}\right.$ *est une mesure bornée sur $\mathcal{M}$, c'est l'unique mesure bornée qui coïncide avec μ sur $\mathcal{A}$.*

Théorème 16.114. *Soit μ^* la mesure extérieure associée à une mesure μ σ-bornée définie sur une algèbre $\mathcal{A}$ d'un ensemble E.*

On note $\mathcal{M}=\{A\in\mathcal{P}(E);\mu^*(A_i\cap A)+\mu^*(A_i\backslash A)=\mu(A_i),\forall i\geqslant 1\}$ et on a alors :

1. *La classe $\mathcal{M}$ ne dépend pas du choix de la suite $(A_i)_{i\geqslant 1}$ d'éléments de $\mathcal{A}$,*
2. $\mathcal{M}=\{A\in\mathcal{P}(E);A=B\cup N;B\in\sigma(\mathcal{A})\text{ et }\mu^*(N)=0\}$
   $\mathcal{M}=\{A\in\mathcal{P}(E);A=B\cup N;B\in\sigma(\mathcal{A})\text{ et }\mu^*(N)=0\text{ et }B\cap N=\varnothing\}$,
3. *La classe $\mathcal{M}$ est une tribu et $\mathcal{M}\supset\sigma(\mathcal{A})$.*
4. *l'application* μ^*: $\left|\begin{array}{ccc}\mathcal{M}&\to&\bar{\mathbb{R}}^+\\A&\mapsto&\mu^*(A)\end{array}\right.$ *est une mesure σ-bornée sur $\mathcal{M}$, c'est l'unique mesure σ-bornée qui coïncide avec μ sur $\mathcal{A}$.*

Définition 16.115. *Les éléments de $\mathcal{M}$ sont appelés* ***ensembles μ-mesurables***.

Remarque 16.116. Attention à ne pas confondre avec les ensembles $\mathcal{T}$-mesurable ou $\mathcal{T}$ est un σ-anneau ou une tribu.

16.8.4 Mesure canonique de Lebesgue

Lire livre d'André Gramain Intégration p. 111,...,117 (en suspend)

Appliquons ce que nous venons de voir à la mesure de longueur $\mu:\mathcal{A}_4\to\bar{\mathbb{R}}^+$.

Définition 16.117. *Soit une mesure définie sur une algèbre engendrant la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ (par exemple $\mu:\mathcal{A}_4\to\bar{\mathbb{R}}^+$), on appelle* ***mesure canonique de Lebesgue*** *et on note μ_l (dx ou encore λ), la mesure extérieure associée à μ. Autrement dit c'est l'unique mesure prolongeant μ. Les ensembles $A\in\mathcal{M}$ sont dits mesurables.*

Remarque 16.118. $\mathcal{M}\neq\mathcal{P}(E)$.

Comment utilise-t-on la mesure ainsi construite ?
Propriété de la mesure de Lebesgue :
Voir livre André Gramain page 120,

Trouver la démonstration de : $\int f(x+a)dx = \int f(a-x)dx = \int f(x)dx$ comme annoncée par Buchwalter page 115 Calcul Intégral. (Démonstration n'utilisant pas le théorème de changement de variable). Lire LIvre Daniel Revuz page 80, + d'autre propriété sur Intégration par rapport à la mesure de Lebesgue. Créer ce chapitre.

16.8.5 Propriété vraie presque partout

Définition 16.119. *Une propriété dépendant d'un point x est dite μ-p.p. si et seulement si $\{x; \neg P(x)\}$ est μ-négligeable.*

Exemple 16.120.

- $f \leqslant g, \mu$-p.p. $\Leftrightarrow [f > g]$ est μ-négligeable, définit sur un espace ordonné.
- $f = g, \mu$-p.p. $\Leftrightarrow [f \neq g]$ est μ-négligeable, défini sur toute partie de E^{Ω}.

16.9 Intégrale

Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace probabilisable, on désignera par :

- $\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{T})$ l'ensemble des applications mesurables de $(E, \mathcal{T}) \to (\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$
- $\bar{\mathcal{L}}_+(\mathcal{T})$ l'ensemble des applications mesurables de $(E, \mathcal{T}) \to (\bar{\mathbb{R}}^+, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}^+))$
- $\mathcal{E}_+(\mathcal{T})$ l'ensemble des applications positives et étagées sur $\mathcal{T}$.

16.9.1 Intégrale supérieure sur un espace probabilisable

Définition 16.121.
On appelle intégrale (supérieure) sur $(\Omega, \mathcal{T})$ toute application $L: \bar{\mathcal{L}}_+(\mathcal{T}) \to [0, +\infty]$ telle que :

- $L(0) = 0$,
- $L\Big(\sum_{n\geqslant 1} f_n\Big) = \sum_{n\geqslant 1} L(f_n)$, *$(f_n)$ est une suite d'application de $\bar{\mathcal{L}}_+$. (Convergence Monotone pour les séries)*

Théorème 16.122. *(de Beppo Levi) Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable.*
L'application $L: \bar{\mathcal{L}}_+(\mathcal{T}) \to [0, +\infty]$ est une intégrale supérieure sur $(\Omega, \mathcal{T})$ si et seulement si :

- $L(0) = 0$,
- $L(f+g) = L(f) + L(g)$.

Théorème 16.123. *(de Beppo Levi) Soit (f_n) une suite croissante de fonctions mesurables positives. $(f_n \uparrow f) \Rightarrow (L(f_n) \uparrow L(f))$.*

Remarque 16.124. C'est un théorème de convergence monotone pour les suites de fonctions mesurables positives. Le théorème de Beppo Levi peut aussi s'écrire $L(\sup(f_n)) = \sup(L(f_n))$. Attention : ne concerne que les fonction mesurables positives, pour les fonctions mesurables de signe quelconque, on dispose d'un autre théorème de Beppo Levi où il faut ajouter des hypothèses plus fortes : f_n suite de fonctions μ-intégrables.

Proposition 16.125. *Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable.*
Soit L une intégrale supérieure sur $(\Omega, \mathcal{T})$ alors

- $\forall \lambda \geqslant 0, L(\lambda f) = \lambda L(f)$,
- $\forall f, g; (f \leqslant g) \Rightarrow (L(f) \leqslant L(g))$.

Remarque 16.126. Compte tenu des propriétés précédentes une intégrale supérieure est une application linéaire.

Proposition 16.127. $\int_{\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j} f d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_j} f d\mu$

Autrement dit Livre Genet page 107.

16.9.2 Mesure positive définie par une intégrale supérieure

Théorème 16.128. *(Fondamental) Pour toute fonction positive l'application* $v_f : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \to & \bar{\mathbb{R}}^+ \\ A & \mapsto & \int_A^* f d\mu \end{array} \right.$ *est une mesure positive sur* $\mathcal{B}$.

Définition 16.129. *Soit L une intégrale supérieure sur $(\Omega, \mathcal{T})$.*
On appelle mesure définie relativement à L et on note μ_L l'application
$\mu_L : \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \\ A & \mapsto & L(\mathbb{1}_A) \end{array} \right.$.

Proposition 16.130. *L'application μ_L est une mesure.*

Remarque 16.131. On vient d'établir que toute intégrale sup. permet de définir une mesure.

16.9.3 Intégrale définie par une mesure positive

On fera attention au fait que ces définitions et ces propriétés sont établies pour des fonctions positives.

16.9.3.1 Pour une fonction étagée

Définition 16.132. *Soit μ une mesure sur une tribu $\mathcal{T}$ de Ω. f une application étagée positive telle que $f = \sum \lambda_k \mathbb{1}_{A_k}$.*
On appelle intégrale définie par rapport ou associée à μ l'application :
$L_\mu : \left| \begin{array}{ccc} \bar{\mathcal{E}}_+(\mathcal{T}) & \to & [0, +\infty] \\ f & \mapsto & \sum \lambda_k \mu(A_k) \end{array} \right.$ *avec pour convention* $0 \times (+\infty) = +\infty \times 0 = 0$
$L_\mu(f)$ est appelée intégrale de f par rapport à μ. On la note $\int f d\mu$ ou $\int f(x) d\mu(x)$.

Remarque 16.133.

1. L'intégrale définie d'une fonction étagée par rapport ou associée à μ est une intégrale.
2. Si $f = \mathbb{1}_A$, on a $L_\mu(\mathbb{1}_A) = \mu(A)$ i.e. $\int \mathbb{1}_A d\mu = \mu(A)$.
3. On notera $\int_A f d\mu$ ou $\int_A f(x) d\mu(x)$ l'intégrale $\int \mathbb{1}_A f d\mu$.
4. On vient de définir que toute mesure positive permet de définir une intégrale d'une fonction étagée.

16.9.3.2 Pour une fonction mesurable

Définition 16.134. *Soit μ une mesure sur une tribu $\mathcal{T}$ de Ω.*
Soit f une application mesurable positive.
On appelle intégrale de f définie par rapport ou associée à μ l'application :
$L_\mu : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{L}_+(\mathcal{T}) & \to & [0, +\infty] \\ f & \mapsto & \sup_{g \in \mathcal{E}_+(\mathcal{T}); g \leqslant f} (L_\mu(g)) \end{array} \right.$
$L_\mu(f)$ est appelée intégrale de f par rapport à μ. On la note $\int f d\mu$ ou $\int f(x) d\mu(x)$

Remarque 16.135.

1. Soit f une application mesurable quelconque $\int f d\mu = \int f^+ - f^- d\mu$

2. L'intégrale d'une fonction mesurable définie par rapport ou associée à μ est une intégrale (rajouter les propriétés et conclure).
3. Si $f = \mathbb{1}_A$, on a $L_\mu(\mathbb{1}_A) = \mu(A)$ i.e. $\int \mathbb{1}_A \, d\mu = \mu(A)$.
4. On notera $\int_A f d\mu$ ou $\int_A f(x) d\mu(x)$ l'intégrale $\int \mathbb{1}_A \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mu(A_k \cap A)$.
5. On vient de définir que toute mesure positive permet de définir une intégrale d'une fonction étagée.

16.9.3.3 Propriétés générales

Proposition 16.136. *(Lemme de Fatou) Soit (f_n) une suite quelconque de $\bar{\mathcal{L}}_+$,*

- *alors, $\int \lim_{\overline{n\to\infty}} (f_n) d\mu \leqslant \lim_{\overline{n\to\infty}} \int f_n d\mu$.*
- *en particulier, si $f_n \to f$ et si $\int f_n d\mu \leqslant M$ alors $\int f d\mu \leqslant M$.*

Théorème 16.137. *Soit $f \in \bar{\mathcal{L}}_+$, alors : $(\int f d\mu = 0) \Leftrightarrow f = 0$ μ.p.p.*

Remarque 16.138. Attention cette propriété est valable uniquement pour une fonction mesurable positive ! (i.e. à valeur dans $\mathbb{R}^+$)

Proposition 16.139. *Soit $f, g \in \bar{\mathcal{L}}_+$ et une suite (f_n) une suite de $\bar{\mathcal{L}}_+$, alors*

- *$(f \leqslant g)$ μ.p.p. $\Rightarrow$ $(\int f d\mu \leqslant \int g d\mu)$,*
- *$(f = g)$ μ.p.p. $\Rightarrow$ $(\int f d\mu = \int g d\mu)$,*
- *$(\int f d\mu < +\infty) \Rightarrow (f < +\infty)$ μ.p.p.*
- *Si (f_n) est croissante et $\int f_n d\mu$ bornée dans $\mathbb{R}$ alors (f_n) est μ.p.p. convergente dans $\mathbb{R}$.*
- *Si (f_n) est quelconque et si $\sum (\int f_n d\mu)$ convergente alors $\sum f_n$ est μ.p.p. convergente dans $\mathbb{R}$ et $f_n \to 0$ μ.p.p..*

16.9.3.4 Relation entre mesure et intégrale

Théorème 16.140. *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace mesuré. Il existe une bijection entre l'ensemble des mesures positives sur $\mathcal{T}$ et l'ensemble des intégrales sur $(E, \mathcal{T})$.*

Exemple 16.141.

Mesure	associée	Intégrale
Mesure de Dirac δ_a $a \in E; \mathcal{T} = \mathcal{P}(E)$ $\delta_a(A) = \mathbb{1}_A(a)$	$\to$	$\int f d\delta_a = f(A)$
Mesure discrète (a_n) suite de E, (α_n) suite positive $\mu = \sum \alpha_k \delta_{a_k}$	$\to$	$\int f d\mu = \alpha_k f(a_k)$
Mesure de dénombrement $E = \mathbb{N}, \mathcal{T} = \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu = \Sigma\delta_k$ $\mu(A) = \text{card}(A)$ si A fini, $+\infty$ sinon	$\to$	alors $\bar{\mathcal{L}}_+(\mathcal{T})$ est l'ensemble des suites à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}^+$ $\int x_n \, d\mu = \sum x_n$
Mesure image $\nu(A) = \mu(f^{-1}(A))$	$\to$	
Mesure à densité $\nu(A) = \int_A h d\mu$	$\leftarrow$	

Chapitre 17
Espace $\mathcal{L}^1$ des fonctions μ-intégrables

Note 17.1. On étudie maintenant les ensembles de fonctions pour lesquelles l'intégrale est finie, puis celle dont l'intégrale d'une de ses puissances est fine. Les problèmes apparaissent lors des opérations infinies sur les intégrales qui même si leurs valeurs deviennent de plus en plus petites ne donnent pas toujours des résultats finies. Par exemple $\lim_{n\to+\infty} \int \frac{1}{n(t)}\mathrm{dt}$ est finie. Ces ensembles possèdent des structures que nous mettrons en évidences (espace vectoriel, espace vectoriel normé, espace de Hilbert ..) ainsi que des théorèmes de convergences très pratiques. On dispose ainsi d'outils qui permettent d'affirmer que les calculs faisant intervenir des intégrales donneront des résultats finis.

17.1 Fonction μ-intégrable et espace $\mathcal{L}^1$

17.1.1 Définition

Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace probabilisable, on désignera par :

- $\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{T})$ l'ensemble des applications mesurables de $(E, \mathcal{T}) \to (\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$
- $\bar{\mathcal{E}}(\mathcal{T})$ l'ensemble des applications étagées sur $\mathcal{T}$.
- $f^+ = \sup(0, f)$ et $f^- = -\inf(0, f)$.

Conventions :

Définition 17.2.

1. *Soit $f : E \to \bar{\mathbb{R}}^+$ une fonction mesurable réelle positive et μ une mesure.*
   - *On dit que f est **μ-intégrable** par rapport à μ si et seulement si :* $\int f d\mu < +\infty$.
   - *Dans ce cas le nombre réel noté $\int f d\mu$ est appelé intégrale (de Lebesgue abstraite) de f pour la mesure μ.*
2. *Soit $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$ une fonction mesurable réelle et μ une mesure.*
   - *On dit que f est **μ-intégrable** par rapport à μ si et seulement si :* f^+ *et* f^- *sont μ-intégrables i.e.* $\int f^+ d\mu < +\infty$ *et* $\int f^- d\mu < +\infty$.
   - *Dans ce cas le nombre réel noté $\int f d\mu$ tel que $\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$ est appelé intégrale (de Lebesgue abstraite) de f pour la mesure μ.*
3. *Soit $f : E \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable complexe et μ une mesure.*
   - *On dit que f est **μ-intégrable** par rapport à μ si et seulement si :* *Im(f) et Re(f) μ-intégrables i.e.* $\int |\mathrm{Re}(f)| d\mu$ *et* $\int |\mathrm{Im}(f)| d\mu$
   - *Dans ce cas le nombre réel noté $\int f d\mu$ tel que $\int f d\mu = \int \mathrm{Re}(f) d\mu + i \int \mathrm{Im}(f) d\mu$ est appelé intégrale (de Lebesgue abstraite) de f pour la mesure μ.*

Remarque 17.3.

1. Pour montrer qu'une application est μ-intégrable bien s'assurer que cette fonction est mesurable, l'intégrale n'étant définie que pour ce type de fonction !
2. Dans la définition précédente pour une fonction réelle ou complexe écrire : (f^+, f^-) ou $(\mathrm{Im}(f), \mathrm{Re}(f))$ μ-intégrables équivaut à écrire $\int |f| d\mu < +\infty$

3. On a pris une fonction $f: E \to [-\infty; +\infty]$, on peut donc se retouver avec des opérations du type : $+\infty + (-\infty)$. Or on montre (voir cours de licence p. retrouver la page et mettre cette propriété en théorème) que l'ensemble des points de valeur infinie pour une fonction μ-intégrable est de mesure nulle, or par convention on a posé : $0 \times (+\infty) = 0$, on peut donc également par convention décider que $+\infty + (-\infty) = 0$. En fait on aurait pu donner n'importe qu'elle valeur à cette opération : 26 ou même $+\infty$, on choisit la plus simple. Autrement dit, pour une fonction f μ-intégrable l'ensemble des points de mesure infinie est invisible , ils n'influent pas le résultat.
4. On désignera par $\mathcal{L}_1(E, \mathcal{T}, \mu, \mathbb{K})$ ou $\mathcal{L}_1(\mu)$ ou $\mathcal{L}_1$ ou $\mathcal{L}_1(\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions μ-intégrables ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
5. Si μ est la mesure de Lebesgue, on dit que f est Lebesgue intégrable.

17.1.2 Propriétés

Proposition 17.4. *Soient (E, μ) un espace mesuré et h, g deux fonctions : $E \to \bar{\mathbb{R}}^+$ telles que : $\int h d\mu < +\infty$ et $\int g d\mu < +\infty$*
Alors : $\int (h-g) d\mu = \int h d\mu - \int g d\mu$.

Proposition 17.5.

1. *Toute fonction mesurable μ.p.p.-nulle est μ-intégrable et d'intégrale nulle.*
2. *Si f est une fonction mesurable telle qu'il existe une fonction g μ-intégrable avec $|f| \leqslant g$ alors : f est μ-intégrable.*
3. *Si f est μ-intégrable et g mesurable bornée, alors $f \times g$ est μ-intégrable.*

Proposition 17.6.

1. *$\mathcal{L}_1$ est un sous-espace vectoriel réticulé de l'algèbre $\mathcal{L}$.*
2. *(Inégalité de la moyenne) L'intégrale de Lebesgue abs. : $f \mapsto \int f d\mu$ est une forme linéaire positive sur $\mathcal{L}_1$. En particulier si $f \in \mathcal{L}_1$, on a $|\int f d\mu| \leqslant \int |f| d\mu$*

17.1.3 Fonction localement μ-intégrable

Définition 17.7. *Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique séparé localement compact, μ une mesure sur E, définie sur une tribu $\mathcal{T}$ contenant la tribu borélienne $T(\mathcal{O})$ et $f: E \to \mathbb{C}$ une application mesurable. On dit que f est* ***localement μ-intégrable*** *si et seulement si :*
$\forall x \in E, \exists V$ un voisinage de x tel que $f \times \mathbb{1}_V$ soit μ-intégrable.

Remarque 17.8.

1. f est localement μ-intégrable $\Leftrightarrow$ pour tout compact K, $f \times \mathbb{1}_K$ est μ-intégrable.
2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, une application mesurable $f: E \to \mathbb{C}$ est localement λ-intégrable $\Leftrightarrow$ f est λ-intégrable sur tout segment $[a, b]$ inclus dans I.

17.2 Théorèmes de convergence dominée

17.2.1 ... pour une suite définie par $\left(\int f_n d\mu\right)_{n \in \mathbb{N}}$

Nous sommes ici dans $\mathcal{L}^1$ et nous travaillons sur des fonctions de signe quelconque. Il existe un autre théorème de Beppo-Levi pour les fonctions mesurables positives.

Théorème 17.9. *(de convergence monotone de Beppo Levi) Soit (f_n) une suite croissante de fonctions $f_n: U \to \mathbb{R}$ μ-intégrables sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et telle que :*

$\sup_{n\geqslant 1}\int_U f_n d\mu < +\infty$ *(la suite des intégrales de* f_n *est majorée) alors*

1. *La suite* (f_n) *converge en moyenne vers une fonction* f *finie pour presque tout* x *et* f *est intégrable :* $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \sup_{n\geqslant 1}(f_n(x)) = f(x) \overset{p.p.}{<} +\infty$, *(*$f \in \mathcal{L}^1$*) de plus* $\lim_{n\to+\infty}\int |f-f_n|d\mu \to 0$,
2. *La suite* $\left(\int f_n d\mu\right)_n$ *converge vers* $\int f d\mu$ *i.e.* $\lim_{n\to+\infty}\int (f_n)d\mu = \int (\lim_{n\to+\infty} f_n)d\mu$.

Démonstration. Enoncé d'après le cours ARN Licence de Math 2001-2001 M.Fack, polycopié page (12). □

Remarque 17.10. Convergence en moyenne d'une suite de fonctions : convergence dans $\mathcal{L}^1$ des fonctions réelles Lebesgue intégrables au sens de la semi-norme de la convergence moyenne i.e. la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ de fonctions de $\mathcal{L}^1$ converge en moyenne vers $f \in \mathcal{L}^1 \Leftrightarrow$ la suite générale $\int |f - f_n|d\mu$ converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Proposition 17.11. *(Théorème de convergence dominée de Lebesgue)*
Soit (f_n) *une suite de fonctions mesurables et la suite définie par* $(\int f_n d\mu)$. *On suppose que* (f_n) *vérifie les hypothèses suivantes :*

i. (f_n) *converge* μ*.p.p. vers une fonction mesurable* f.

ii. $\exists g \in \mathcal{L}^1(E,\mathcal{T},\mu); g\geqslant 0, |f_n|\leqslant g, \mu.p.p., \forall n)$.
Il existe une fonction positive μ*-intégrable* g *majorant en valeur absolue tous les termes de la suite et indépendante de l'indice de la suite presque partout.*
(condition de domination : existence d'une majorante μ*-intégrable)*
Alors f *est* μ*-intégrable,* $\int f_n d\mu$ *converge vers* $\int f d\mu$, *autrement dit,* $\int f d\mu < +\infty$, $\lim_{n\to+\infty}\int |f_n - f|d\mu = 0$ *et* $\lim_{n\to+\infty}\int f_n d\mu = \int f d\mu$.

17.2.2 ... pour une suite définie par $\left(\int \sum f_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Proposition 17.12. *(Théorème de convergence dominée pour les séries)*
Soit (f_n) *une suite de fonctions* μ*-intégrables telle que :* $\sum_{n\geqslant 1}(\int |f_n|d\mu) < +\infty$,
Alors la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ *est* μ*.p.p. absolument convergente dans* $\mathbb{R}$ *et* $\int \left(\sum_{n\geqslant 1} f_n\right)d\mu = \sum_{n\geqslant 1}(\int f_n\, d\mu)$.

17.2.3 ... pour une fonction définie par $x \mapsto \int_E f(x,t)d\mu(t)$

Problème : Intéressons-nous à la fonction définie par : $F: \left|\begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \int_E f(x,t)d\mu(t) \end{array}\right.$.

- Quand est-elle définie ?
- Sous quelles conditions peut-on écrire $\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in D}} \int_E f(x,\, t)d\mu(t) = \int_E \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\in D}} f(x,\, t)d\mu(t)$ i.e. converge-t-elle au voisinage d'un point x_0 ?
- Sous quelles conditions peut-on écrire $\frac{d}{dx}\int_E f(x,t)d\mu(t) = \int_E \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)d\mu(t)$ i.e. est-elle dérivable ?

Pour cela considérons la fonction $f: \left|\begin{array}{ccc} D\times E & \to & \mathbb{C} \\ (x,t) & \mapsto & f(x,t) \end{array}\right.$ et ses applications partielles associées, $f(\bullet, t)$, $f(x, \bullet)$. Par rapport à la valeur $F(x)$ et pour éviter toute confusion, nous dirons que la variable x est le paramètre et t la variable d'intégration puisque l'on intégre la fonction $f(x, \bullet)$ dont x est le paramètre. Enfin $f(\bullet,\, t)$ est l'application partielle définie par rapport au paramètre, $f(x,\, \bullet)$ l'application définie par rapport à la variable d'intégration que nous pourrons aussi noter f_p et f_i.

Rajouter l'introduction Buchwalter page 42.

17.2.3.1 Limite

Le théorème ci-dessous répond à ces deux questions.

Théorème 17.13. *(Théorème de convergence dominée)*
Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ *un espace mesuré,* T *un espace métrisable,* D *une partie de* T*, les applications* $f: \left| \begin{array}{ccc} D \times E & \to & \mathbb{C} \\ (x,t) & \mapsto & f(x,t) \end{array} \right.$, $F: \left| \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \int_E f(x,t)d\mu(t) \end{array} \right.$ *et* x_0 *un point adhérent de* D*. On suppose que* f *vérifie les hypothèses suivantes :*

1. $\forall x \in D$, $f(x,\bullet) \in \mathcal{L}^1(E,\mathcal{T},\mu)$. *(La fonction* F *est bien définie et finie)*
   l'application partielle définie par rapport à la variable d'intégration est μ*-intégrable.*
2. $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} f(\bullet,t) = \varphi$, μ*-p.p.*, $\varphi \in \mathcal{L}^1(E,\mathcal{T},\mu)$. *(*$\mathcal{L}^1$ *ou* $\mathcal{L}^0$*) ?*
   L'application partielle définie par rapport au paramètre converge μ*-p.p. vers une application mesurable* φ*.*
3. $\exists g \in \mathcal{L}^1(E,\mathcal{T},\mu); \forall t \in D, |f(x,\bullet)| \leqslant g$, μ*-p.p.*.
   La valeur absolue de l'application partielle définie par rapport à la variable d'intégration admet une dominante intégrable indépendante du paramètre.

Alors

- F *est définie et finie sur* D, φ *est* μ*-intégrable et* F *converge vers* $\int \varphi d\mu$ *en* x_0*.*
- *et* $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} F(t) = \int_E \varphi d\mu$ *i.e.*$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} \int_E f(x,t)d\mu(t) = \int_E \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} f(x,t)d\mu(t)$.

17.2.3.2 Continuité

Remarque 17.14. Ainsi, dans le cas particulier où le point $x_0 \in D$, le théorème précédent devient un théorème de continuité, la conclusion exprimant dans ce cas la continuité de F en x_0.

Enoncé de la C.N. de continuité dans le cas d'une fonction $f: I \times E \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

Théorème 17.15. *(Théorème de continuité)*
Soient $(E, \mathcal{T}, \mu)$ *un espace mesuré,* $I =]a;\ b[$; $a,\ b \in \bar{\mathbb{R}}$ *, les applications* $f: \left| \begin{array}{ccc} I \times E & \to & \mathbb{C} \\ (x,t) & \mapsto & f(x,t) \end{array} \right.$, $F: \left| \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \int_E f(x,t)d\mu(t) \end{array} \right.$ *et* t_0 *un point de* I*. On suppose que* f *vérifie les hypothèses suivantes :*

1. $\forall x \in I$, $f(x,\bullet) \in \mathcal{L}^1(E,\mathcal{T},\mu)$. *(La fonction* F *est bien définie et finie).*
   l'application partielle définie par rapport à la variable d'intégration est μ*-intégrable.*
2. $f(\bullet,t)$ *est continue,* $\lim_{x_0} f(\bullet,t) = f(x_0,t)$. *(Condition de continuité)*
   l'application partielle définie par rapport au paramètre est continue en x_0*.*
3. $\exists g \in \mathcal{L}^1(E,\mathcal{T},\mu); \forall x \in]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[, |f(x,\bullet)| \leqslant g$, μ*-p.p. (Condition de Domination).*
   La valeur absolue de l'application partielle définie par rapport à la variable d'intégration admet une dominante intégrable indépendante du paramètre.

Alors

- *l'application* F *est définie et continue au point* x_0*,*
- *i.e.*$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in I}} \int_E f(x,t)d\mu(t) = \int_E \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in I}} f(x,t)d\mu(t)$.

17.3 Théorème de dérivation pour une fonction définie par $x \mapsto \int_E f(x,t)d\mu(t)$

Soient $(E,\ \mathcal{T},\ \mu)$ *un espace mesuré,* I *un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$ *et les applications* f: $\left|\begin{array}{lll} I\times E & \to & \mathbb{C} \\ (x,t) & \mapsto & f(x,t)\end{array}\right.$, F: $\left|\begin{array}{lll} I & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \int_E f(x,t)d\mu(t)\end{array}\right.$. *On suppose que* f *vérifie les hypothèses suivantes :*

1. $\forall x\in I,\ f(x,\bullet)\in\mathcal{L}^1(E,\mathcal{T},\mu)$. *(La fonction* F *est bien définie et finie)*
   l'application partielle définie par rapport à la variable d'intégration est μ*-intégrable.*
2. $\frac{\partial f}{\partial x}$ *i.e.* $\frac{df(\bullet,t)}{dx}$ *existe* $\forall(x,t)\in I\times E$.
   la dérivée partielle de f *par rapport au paramètre existe.*
3. $\exists g\in\mathcal{L}^1(E,\mathcal{T},\mu);\forall x\in I,\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\leqslant g$ *sur* E.
   La valeur absolue de la dérivée partielle de f *par rapport au paramètre admet une dominante intégrable indépendante du paramètre.*

Alors

- *l'application :* F *est définie, finie, continue et dérivable sur* I
- *et* $\forall x\in I,\frac{d}{dx}\int_E f(x,t)d\mu(t)=\int_E\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)d\mu(t)$.

Rajouter remarque Buchwalter page 43-44.

Remarque 17.17. En passant sous le signe $\int$ la dérivée devient logiquement une dérivée partielle.

Rajouter : Intégrale convergente de Lebesgue voir livre d'intégration Méthode Hermann page 135.

Rajouter : Holomorphie page 44 Livre Buchwalter.

17.4 Relation entre l'intégrale de Lebesgue et l'intégrale ...

L'intégrale absolument convergente de Riemann est un intégrale de Lebesgue, l'intégrale semi-convergente de Riemann est un intégrale de Lebesgue convergente (traduire alors les critères de convergence)..

17.4.1 ... de Riemann sur $[a,b]\in\mathbb{C}$

Qu'est-ce qu'une fonction intégrable au sens de Riemmann du point de vue de la thoérie de la mesure ? En utilisant la notion de mesure, on peut obtenir une C.N.S. d'intégrabilité au sens de Riemann.

Théorème 17.18. *(CNS de Riemann-intégrabilité) Soit* $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ *une application bornée.*
f est intégrable au sens de Riemann si et seulement f est continue λ*-presque partout (c'est à dire que l'ensemble* D_f *des points de discontinuité est* λ*-négligeable).*

Proposition 17.19. *Soit* $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ *une application bornée.*
Si f est Riemann-intégrable, alors f est mesurable et λ*-Lebesgue-intégrable et :*
$\int_a^b f(x)\,dx=\int_{[a,b]} f d\lambda$.

Remarque 17.20. Concernant les autres intégrales (fonctions réglées et fonctions continues par morceaux) elles sont prolongées par l'intégrales de Riemann et l'on peut énoncer pour ces intégrales : si une fonction réglée ou une fonction continue par morceaux f est intégrable, alors elle est λ-intégrable et : $\int_a^b f(x)\,dx=\int_{[a,b]} f d\lambda$.

17.4.2 ... généralisée de Riemann sur $\underset{a\in\mathbb{R},b\in\overline{\mathbb{R}}}{[a,b[}\quad\underset{a\in\overline{\mathbb{R}},b\in\mathbb{R}}{]a,b]}\quad\underset{a\in\overline{\mathbb{R}},b\in\overline{\mathbb{R}}}{]a,b[}\quad a<b$

Attention ! Une intégrale généralisée n'est pas une intégrale, c'est la limite d'une fonction définie par une intégrale (voir sections précédentes sur l'intégrale de Riemann)

Pour décrire le lien entre l'intégrale de lebesgue et l'intégrale antérieure généralisée (ou impropre), il est utile de faire appel à l'intégrabilité locale :

Proposition 17.21. *Soit $f:[a,b[\to\mathbb{C}$ une application Riemann-intégrable sur tout segment $[a,m]$ inclus dans $[a,b[$. Alors :*

f est $\mathcal{L}$-mesurable et localement intégrable, de plus :

$\int_{[a,b[}|f|d\lambda=\lim_{t\to b^-}\int_a^t|f(x)|dx=\int_a^{b^-}|f(x)|dx,$

Remarque 17.22. On ne sait pas $\int_a^{b^-}|f(x)|dx$ est absolument convergente ou pas. Dans ce cas la valeur peut être finie ou infinie.

Théorème 17.23. *Soit $f:[a,b[\to\mathbb{C}$ une application Riemann-intégrable sur tout segment $[a,m]$ inclus dans $[a,b[$. Alors :*

f est λ-intégrable sur $[a,b[$ si et seulement si l'intégrale généralisée $\int_a^{b^-}f(x)dx$ est absolument convergente, et si c'est le cas : $\int_{[a,b[}fd\lambda=\lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx=\int_a^{b^-}f(x)dx$

On obtient des propriétés identiques pour les autres intervalles...

Remarque 17.24.

1. Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est Riemann-intégrable alors $|f|$ l'est également.
2. Attention ! Une fonction $f:I\to\mathbb{R}$ vérifiant :
   la fonction $f\mapsto(\mathcal{R})\int_\alpha^\beta fdx$, $\alpha\to a^+$, $\beta\to b^-$ est convergente dans $\mathbb{R}$
   n'est pas pour autant, intégrable au sens de Lebesgue. C'est le cas, par exemple de la fonction $f:x\mapsto\frac{\sin(x)}{x}$: $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x}dx=\frac{\pi}{2}$, mais $\int_{]0,+\infty[}\left|\frac{\sin(x)}{x}\right|d\lambda(x)=+\infty$.

17.5 Construction de mesures particulières et leur applications

17.5.1 Mesures définies par des densités

17.5.1.1 Définitions

Définition 17.25. *Soit $f:(E,\mathcal{T},\mu)\to\bar{\mathbb{R}}^+$ une application mesurable positive.*

*On appelle **mesure densité de f par rapport à la mesure μ** l'application ν:* $\left|\begin{array}{ccc}\mathcal{T}&\to&\mathbb{R}^+\\A&\mapsto&\int\mathbb{1}_Afd\mu\end{array}\right.$ *. L'application f est appelée **densité de ν par rapport à μ**.*

On la note : $\nu=f\cdot\mu$.

Remarque 17.26. $(f\cdot\mu)(E)=\int fd\mu$

17.5.1.2 Propriétés générales

Proposition 17.27. *La mesure de densité d'une application par rapport à une mesure est une mesure.*

Proposition 17.28. *Soit $\nu=f\cdot\mu$ une mesure de densité. Pour toute fonction mesurable $g:(E,\mathcal{T})\to\bar{\mathbb{R}}$ on a :*

1. $\int|g|d\nu=\int|g|fd\mu$

2. et si $g \in \mathcal{L}^1(R, \mathcal{T}, \nu)$ *on a :* $\int g d\nu = \int g f d\mu$

17.5.1.3 Cas particulier de la mesure de Lebesgue

Théorème 17.29. *Soient* f: $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), dx) \to \mathbb{R}$ *une fonction intégrable et* $D_0 = \left\{x \in \mathbb{R}^n; \frac{\int \mathbb{1}_{\mathcal{B}(x,\varepsilon)} f dy}{\int \mathbb{1}_{\mathcal{B}(x,\varepsilon)} dx} \to f(x), \text{ si } \varepsilon \to f(a)\right\}$. *Alors* D_0 *est mesurable (pour la mesure de Lebesgue) et* $\mathbb{R}^n \backslash D_0$ *est négligeable.*

17.5.1.4 Mesures absolument continues

Définition 17.30. *Soient* ν, μ *deux mesures sur* $(E, \mathcal{T})$. *On dit que* ν *est absolument continue par rapport à* μ *et on note* $\nu \ll \mu$ *si et seulement si :* $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A)$ *?.*

Proposition 17.31. *(Randon-Nikodym) Soient* ν, μ *deux mesures* σ*-additives et* σ*-bornées sur* $(E, \mathcal{T})$ *telles que* $\nu \ll \mu$. *Il existe alors une fonction* f: $(E, \mathcal{T}) \to \bar{\mathbb{R}}^+$ *mesurable et telle que* $\nu = f \cdot \mu$.

17.5.2 Mesures images

Si l'on dispose de deux ensembles E_1, E_2, si E_1 est muni d'une mesure μ, si de plus on dispose d'une application mesurable I: $E_1 \to E_2$ entre ces deux espaces, on va pouvoir munir l'espace E_2 d'une mesure par simple transport sur E_2 de la mesure μ, par l'application I.

17.5.2.1 Définition

Définition 17.32. *Soit* I: $(E_1, \mathcal{T}_1, \mu) \to (E_2, \mathcal{T}_2)$ *une application* $\mathcal{T}_1$-$\mathcal{T}_2$*-mesurable.*

On appelle ***mesure image*** *l'application définie par :* $\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{T}_2 & \to & \bar{\mathbb{R}}^+ \\ A & \mapsto & \mu(I^{-1}(A)) \end{array} \right.$.

On la note notée $I * \mu$, $I[\mu]$, $I(\mu)$ *ou encore* μ_I.

Ainsi avec ces notations, on peut écrire : $(I * \mu)(A) = I[\mu](A) = I(\mu)(A) = \mu_I(A) = \mu(I^{-1}(A))$

17.5.2.2 Propriété générale

Théorème 17.33. *La mesure image est une mesure.*

17.5.2.3 C.S. d'intégration par rapport à une mesure image

Proposition 17.34. *(Théorème de transfert) Soit* $(E_1, \mathcal{T}_1, \mu)$ *un espace mesuré,* $(E_2, \mathcal{T}_2)$ *un espace mesurable,* I: $E_1 \to E_2$ *une application* $\mathcal{T}_1$-$\mathcal{T}_2$*-mesurable,* $\mathbb{K} = \bar{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$ *et* f: $E_2 \to \mathbb{K}$ *une application* $\mathcal{T}_2 - \mathcal{B}(\mathbb{K}) -$ *mesurable. Sous ces hypothèses on a :*

1. *si* f *est de signe quelconque alors* $f \circ I$ *est* $\mathcal{T}_1 - B(\mathbb{K})$*-mesurable et :* $\int_{E_2} |f| d(I * \mu) = \int_{E_1} |f \circ I| d\mu$.
2. *si* f *est positive, alors* $f \circ I$ *est* $\mathcal{T}_1 - B(\mathbb{K})$*-mesurable, positive et :* $\int_{E_2} f d(I * \mu) = \int_{E_1} f \circ I d\mu$.
3. *(*f *est* $I * \mu$*-intégrable)* $\Leftrightarrow$ *(*$f \circ I$ *est* μ*-intégrable); et dans ce cas, on a encore la formule :* $\int_{E_2} f d(I * \mu) = \int_{E_1} f \circ I d\mu$.

17.5.2.4 Mesure image et formalisme probabiliste

Lire cours polycopié licence page 6 du même chapitre.

17.5.2.5 Mesure image et mesure de courbes et de surface de $\mathbb{R}^n$

Lire cours polycopié licence page 8 du même chapitre.

17.5.2.6 Mesure image et formule du changement de variable dans $\bar{\mathbb{R}}$

Proposition 17.35. *Soit $H: U \to V$ une application bijective entre deux ouverts $U, V \in \mathbb{R}^n$, $n \geqslant ?$. On suppose que H est un difféomorphisme. Pour toute fonction mesurable $f: V \to \bar{\mathbb{R}}$ (relativement aux tribus boréliennes) on a en notant $J(x)$ le déterminant jacobien de H:*

1. $\int_V |f(x)|dx = \int_U |f(H(x))|\,|J(x)|dx$
2. *et si f est intégrable sur V (pour la mesure de Lebesgue dx) alors* $\int_V f(x)dx = \int_U f(H(x))\,|J(x)|dx$

Remarque 17.36. H est bijective donc $V = H(U)$.

Exemple 17.37.

	dans $\mathbb{R}^n$
H	$H: \left\vert \begin{array}{ccc} U & \to & V \\ x & \mapsto & k\,x \end{array} \right. ; U, V \subset \mathbb{R}^n$
J	$J(x) = \left\vert \begin{array}{ccc} k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & k \end{array} \right\vert = k^n$
	$\int f(x)dx = \int \vert k^n \vert f(k\,x)dx$

	Passage en coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2$
H	$H: \left\vert \begin{array}{ccc} U & \to & V \\ (\rho,\theta) & \mapsto & (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \end{array} \right.$
J	$J(\rho,\theta) = \left\vert \begin{array}{cc} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{array} \right\vert = \rho$
	$\int\int f(x,y)dx\,dy = \int_0^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$

	Passage en coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^3$
H	$H: \left\vert \begin{array}{ccc} U & \to & V \\ (\rho,\theta,\varphi) & \mapsto & (\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta) \end{array} \right.$
J	$J(\rho,\theta) = \left\vert \begin{array}{ccc} \sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{array} \right\vert = \rho^2\sin\theta$
	$\int\int\int f(x,y,z)dx\,dy\,dz = \int_0^{+\infty}\int_0^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta d\rho d\theta d\varphi$

17.5.3 Mesures produits

La mesure produit est une mesure particulière sur un espace produit qui permettra de facilité l'intégration sur un espace identifié comme étant un espace produit.

17.5.3.1 Existence et Définition

Proposition 17.38. *Soient $(X_i, \mathcal{C}_i, \mu_i)$ $(i = 1, 2)$ deux espaces mesurés tels que les mesures μ_i soient σ-finies. Il existe une unique mesure μ sur l'espace mesurable produit $(X_1 \times X_2, \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2)$, vérifiant la condition $\mu(T_1 \times T_2) = \mu_1(T_1) \cdot \mu_2(T_2)$, pour tout $T_1 \in \mathcal{C}_1$ et $T_2 \in \mathcal{C}_2$.*

Remarque 17.39. L'unicité de la mesure produit est assurée par le fait que l'on a pris soin de choisir μ_1 et μ_2 σ-finies.

Définition 17.40. *Soient $(X_i, \mathcal{C}_i, \mu_i)$ $(i = 1, 2)$ deux espaces mesurés tels que les mesures μ_i soient σ-finies. On appelle* ***mesure produit des mesures μ_1 et μ_2*** *l'unique mesure sur l'espace mesurable produit $(X_1 \times X_2, \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2)$ notée $\mu_1 \otimes \mu_2$, vérifiant la condition $\mu_1 \otimes \mu_2(T_1 \times T_2) = \mu_1(T_1) \cdot \mu_2(T_2)$, pour tout $T_1 \in \mathcal{C}_1$ et $T_2 \in \mathcal{C}_2$.*

17.5.3.2 Mesure produit et intégration sur un espace produit (théorèmes de Fubini)

Remarque 17.41. Il existe deux énoncés du théorème de Fubini qui permet de calculer les intégrales sur un espace produit :

- l'un pour les fonctions positives mesurables, connu aussi sous le nom de théorème de Fubini-Tonelli où les hypothèses à vérifier sont quasi inexistantes,
- l'autre pour les fonctions mesurables de signe quelconque, où il faudra vérifier que la fonction est intégrable par rapport à la mesure produit.

Théorème 17.42. *(Théorème de Fubini-Tonelli)*
Soit $f: (E_1 \times E_2, \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2, \mu_1 \otimes \mu_2) \to \bar{\mathbb{R}}^+$ une fonction $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$-mesurable positive, alors les applications partielles sont $\mathcal{T}_i$-mesurables ainsi que les intégrales définies par ces applications partielles et l'intégrale par rapport à la mesure produit peut alors s'obtenir par double intégration :

1. *Pour tout $x_1 \in E_1$ fixé, l'application $x_2 \mapsto f(x_1, x_2)$ est $\mathcal{T}_2 - \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}^+)$-mesurable;*
2. *Pour tout $x_2 \in E_2$ fixé, l'application $x_1 \mapsto f(x_1, x_2)$ est $\mathcal{T}_1 - \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}^+)$-mesurable;*
3. *l'application $x_1 \mapsto \int f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2)$ est $\mathcal{T}_1 - \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}^+)$-mesurable;*
4. *l'application $x_2 \mapsto \int f(x_1, x_2) d\mu_1(x_1)$ est $\mathcal{T}_2 - \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}^+)$-mesurable;*
5. *et enfin $\int f d\mu_1 \otimes d\mu_2 = \int (\int f d\mu_2) d\mu_1 = \int (\int f d\mu_1) d\mu_2$.*

Proposition 17.43. *(Théorème de Fubini) Soit $f: (E_1 \times E_2, \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2, \mu_1 \otimes \mu_2) \to \bar{\mathbb{R}}$ une fonction mesurable. On suppose que : $\int |f| d\mu_1 \otimes \mu_2 < +\infty$, autrement dit : $f \in \mathcal{L}^1(E_1 \times E_2, \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ ou encore f est $\mu_1 \otimes \mu_2$-intégrable alors en notant $N_1 = \{x_1; \int |f(x_1, x_2)| d\mu_2(x_2) = +\infty\}$ et $N_2 = \{x_2; \int |f(x_1, x_2)| d\mu_1(x_1) = +\infty\}$ on a :*

1. *$\mu_1(N_1) = \mu_2(N_2) = 0$*
2. *et $\int f d\mu_1 \otimes d\mu_2 = \int_{N_1^c} (\int f d\mu_2) d\mu_1 = \int_{N_2^c} (\int f d\mu_1) d\mu_2$*

17.5.3.3 Mesure produit et intégration sur un produit fini d'espaces

Le théorème précédent se généralise immédiatement aux produits finis

Proposition 17.44. *(Théorème de Fubini-Tonelli) Soient $(E_i, \mathcal{T}_i, \mu_i), 1 \leqslant i \leqslant n$, $E = \prod_{i=1}^n E_i$, $\mathcal{T} = \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{T}_i$, $\mu = \bigotimes_{i=1}^n \mu_i$ alors pour toute fonction positive $f: (E, \mathcal{T}, \mu) \to \bar{\mathbb{R}}$ intégrable pour μ, on a :*
$\int f d\mu = \int (...(\int f d\mu_1) d\mu_2 ...) d\mu_n$.

17.5.3.4 Cas particulier de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$

Proposition 17.45. *(Théorème de Fubini-Tonelli) Soient $E = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{B}(\mathbb{R}_i)$, $\mu = \bigotimes_{i=1}^n \mu_i$ alors pour toute fonction positive $f: (E, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mu) \to \bar{\mathbb{R}}$ intégrable pour μ, on a :*
$\int f dx = \int (...(\int f dx_1) dx_2 ...) dx_n$.

Proposition 17.46. *Soit f_1 et f_2 deux fonctions numériques définies sur Ω_1, Ω_2 notons $f_1 \otimes f_2$ la fonction définie sur $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ par : $(x_1, x_2) \mapsto f_1(x_1) \times f_2(x_2)$*

i. Si f_1 et f_2 sont à valeurs dans $[0, +\infty]$ et si f_1, f_2 sont mesurables, alors $f = f_1 \otimes f_2$ est Σ-mesurable, à valeur positive ou non et $\int (f_1 \otimes f_2) d(\mu \otimes \mu) = \int f_1 d\mu_1 \times \int f_2 d\mu_2$

ii. Si f_1 et f_2 sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ et si f_1, f_2 sont intégrables respectivement par rapport à μ_1, μ_2, alors $f = f_1 \otimes f_2$ est intégrable par rapport à $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$ et $\int (f_1 \otimes f_2) d(\mu \otimes \mu) = \int f_1 d\mu_1 \times \int f_2 d\mu_2$

Démonstration. Buchwalter page 82 et 83. □

Chapitre 18
Les coniques

Chapitre 19
Calcul scientifique

Livre Analyse Numérique Michelle Schatzmann p.218-243

Recherche de méthodes efficaces (c'est à dire en temps polynomial) permettant de résoudre des problèmes mathématiques. Certains théorèmes d'autre cours apparaissent indaptés dans le résolution car leur mise en application est irréalisable : soit le temps de d'éxéctuion des algorithme est trop important (en temps exponentiel) soit il monopolise trop de ressources machine. Le but de ce chapitre est de faire le tri de l'ensemble des cours d'analyse pour rechercher tous les outils efficaces et les mettre en application.

Voir Document téléchargé G. Bontempi page 52.

19.1 Résolution numérique d'équations et systèmes d'équations non linéaires

Un des principaux objectifs du calcul numérique est la résolution de l'équation $f(x) = 0, x \in [a, b]$.

Soit $f: \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \\ \mathbb{R} \end{array} \right.$ et $F: \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \\ \mathbb{R}^n \end{array} \right.$ deux applications pour lesquelles on souhaite résoudre les équations : $f(x) = 0$ et $F(x) = 0$. (1.1)

De quels outils dispose-t-on ?

19.1.1 Cas scalaire $f: \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \\ \mathbb{R} \end{array} \right.$

19.1.1.1 Théorème des valeurs intermédiaires et dichotomie (Algorithme de dichotomie)

Théorème 19.1. *(Rappel) Soit f une fonction continue : $[a; b] \to \mathbb{R}$ si $f(a) \times f(b) < 0$ alors il existe $\alpha \in]a; b[$ tel que $f(\alpha) = 0$.*

Le théorème des valeurs intermédiares permet de prouver l'existence d'au moins une solution.

19.1.1.2 Méthode du point fixe attractif contractions Théorème du point fixe contractant et suite (Algorithme des approximations successives)

Ramener l'équation $f(x) = 0$ à la recherche d'un point fixe d'une fonction g contractante sur un intervalle I à définir.

- Méthode (1) :

Ecrire l'équation $f(x) = 0$ sous la forme : $x - f(x) = x$. En posant $g(x) = x - f(x)$, on remarque que résoudre l'équation $f(x) = 0$ c'est trouver le point fixe de g.

Définition 19.2. *Prérequis : rappeler la définition d'une contraction. (1.2)*

Méthode :

Théorème 19.3. *Si g est une contraction :*

- *il existe un unique point fixe x^* tel que $g(x^*) = x^*$. (1.3)*
- *de plus la suite (x_n): $\left\{ \begin{array}{c} x_0 \in E \\ x_{p+1} = g(x_p) \end{array} \right.$ converge vers x^* pour tout x_0 de E. (1.4)*

Démonstration. □

Définition 19.4. *Point fixe attractif et répulsif. Voir cours Bontempi*

19.1.1.3 Méthode de la corde

Remarque 19.5. Soit l'équation $f(x)=0$ peut s'écrire $x-\lambda f(x)=x$.
Si on pose $g_\lambda(x)=x-\lambda f(x)$ alors $(f(x)=0)\Leftrightarrow(g_\lambda(x)=x)$.
Autrement dit on transforme la résolution d'une équation en problème de recherche de point fixe.

Théorème 19.6. *Soit g une contraction sur $[a,b]$ pour λ fixé et $g_\lambda[a,b]\subset[a,b]$.*
Alors (1.4) $x_{p+1}=x_p-\lambda f(x_p)$ est convergente et converge vers l'unique point fixe de g_λ.

19.1.1.4 Méthode de Newton

Définition 19.7. *(Formule de Newton) $x_{p+1}=x_p-\frac{f(x_p)}{f'(x_p)}$ avec $f'(x_p)\neq 0$. (1.5)*

Théorème 19.8. *(de Convergence globale) Soit $g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$ avec f 2 fois dérivable.*
$\left(\left|\frac{f(z)f''(z)}{f'(z)^2}\right|\leqslant k<1,\ \forall z\in\mathbb{R}\right)\Rightarrow(\forall x_0\in\mathbb{R},,(1.5)\text{ converge vers }l'\text{unique solution de }(1.1))$.

Avec des contraintes moins fortes on a tout de même.

Théorème 19.9. *(de Convergence local) Soit $f\in C^2([a;b])$.*
"(1.1) a une solution x^* dans $[a;b]$ $f(x^*)=0$ avec $x^*\in[a;b]$, telle que $f'(x^*)\neq 0$"
$\Downarrow$
– *"(1.5) converge vers l'unique solution de (1.1), si on part suffisament près de x^*"*
– *Autrement dit "$\exists\varepsilon>0;\forall x_0\in[x^*-\varepsilon;x^*+\varepsilon]$,(1.5) est définie et $\forall p\in\mathbb{N},x_p\in[x^*-\varepsilon;x^*+\varepsilon]$ et $x_p\to x^*$".*

19.1.2 Cas Vectoriel $F:\left|\ \mathbb{R}^n\ \longrightarrow\ \mathbb{R}^n\right.$

19.1.2.1 Méthode de la corde

19.1.2.2 Méthode de Newton-Raphson

19.1.3 Ordre (de convergence) d'une méthode itérative

19.1.3.1 Définition

Définition 19.10. *Soient une suite d'approximation (y_n) d'un nombre ou d'un vecteur x donnée par une méthode itérative M et (e_n) la suite des erreurs $e_n=|y_n-x|$.*
S'il existe $\lambda=\sup\{\alpha\in\mathbb{R};\exists C\in\mathbb{R};\exists N\in\mathbb{N};n\geqslant N\Rightarrow e_{n+1}\leqslant C\,(e_n)^\alpha\}$ et tel que $\lambda>1$,
*on dira alors que **λ est l'ordre de la méthode M** ou que **M est d'ordre** $\lambda>1$.*

Exemple 19.11.

1. La méthode de Newton est d'ordre 2,
2. La méthode de la sécante est d'ordre 1,618,
3. La méthode des contractions est d'ordre 1.

19.1.3.2 Condition de convergence suivant l'ordre

Pour qu'une méthode d'ordre

– égal à 1, converge il faut que $C<1$,
– supérieur strictement à 1 converge, il suffit seulement que l'erreur initiale soit suffisament petite.

19.1.3.3 Ordre et vitesse de convergence

Proposition 19.12. *Pour une méthode itérative d'ordre λ, y_{n+1} a λ fois plus de décimales exactes que y_n.*

19.2 Résolution numérique d'équation et système linéaire.

$$\text{Soit le système d'équation : } (S)\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + ... + a_{\mathrm{np}}x_p = b_n \end{cases}.$$

Il s'agit de mettre en oeuvre (i.e programmer) les différentes méthodes de résolution (i.e programmer) d'équation et système linéaire.

Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (S). Quels sont les éléments de $\mathcal{S}$ s'ils existent !

19.2.1 Interprétations

19.2.1.1 Interprétation Affine

Résoudre (S) revient à déterminer l'intersection d'une famille finie d'hyperplans affines.

19.2.1.2 Interprétation matricielle

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{\mathrm{np}} \end{pmatrix}$ la matrice de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. En notant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in M_{p,1}(\mathbb{K})$. $(x_1, ..., x_p)$ est une solution de (S) si et seulement si : $\mathrm{AX} = B$.

19.2.1.3 Interprétation vectorielle

La résolution de (S) revient à déterminer l'image réciproque du singleton $\{b\}$ par f.

19.2.2 Méthode directe de résolution. Cas r=n=p dit Système de Cramer

19.2.2.1 Méthode de Cramer

Définition 19.13. *Le système (S) est dit de Cramer si et seulement si A est carrée et inversible, c'est à dire : $n = p = r$.*

Proposition 19.14. *Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(b_1, ..., b_n) \in \mathbb{K}^n$.*

Le système $(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + ... + a_{\mathrm{np}}x_p = b_n \end{cases}$ *admet une solution et une seule, et, pour tout $k \in \{1, ..., n\}$:*

$$x_k = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1k-1} & b_1 & a_{1k+1} & ... & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{\mathrm{nk}-1} & b_n & a_{\mathrm{nk}+1} & ... & a_{\mathrm{nn}} \end{vmatrix}$$

Remarque 19.15. Pour $n \geqslant 3$, les formules de Cramer sont pratiquement impraticables. On préfère souvent une méthode de combinaison d'équations et délimination d'inconnues.

19.2.2.2 Méthode d'élimination de Gauss

Voir page 18 du cours de Calcul scientifique.

19.2.2.3 Méthode de Cholesky

Théorème 19.16. *Si A est une matrice hermitienne définie positive alors il existe une matrice $R = (r_{ij})$ triangulaire supérieure avec $\forall i, r_{ii} > 0$, telle que $A = R^* R$ ou ($L\, L^*$avec L triangulaire inférieur)*

19.2.2.4 Méthodes Itératives Jacobi/Gauss-Seidel/Relaxation

19.2.3 Méthodes itératives Jacobi/Gauss-Seidel/Relaxation; gradiant; gradian conjugué

Principe

1. Découper la matrice A : $A = M - N$.
   Le découpage suivant M et N peut se faire suivant 3 méthodes

	Méthode de Jacobi	Méthode de Gauss-Seidel	Méthode de la relaxation
M	D	L	$M = \frac{1}{\omega}D - L$
N	$L + U$	U	$N = \left(\left(\frac{1}{\omega} - 1\right)D + U\right)$

2. Remarquer que l'équation $A\,X = B$ s'écrit $M\,X = N\,X + B$ puis $X = M^{-1}\,N\,X + M^{-1}B$ si M^{-1} existe.

	Jacobi	Gauss-Seidel	Relaxation
Matrice de	$J = D^{-1}(L+U)$	$G = (D-L)^{-1}U$	$\mathcal{L}_\omega = \left(\frac{D}{\omega} - L\right)^{-1}\left(\frac{1-\omega}{\omega}D + U\right)$

3. Se ramener à un problème de point fixe en posant $X_{k+1} = M^{-1}\,N\,X_k + M^{-1}B$ et en donnant une valeur à X_0.
4. La convergence est donnée par l'un des théorèmes suivants :

Proposition 19.17. *S'il existe une norme subordonnée telle que $\|M^{-1}N\|_s < 1$ alors l'itération $X_{k+1} = M^{-1}\,N\,X_k + M^{-1}B$ converge vers l'unique solution du système.*

Théorème 19.18. *L'itération $X_{k+1} = M^{-1}\,N\,X_k + M^{-1}B$ converge vers la solution du système linéaire si et seulement si $\rho(M^{-1}\,N) < 1$.*

Théorème 19.19.

Proposition 19.20. *S'il existe une norme subordonnée telle que $\|J\|_s < 1, \|G\|_s < 1, \|\mathcal{L}_\omega\|_s < 1$ alors l'itération les méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel et de la relaxation convergent vers l'unique solution du système.*

Théorème 19.21. *Les méthode de Jacobi, Gauss-Seidel et de la relaxation convergent si et seulement si $\rho(J) < 1, \rho(G) < 1, \rho(\mathcal{L}_\omega) < 1$.*

Proposition 19.22. *Si A est une matrice HDP et si $M + N^*$ est aussi HDP alors l'itération $X_{k+1} = M^{-1}\,N\,X_k + M^{-1}B$ converge.*

Proposition 19.23. *Si A est une matrice HDP et si $0 < \omega < 2$ alors la méthode de la relaxation est convergente.*

Remarque 19.24.

1. *Le théorème implique que Guass-Seidel est convergente pour A HDP.*
2. *Pour la méthode de Jacobi le théorème ne s'applique pas (voir exemple TD).*

19.2.3.1 vitesse asymptotique de convergence

Définition 19.25. *Soit l'itération $X_{k+1} = B\,X_k + C$, $k \geqslant 0$ convergeant vers un point fixe X^*. On appelle **vitesse asymptotique de convergence** de la méthode itérative associée à la matrice B le nombre $-\ln(\rho(\beta))$.*

Exemple 19.26.

1. $\rho(J) = 1 - \frac{\pi^2 h^2}{2} + O(h^4)$

2. $\rho(\mathcal{L}_1) = 1 - \pi^2 h^2 + O(h^4)$

19.2.3.2 Conditionnement d'un système

Définition 19.27. *On appelle conditionnement de la matrice A le nombre noté $\gamma(A)$ tel que :* $\gamma(A) = \|A\| \, \|A\|^{-1}$.

Remarque 19.28.

1. Un système linéaire est bien conditionné si $\gamma(A)$ est petit .
2. Un système linéaire est mal conditionné si $\gamma(A)$ est grand .
3. Les matrices unitaires sont celles qui sont le mieux conditionné.

Exemple 19.29. Le conditionnement de la matrice suivante est $\gamma(A) > 4000$. On vérifie par le calcul que l'erreur s'amplifie avec un facteur de 30000.

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

19.2.4 Résolution : cas $r = n < p$

On se ramène à un système de Cramer en permutant les inconnues.

19.2.5 Résolution : cas $r < n$

On procèdera par combinaison linéaire d'équations pour se ramener au cas (2), ou à un système n'ayant pas de solution.

19.2.6 Cas des systèmes linéaires-homogènes

Définition 19.30. *Le système (S) est dit homogène (ou linéaire ou encore homogène) si et seulement si :* $b_1 = ... = b_n = 0$.

Proposition 19.31. *L'ensemble des solutions d'un système linéaire* $(S_0) = \begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + ... + a_{\mathrm{np}}x_p = 0 \end{cases}$ *est un sev de* $\mathbb{K}^p$*, de dimension* $p - r$*, où* $r = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{\mathrm{np}} \end{pmatrix}$.

En particulier, (S_0) *admet une solution autre que* $(0, ..., 0)$ *si et seulement si :* $r < p$.

19.3 Equation différentielle à conditions initiales

19.4 Approximation polynomiale

19.4.1 Introduction

19.4.2 Approximation par le polynôme d'interpolation de Lagrange

Notons $\mathcal{P}_n$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant n$.

Problème : Soient f une fonction, $x_0, ..., x_n$ $n+1$ points distincts appelés point d'interpolation et $f(x_0), ..., f(x_n)$ leurs images correspondantes.

19.4.2.1 Existence, unicité et définition

Proposition 19.32. *Il existe un unique polynôme p de degré $\leqslant n$ ($p \in \mathcal{P}_n$) tel que $f(x_i) = p(x_i)$, $\forall i = 0, ..., n$.*

Définition 19.33. *Ce polynôme s'appelle le* ***polynôme d'interpolation de Lagrange*** *de la fonction f aux points x_i.*

Définition 19.34. *Ce polynôme est appelé approximation de f de degré au plus n au sens des moindres carrés discrets.*

19.4.2.2 Calcul effectif

Proposition 19.35. *Notion l_j le polynôme $l_j(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$.*
L'ensemble des polynômes $\{l_j\}_{j=0,...,n}$ est une base de $\mathcal{P}_n$.

Théorème 19.36. *Le polynôme $p(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) l_j(x)$ est le polynôme d'interpolation de Lagrange.*

19.4.2.3 Calcul d'erreur

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}[a, b]$, $x_0, ..., x_n$ $n+1$ points distincts de $[a, b]$.

Proposition 19.37. *Si p est le polynôme d'interpolation de f, $\forall x \in [a, b]$, $\exists z_x$ dans l'intervalle ouvert contenant tous les points $x_0, ..., x_n$ et x tel que :*
(2.3) $f(x) - p(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) \frac{f^{n+1}(z_x)}{(n+1)!}$.

Corollaire 19.38. *Soit* $M = \sup_{y \in [a,b]} \left| f^{n+1}(y) \right|$.
$\forall x \in [a, b], f(x) - p(x) \leqslant \frac{M}{(n+1)!} \times \sup_{y \in [a,b]} \left| \prod_{j=0}^{n} (y - x_j) \right|$

19.4.2.4 Choix optimal des points d'interpolation

On choisit les x_i comme étant les zéros d'un polynôme de degré $(n+1)$ de Chebychev.

19.4.3 Approximation au sens des moindres carrés discret (MCD)

Problème : On veut faire passer une courbe définie par un polynôme, le plus près possible des valeurs (x_i, y_i). Autrement dit

19.4.3.1 Existence et unicité

Définition 19.39. *Pour une fonction f définie sur I ($x_i \in I, \forall i = 0, ..., n$). On appelle :*

1. *Norme des moindres carrés discrets (NMCD) :* $\|f\|_{\text{NMCD}} = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} f(x_i)^2}$.
2. *Produit scalaire aus sens des MCD :* $< f, g > = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) g(x_i)$

Proposition 19.40. *(de minimisation) Il existe un unique polynôme p de degré $\leqslant n$ ($p \in \mathcal{P}_n$) tel que :*

- *(3.1)* $\forall p \in \mathcal{P}_p; \|\bar{p} - Y\|_2 \leqslant \|Q - Y\|_2$,
- *de plus si* $P(x) = \sum_{i=0}^{p} \alpha_i x^i$, $\bar{p} = \begin{pmatrix} p(x_0) \\ \vdots \\ p(x_n) \end{pmatrix} = \left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i x_j^p \right)$, $A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & ... & x_0^p \\ 1 & x_1 & x_1^2 & ... & x_1^p \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & ... & x_n^p \end{pmatrix}$ *et* $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p+1}$ *alors le vecteur α s'obtient en résolvant l'équation normale :*
  (3.2) $A^t A \alpha = A^t Y$.

Définition 19.41. *Ce polynôme est appelé approximation de f de degré au plus n au sens des moindres carrés continus.*

19.4.3.2 Calcul effectif

19.4.3.3 Droite de régression

Meilleur approximation au sens des moindres carrés discrets pour p=1.

On cherche donc un polynôme de la forme $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$.

Proposition 19.42. *Equation de la droite :* $\alpha_1 = \frac{\text{covariance}}{\text{variance}} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}$ *et* $p(x) = \alpha_1(x - \bar{x}) + \bar{y}$.

19.4.4 Approximation au sens des moindres carrés continu (MCC)

19.4.4.1 Définition

Définition 19.43. *Pour une fonction f définie sur I ($x_i \in I, \forall i = 0, ..., n$). On appelle :*

1. *Norme des moindres carrés continus (NMCC) :* $\|f\|_{\text{NMCC}} = \sqrt{\int_a^b f^2(x_i) w(x) dx}$, $w(x) \geqslant 0$, *fonction poids (continue par morceau).*

   $w \equiv 1, \{f; \|f\|_{\text{NMCC}} < +\infty\} \simeq L^2[a,b]$ *espace de Hilbert associé au produit scalaire avec* $\forall f, g \in L^2[a,b], < f, g >_{L^2[a,b]} = \int_a^b f(x)g(x)dx$.
2. *Produit scalaire aus sens des MCC :* $< f, g >_w = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx$.

Définition 19.44. *Ce polynôme est appelé approximation de f de degré au plus n au sens des moindres carrés continus.*

19.4.4.2 Problème de meilleur approximation au sens de MCC (pour f donné)

On suppose $f \in L^2_w[a,b], \exists! p \in \mathcal{P}_p$ tel que : $||f - p\|_{\text{NMCC}} = \inf_{q \in \mathcal{P}_p} \|f - q\|_{\text{NMCC}}$ (4.1).

Il est la projection orthogonale au sens de cette norme de f sur $\mathcal{P}_p$

(4.2) $p \in \mathcal{P}_p, < f, q >_w = < p, q >_w, \forall q \in \mathcal{P}_p$.

19.4.4.3 Calcul effectif de P

1. Recherche en fonction des coefficients $P(x) = \sum_{j=1}^p a_j x_j$

   $(4.2) \Rightarrow \sum_{j=0}^p \left(\int_a^b x^{i+j} w(x) dx \right) a_j = \int_a^b x^i f(x) w(x) dx \; i = 0, ..., p.$

   Ce système est mal conditionné donc les méthodes de Gauss sont inadaptées. On cherche un base particulière de $\mathcal{P}_p$ pour calculer P.
2. Définir des polynômes orthogonaux par rapport au produit scalaire de MCC : P_0, ..., $P_n, ...$
   1. P_n est un polynôme de degré n,
   2. $\forall n$ fixé P_n est orthogonal à $\mathcal{P}_{n-1}$ donc à P_0, P_1, P_{n-1}.
   3. Une condition : par exemple : le coefficent du terme de plus haut degré est 1 ou la valeur en un point $P_n(1) = 1$ ou $\|P_n\|_{\text{MCC}} = 1$.

   P meilleure approximation : solution de (4.1) :

   $P(x) = \sum_{j=0}^p c_j P_j(x)$ où $\{P_j\}$ base orthogonale de $\mathcal{P}_p$.

   $< f, q >_w = < p, q >, \forall q$

   $< f, P_j > = < \sum c_j P_j; P_j >, \forall j = 0, ..., p$

   $c_j = \frac{< f, P_j >_w}{< P_j, P_j >_w}$

   Exemple 19.45.
   - si $[a,b] = [-1, 1]$ $w(x) = 1$ polynôme de Legendre.
   - si $[a,b] = [0, +\infty]$ $w(x) = e^x$ polynôme de Laguerre.
   - si $[a,b] = [-\infty, +\infty]$ $w(x) = x^{-x^2}$ polynôme de Hermite.
   - si $[a,b] = [-1, 1]$ $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ polynôme de Tchebitchef.

Chapitre 20
Applications dérivables et différentiables

Je pense que le nom de cette partie devrait être «Outils d'étude d'une fonction sur un espace vectoriel normé». Ce serait par conséquent une partie du cours sur les espaces vectoriels normés. On va définir deux notions : la dérivée et la dérivée directionnelle. Si elles ont toutes les deux des expressions différentes, leur valeur pour un même point (a) et une direction (k) sont identiques.

Rajouter les définitions d'une submersion/immersion et compléter si nécessaire les remarques 35.131 et 35.134.

20.1 Dérivée directionnelle et G–dérivée

20.1.1 Dérivée directionnelle

Définition 20.1. *Soient $(E;\|.\|_E)$, $(F;\|.\|_F)$ deux e.v.n. sur $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$, U un ouvert non vide de E, $f\colon U\to F$ une application, $a\in U$ un point, $h\in E$ un autre point et $\alpha\in F$. On dit que f admet une dérivée directionnelle α au point a dans la direction h si et seulement si :*

$$\text{la fonction } \frac{f(a+t\,h)-f(a)}{t} \text{ converge lorsque } t\in\mathbb{K}\backslash\{0_{\mathbb{K}}\} \text{ tend vers } 0.$$

On la notera $f'(a,h)$ ou $\frac{df}{dh}(a)$. Dans ce cas $f'(a,h)=\lim_{t\to 0_{\mathbb{K}},t\neq 0_{\mathbb{K}}}\frac{f(a+t\,h)-f(a)}{t}$.

Remarque 20.2.

1. Il me semble que l'on peut écrire que puisque $f'(a,\,h)=\lim_{t\to 0_{\mathbb{K}},t\neq 0_{\mathbb{K}}}\frac{f(a+t\,h)-f(a)}{t}$, on doit pouvoir écrire que $f'(a,h)=\frac{df(a+t\,h)}{\mathrm{dt}}(0_{\mathbb{K}})$. Voir Avez cours Calcul différentiel.
2. $f'(a,h)$ est un élément de F.

Proposition 20.3. *Si cette limite existe, elle est unique.*

Remarque 20.4. On peut donc définir une application à partir de cette notion.

Définition 20.5. *L'application :* $\left|\begin{array}{ccc} E & \to & F \\ h & \mapsto & f'(a,h)\end{array}\right.$ *est appelée dérivée directionnelle, au point a et sera notée : $f'(a;.)$ ou $\frac{df}{dh}$.*

20.1.2 Dérivée au sens de Gâteaux

Définition 20.6. *On dit que f est dérivable au sens de Gâteaux (ou faiblement dérivable ou G-dérivable) au point a si et seulement si $f'(a;.)$ (la dérivée directionnelle au point a) est définie, linéaire et continue sur tout E. Dans ce cas $f'(a;.)$ est appelée dérivée au sens de Gâteau ou dérivée faible ou G-dérivée.*

Lemme 20.7. *Soit $\lambda\in\mathbb{K}$, si $f'(a,h)$ existe alors $f'(a;\lambda h)$ aussi et $f'(a;\lambda h)=\lambda f'(a;h)$.*

Démonstration. Voir CTES 2004-2005 page ? Calcul différentiel. □

Remarque 20.8.

1. Ce lemme permettra de montrer les points 3 et 4.
2. Attention $\lambda\in\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

3. Si $f'(a;h)$ existe pour tout $h \in \mathcal{S}(O;1)$ (sphère unité de centre O et de rayon 1) l'application dérivée directionnelle au point a : $f(a;.)$: $\left|\begin{array}{ccc} E & \to & F \\ h & \mapsto & f'(a,h) \end{array}\right.$ est bien définie sur E par $f'(a;u) = \|u\|_E f\Big(a; \frac{u}{\|u\|_E}\Big)$.

   Autrement dit, si la dérivée directionnelle est calculable pour toute direction de la sphère unité alors, on peut la calculer pour n'importe quelle direction.

4. Si E est complexe $E = \mathbb{C}$, on peut choisir $t \in \mathbb{R}$ ou $t \in \mathbb{C}$, ce qui donne des dérivées $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$-directionnelles.
5. $f'(a;h)$ n'existe pas nécessairement $\forall h \in E$.
6. De plus si $f'(a;h)$ existe $\forall h \in E$ l'application dérivée directionnelle $(f'(a;.))$ n'est pas à priori linéaire (le corps de E et F étant le même).
7. Si toutefois $f'(a;.)$ est linéaire rien n'implique qu'elle soit continue.

20.1.3 Points critiques, Extremums

20.1.3.1 Cas général : points critiques

Définition 20.9. *Les points où $f'(u;.) = 0$ (i.e. $\forall v; f'(u;v) = 0$) sont appelés points critiques ou point stationnaires.*

Remarque 20.10.

1. Dans le cas où $F = \mathbb{R}$, on utilisera cette notion pour trouver des extrémums (maximum ou minimum).
2. Ce qui est remarquable c'est qu'il n'est pas nécessaire que f soit différentiable pour rechercher les points stationnaires. Il suffit qu'elle soit dérivable au sens de Gâteau.

20.1.3.2 Cas ou E est quelconque et $F = \mathbb{R}$

Lemme 20.11. *Soit $f: U \subset E \to \mathbb{R}$ qui atteint un extrémum en un point $m \in U$. Si f est dérivable au sens de Gâteaux au point m, alors $f'(m;.) = 0$. Autrement dit la dérivée directionnelle est nulle dans toutes les directions.*

Remarque 20.12.

1. Attention ! il n'y a pas de réciproque. Contre-exemple : $f: t \to t^3$, $f'(0) = 0$, mais f n'atteint pas de minimum ou de maximum.
2. Supposons que f soit dérivable en tout point $u \in U$ les points où f atteint éventuellement un extrémum sont parmi les points qui sont solutions de l'équation $f'(u;.) = 0$, c'est à dire les points critiques (ou points stationnaires).

20.1.4 Dérivabilité sur un espace produit

Soit $f: U \to F_1 \times F_2 \times ... \times F_n$

Proposition 20.13. *$f'(a;h)$ existe i.e. a une dérivée directionnelle si les $f_i'(a;h)$ existent dans ce cas $f'(a;h) = (f_1'(a;h); ...; f_n'(a;h))$.*

Démonstration. CTES Calcul différentiel page 18. □

Proposition 20.14. *Les $f_i'(a;.)$ existent et sont linéaires continues si et seulement si $f'(a;.)$ existe i.e. f est G-dérivable. (Formulation à vérifier).*

Démonstration. CTES Calcul différentiel page 18. □

20.2 Différentielle ou F-dérivée

20.2.1 Différentiabilité et différentielle en un point

20.2.1.1 Définition

Définition 20.15. *Soit un e.v.n. E, U un ouvert non vide de E, F un e.v.n. et $f: U \to F$ une application. On dit que f est différentiable en a $(a \in U)$, si et seulement si, il existe une application linéaire (par rapport au corps de définition de E, F) continue (l) $(l \in \mathcal{L}(E,F))$ telle que :*

$$\lim_{h\to 0; h\neq 0} \frac{\|f(a+h)-f(a)-l(h)\|_F}{\|h\|_E} = 0$$

L'application (l) est appelée application linéaire tangente à f en a, différentielle de f en a ou dérivée de f en a. On la note $f'(a)$, $d_a f$ ou $\mathrm{D}f(a)$.

Remarque 20.16. Voir cours CTES Mme Dulac et page 208 (bis).

- La CNS précédente s'écrit aussi : $f(a+h)-f(a) = l(h) + \|h\|_E \varepsilon(h)$ avec $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0_F$ i.e. $o(\|h\|_E)$ (à revoir ! J'avais écrit que cette relation n'est vraie que si f est à valeurs dans $\mathbb{R}$, autrement dit pour une fonction numérique. Voir cours Avez Calcul Différentiel page 11. Dans ce cas, $f(a) + d_a f$ apparait comme une approximation de f. Si la définition n'est pas limité aux fonctions numériques, il faudrait que ε soit une fonction à valeurs dans F !)
- ou $\|f(a+h)-f(a)-l(h)\|_F = o(\|h\|_E)$.
- Une application différentiable est dite quelques fois « fortement dérivable » ou « dérivable au sens de Fréchet ». (Lu pour la première fois dans le cours CTES de calcul différentiel 2004-2005 page 3).
- La CNS peut aussi s'écrire :
  - $\exists p: U \to F; \forall x \in U,\ f(x)-f(a) = l(x-a) + \|x-a\|_E\, p(x), \lim_{x\to a} p(x) = 0$. $p(x)$ est déterminée par : $p(x) = \frac{f(x)-f(a)-l(x-a)}{\|x-a\|_E}$ si $x \in U - \{a\}$, $p(a) = 0$ sinon.
  - ou $\lim_{x\to a; x\neq a} \frac{\|f(x)-f(a)-l(x-a)\|_F}{\|x-a\|_E} = 0$ c'est la définition que j'ai retenue, puisque c'est la définition de $\lim_{x\to a; x\neq a} \frac{f(x)-f(a)-l(x-a)}{\|x-a\|_E} = 0_F$ (condition énoncée dans certains cours, qui a l'inconvénient de faire oublié les arguments utiliser pour montrer la convergence vers 0_F).
- L'utilisation de la limite montre que la différentielle est une notion locale ?
- Pourquoi imposer à U d'être un ouvert ? C'est ce qui assure l'unicité ! ? ? ? (personne ne m'a donné de preuve de cette affirmation !) J'ai posé la question à M. Domergue (CTES cours calcul différentiel) : Pourquoi la différentielle est-elle toujours définie pour une fonction définie sur un ouvert. La réponse est-elle dans le remarque que vous faites page 10 : «Remarquons que $f(a+h)$ est bien définie ...» autrement dit, est-ce pour s'assurer que l'ensemble de définition de f contienne des points dans un voisinage de a et qu'il contienne encore les points $a+h$ même si $h \to 0_F$? Réponse : oui !
- On peut étendre la définition à une partie quelconque U à condition que a soit un point intérieur (ce qui me semble logique puisque dans ce cas, il existe par définition un ouvert U' contenant (a) et contenu dans U. L'existence de l'ouvert est donc assuré par le fait que a est un point intérieur, il ne reste plus qu'à définir la différentiabilité sur cet ouvert (faire le raisonnement sur cet ouvert).
- Si a n'est pas un point intérieur et si l'approche de a sur U est trop « étroite » l'unicité de l n'est plus assurée, ce qui diminue l'intéret de ce cas.
- Pourquoi impose-t-on à l d'être continue ? Si ce n'était pas le cas, ce qui peut se passer si E n'est pas en dimension finie, elle ne serait pas continue en 0. La différentiabilité en a ne permettrait pas d'assurer la continuité de f. Ce qui sera l'un des intérets de la différentiabilité (propriété à suivre dans le cours). Voir également cours CTES de Mme Dulac cours à conserver !

Exemple 20.17.

1. Différentielle de γ: $\left|\begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{K}) & \to & M_n(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto & A^2 \end{array}\right.$ corrigé cassette 1 calcul différentiel (Licence) ou TD.
2. Différentielle de ?: $\left|\begin{array}{ccc} C^1 & \to & C^0 \\ y & \mapsto & y'+y^2 \end{array}\right.$ corrigé même cassette.

20.2.1.2 Unicité

Proposition 20.18. *Si $f: U \to F$ est différentiable en a.*
elle admet une et une seule différentielle en a ($d_a f$ est unique). Autrement dit, si la différentielle en un point existe, elle est unique. C'est parce que U est un ouvert que l'on a l'unicité.

20.2.1.3 Relation entre différentielle et dérivée directionnelle

Proposition 20.19. *Si $f: U \to F$ est différentiable en a alors f admet une dérivée directionnelle i.e. $\frac{df}{d\vec{k}}(a)$ i.e. $f'(a;\vec{k})$ existe et de plus l'on a :*
$d_a f(\vec{k}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t\vec{k})-f(a)}{t} = \frac{df(a+t\vec{k})}{dt}(0_{\mathbb{K}}) = \frac{df}{d\vec{k}}(\vec{a}) = f'(a;\vec{k})$.
Relation entre différentielle en un point et dérivée directionnelle, autre notation :
$\frac{df(a+t\vec{k})}{dt}(0_{\mathbb{K}}) = \frac{df(\vec{a}+t\times\vec{k})}{d(\vec{k})}$ *?*
Autrement dit, c'est la dérivée en $0_{\mathbb{K}}$ de la fonction $t \to f_0(a+t\vec{k})$.

Démonstration. CTES Calcul différentiel 2004-2005 + note jointe. □

Remarque 20.20.

1. La dérivée au sens de Gâteaux n'est pas équivalente à la dérivabilité au sens de Fréchet. La dérivabilité au sens de Gâteaux peut avoir lieu, sans que la dérivabilité au sens de Fréchet soit vraie. En fait l'existence de la dérivée au sens de Gâteaux au point a n'implique pas la continuité de f au point a. (Voir CTE + exercices page 11, 35 et 36).
2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il n'y a qu'une possibilité pour la dérivabilité au sens de Fréchet.
3. Mais si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on peut considérer l comme $\mathbb{C}$-linéaire ou bien l est seulement $\mathbb{R}$-linéaire en considérant les structures réelles sous-jacentes (CTES Cours calcul différentiel 2004-2005 page 11).
4. Les deux notions sont complétement différentes.
5. Les deux définitions (? Gâteaux et Fréchet) coïncident si $f: \mathbb{K} \to F$.
6. Attention, la réciproque n'est pas vraie : si f admet en (a) une dérivée directionnelle (même linéaire et continue), on ne peut pas conclure que f est différentiable en a (voir exercice : $x \to \frac{x^3y}{x^4y^2}$ G-dérivable en (0;0) mais non différentiable en (0;0) preuve CTES calcul différentiel page 35 n°1). Sauf si $E = \mathbb{R}$, il y a équivalence entre différentiabilité et dérivabilité. $\mathrm{Df}(t_0)\cdot\delta = \delta \times f'(t_0)$, $f'(t_0) = \mathrm{Df}(t_0)\cdot 1 = d_t f(1)$.
7. En revanche l'existence de la différentielle assure la continuité et la linéarité de la dérivée directionnelle. Par conséquent, la différentiabilité entraîne la dérivabilité au sens de Gâteaux.

20.2.1.4 Différentiabilité et continuité en un point

Proposition 20.21. *Soit $f: U \to F$ une application.*
(f différentiable en a) $\Rightarrow$ (f continue en a)

Démonstration. CTES 2004-2005 page 10 + note page 4. □

20.2.2 Différentiabilité et Différentielle sur un ouvert d'un e.v.n.

Définition 20.22. *Soit U un ouvert non vide d'un e.v.n. E, F un e.v.n. et $f: U \to F$ une application.*

(On dit que f est différentiable sur un ouvert U) $\Leftrightarrow$ (f est différentiable en tout point de U).

Définition 20.23. *Soit U un ouvert non vide d'un e.v.n. E, F un e.v.n. et $f: U \to F$ une application.*

Si f est différentiable sur un ouvert U l'application : $\begin{array}{ccc} U & \to & \mathcal{L}(E,F) \\ x & \mapsto & d_x f \end{array}$ *est appelée différentielle de f sur U. On la note df ainsi ($df(x) = d_x f$).*

Remarque 20.24. La différentielle est parfois appelée dérivée forte ou F-dérivée ou dérivée au sens de Fréchet (lu pour la première fois dans cours CTES 2004-2005 page 10).

20.2.3 Différentielle partielle

Soient $E = E_1 \oplus ... \oplus E_n$ une somme directe d'e.v.n. (ou plutôt l'espace produit $E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$ ce qui en principe revient au même voir annexe A Cours Calcul différentiel Avez), de normes respectives $\|.\|_1$, ..., $\|.\|_n$, U un ouvert de E, l'application $f: \left| \begin{array}{ccc} U & \to & F \\ (x_1,...,x_n) & \mapsto & f(x_1,...,x_n) \end{array} \right.$, $a = (a_1, ..., a_n)$ un point de E et $I_r: \left| \begin{array}{ccc} E_r & \to & E \\ x_r & \mapsto & (a_1,...,a_{r-1},x_r,a_{r+1},...,a_n) \end{array} \right.$. Ainsi $f_r = f \circ I_r$ est l'application partielle déduite de f sur U. Elle est définie sur l'ouvert $I^{-1}(U)$ de E_r, qui contient a_r.

Définition 20.25. *Soit f_r une application partielle déduite de f sur U. Si f_r est différentiable en a_r sa différentielle en a_r est appelée* ***différentielle partielle*** *de f par rapport à la $r^{\text{ème}}$ variable au point a. On la note $d_{r,a}f$ ou $D_r f(a)$ ainsi $d_{r,a}f = d_{a_r}f_r$ et $d_{r,a}f \in \mathcal{L}(E_r, F)$.*

Remarque 20.26. Si $E_1 = ... = E_n = \mathbb{K}$ $d_{r,a}f(h) = \frac{\partial f}{\partial x_r}(a) \times h_r$ dérivée partielle de f par rapport à x_r la $r^{\text{ème}}$ variable au point a.

Exemple 20.27. Mettre un exemple.

Proposition 20.28. *Important. S'il existe un ouvert $V \subset U$ tel que les fonctions dérivée partielles $X \in V \mapsto \partial_1 f(x)$ et $X \in V \mapsto \partial_2 f(x)$ existent sur V et sont continues au point $a \in V$ alors f est dérivable (au sens de Fréchet) au point a.*

De plus si les dérivées partielles sont continues sur V alors l'application $X \in V \mapsto Df(X)$ est continue sur V, i.e. $f \in \mathcal{C}^1(V)$.

20.2.4 Remarques générales

Remarque 20.29. Attention si la différentielle en a d'une application f est une application linéaire, ce n'est pas le cas de la différentielle de f.

1. La différentiabilité et la différentielle d'une fonction en a sont indépendantes des normes choisies sur E et F pour les définir, si ces normes sont respectivement équivalentes entre elles. Considérons $\mathcal{E} = (E; \|.\|_E)$, $(F; \|.\|_F)$ et $\mathcal{E}' = (E; \|.\|'_E)$, $(E; \|.\|'_F)$ des e.v.n. tels que les normes sur E et sur F soit équivalentes. Alors :
   i. tout ouvert U de $\mathcal{E}$ est aussi un ouvert de $\mathcal{E}'$.
   ii. si f est $(\|.\|_E; \|.\|_F)$-différentiable sur U, f est aussi $(\|.\|'_E; \|.\|'_F)$-différentiable sur U.
   iii. si l est la $(\|.\|_E; \|.\|_F)$-différentielle de f en a, l est aussi la $(\|.\|'_E; \|.\|'_F)$-différentielle de f en a.

   et réciproquement.
2. Conséquence de la remarque précédente : Si en particulier E et F sont finis, la différentiabilité ne dépend pas des normes.
3. De même si E et F sont finis, l'hypothèse de continuité de l dans la définition est superflue, car dans ce cas toutes les applications linéaires sont continues.

4. La notion de différentielle, s'étend aux espaces affines. Soit U un ouvert d'un espace affine normé E (E dont l'espace vectoriel associé $\vec{E}$ est normé). Soit F un espace affine normé (i.e. dont l'e.v. associé $\vec{F}$ est normé). On dit que l'application $f: U \to F$ est différentiable en a ($a \in U$) si et seulement s'il existe $l \in \mathcal{L}(\vec{E}, \vec{F})$ telle que $f(a+\vec{h}) = f(a) + l \cdot \vec{h} + o(\|\vec{h}\|)$. Voir cours de licence de géométrie affine.

20.2.5 Cas $E = \mathbb{K}$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

Note 20.30. On obtient une relation très utile entre dérivée et différentielle

Théorème 20.31.

1. *(f différentiable en a)* $\Leftrightarrow$ *(f dérivable en a).*
2. *et* $d_a f(h) = f'(a) \times h$. *ainsi* $d_a f(1) = f'(a)$.

20.2.6 Cas d'une application constante

Proposition 20.32. *Soit U un ouvert non vide d'un e.v.n. E, F un e.v.n. et* $f: U \to F$ *une application.*

(f constante sur U) $\Rightarrow$ *(f est différentiable sur U et* $df = 0_{U \to F}$ *)*

où est l'application nulle de E dans F.

Remarque 20.33. La réciproque n'est vraie que si U est un ouvert connexe.

20.2.7 Cas d'une application linéaire

Proposition 20.34. *Soit U un ouvert non vide d'un e.v.n. E, F un e.v.n. et* $f: U \to F$ *une application.*

(Si $f \in \mathcal{L}(E; F)$ *i.e. f linéaire continue)* $\Rightarrow$ *(f est différentiable sur E et* $d_a f = f, \forall a \in E$*).*

20.2.8 Cas d'une application bilinéaire

Proposition 20.35. *Soient* E_1, E_2 *et F 3 e.v.n.,* $E = E_1 \times E_2$.

(Si $f \in \mathcal{L}(E; F)$ *i.e. f bilinéaire continue)* $\Rightarrow$ *(f est différentiable sur E et* $d_a f(h) = f(h_1, a_2) + f(a_1, h_2), \forall a = (a_1, a_2) \in E$ *et* $\forall h = (h_1, h_2)$ *).*

20.2.9 Généralisation : Cas d'une fonction n-linéaire

Proposition 20.36. *Soient* $E_1, ..., E_n$ *et F n e.v.n.,* $E = E_1 \times ... \times E_n$.

(Si $f \in \mathcal{L}(E; F)$ *i.e. f n-linéaire continue)* $\Rightarrow$ *(f est différentiable sur E et* $d_a f(h) = \sum_{k=1}^{n} f(a_1, ..., a_{k-1}, h_k, a_{k+1}, ..., a_n), \forall a = (a_1, ..., a_n) \in E$ *et* $\forall h = (h_1, ..., h_n)$ *).*

20.2.10 Trace d'une application différentiable

20.2.11 Linéarité de la différentielle en un point a (sur l'ensemble des fonctions différentiables)

Proposition 20.37. *L'ensemble des applications différentiables en a ou sur U est un* $\mathbb{K}$*-e.v..*

En effet on montre que :

1. $d_a(f+g) = d_a f + d_a g$.
2. $d_a(\lambda f) = \lambda\, d_a f$.

Démonstration. Sans doute évidente. □

20.2.12 Différentielle d'une application composée

Proposition 20.38. *Soient E, F et G des $\mathbb{K}$-e.v.n., U un ouvert de E, $f: U \to F$ une application différentiable sur U telle que $f(U) \subset F$ et $g: F \to G$ telle que g soit différentiable sur F.*
alors $g \circ f$ est différentiable sur U et $d_a(g \circ f) = d_{f(a)}g \circ d_a f$.

Démonstration. Voir Cours de calcul différentiel Avez page 14. Dans le cours de licence de lyon, il semble que la démonstration soit faite pour une seule norme ! □

Application : cas particuliers et définition :

- **Cas où g est une application linéaire continue :**
  $g \in \mathcal{L}(E, F)$ si f est différentiable en a on a : $d_a(g \circ f) = g \circ d_a f$.
- **Cas où $E = \mathbb{K}$:**
  $f: \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$ si g est différentiable en $f(a)$ alors $d_a(g \circ f) = f'(a) \times d_{f(a)}g$ ou $(g \circ f)'(a) = (f'(a) \times d_{f(a)}g)(1)$.
- **Cas où $E = F = \mathbb{K}$:**
  $d_a(g \circ f) = f'(a) \times (g' \circ f(a)) \times \mathrm{Id}_{\mathbb{K}}$ i.e. $(g \circ f)'(a) = (f'(a) \times g' \circ f(a))$.
- **Application tangente :**

  Définition 20.39. *Soit U un ouvert de E et $f: U \to F$ différentiable sur U. L'application* $Tf: \left| \begin{array}{ccc} U \times E & \to & F^2 \\ (a; h) & \mapsto & (f(a); d_a f(h)) \end{array} \right.$ *est appelée application tangente.*

  Interprétation géométrique :

20.2.13 Cas d'une application dans une somme directe (espace produit)

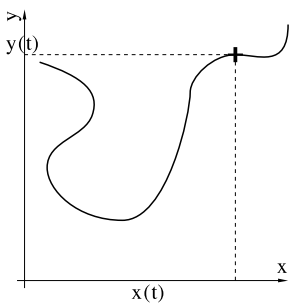


Figure 20.1. Espace à 2 dimensions

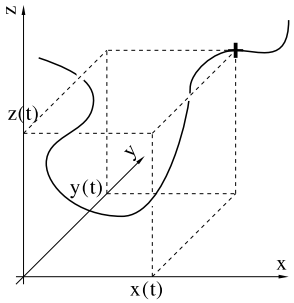


Figure 20.2. Espace à 3 dimensions

On aurait pu simplement définir F par un espace produit ! (à vérifier !). Cette partie est tirée du livre de calcul différentiel d'Avez : en fait Avez fait référence à l'espace $F_1 \times F_2 \times ... \times F_n$ lorsqu'il écrit $F_1 \oplus ... \oplus F_n$ sinon cela n'a pas de sens avec la définition qu'il donne de F.

Soient $F = F_1 \oplus ... \oplus F_n$ une somme directe d'e.v.n., de normes respectives $\|.\|_1$, ..., $\|.\|_n$, la projection $p_r: \left| \begin{array}{ccc} F & \to & F_r \\ (x_1, ..., x_r, ..., x_n) & \mapsto & x_r \end{array} \right.$, l'application injective $i_r: \left| \begin{array}{ccc} F & \to & F_r \\ x_r & \mapsto & (0, ..., x_r, ..., 0) \end{array} \right.$, U un ouvert de E et $f: \left| \begin{array}{ccc} U & \to & F \\ x & \mapsto & (f_1(x), ..., f_n(x)) \end{array} \right.$. On désignera par f^r la $r^{\text{ème}}$ composante de f : $f = (f^1, ..., f^r, ..., f^n)$. Ainsi $f_r = p_r \circ f$ et $f = \sum_{r=1}^{n} i_r \circ d_a f^r$.

Théorème 20.40. *Soit E un e.v.n., U un ouvert de E, $F = F_1 \oplus ... \oplus F_n$ une somme directe d'e.v.n. et $f: \left| \begin{array}{ccc} U & \to & F \\ x & \mapsto & (f_1(x), ..., f_n(x)) \end{array} \right.$.*

(f différentiable en un point a de U (resp. sur U)) $\Leftrightarrow$ *($f^1, ..., f^r, ..., f^n$ sont différentiables en a (resp. sur U)). De plus* $d_af = \sum_{r=1}^{n} i_r \circ d_af^r$ *ou* $d_af = (d_af^1, ..., d_af^n)$.

Démonstration. Avez page 15. □

Remarque 20.41. Soit f: $\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ x & \mapsto & (f^1(x), ..., f^m(x)) \end{array}\right.$, si ($f$ est différentiable en (a)) $\Rightarrow$ la $r^{\text{ème}}$ ligne de sa matrice jacobienne en (a) est la matrice jacobienne de f^r en (a).

20.2.14 Formule de Leibniz

Proposition 20.42. *Soient E, F_1, F_2, G des e.v.n., U un ouvert de E, $f: U \to F_1$, $g: U \to F_2$ deux applications différentiables en un point (a) de U (ou sur U) et $k: F_1 \times F_2 \to G$ une application bilinéaire continue alors $p = k \circ (g; f)$ qui est l'application :* $\left|\begin{array}{ccc} U & \to & G \\ x & \mapsto & k(f(x); g(x)) \end{array}\right.$ *est différentiable en (a) (ou sur U). $d_ap(h) = k(d_af(h); g(a)) + k(f(a); d_ag(h))$.*

application : cas particuliers

- Cas où $E = F_1 = F_2 = G = \mathbb{K}$ et $k = u \times v$
  $p'(a) = (f' \times g + f \times g')(a)$
  $(f \circ g)' = f' \times g + f \times g'$
- Cas où $E = \mathbb{K}$ (k quelconque)
  $p'(a) = k(f'(a); g(a)) + k(f(a); g'(a))$
- Cas où $F_1 = F_2 = G$ (où $G = \mathbb{R}^m$, orienté et muni de son produit scalaire usuel)
  $(f|g)'(a) = (f'|g)(a) + (f|g')(a)$ si on pose $b = (.|.)$.
  $(f \wedge g)'(a) = (f' \wedge g)(a) + (f \wedge g')(a)$ si on pose $b = \wedge$.
- Cas où $F_1 = F_2$ (où F_2 est l'espace $\mathbb{R}^m$ orienté et muni de son produit scalaire usuel)
  $(f|g)'(a) = (f'|g)(a) + (f|g')(a)$ si on pose $b = (.|.)$.

20.2.15 Cas d'une application définie sur une somme directe

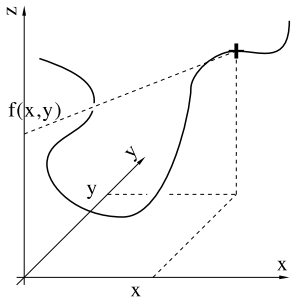


Figure 20.3. Espace de dimension 2

Théorème 20.43. *(Condition nécessaire de différentiabilité) Soit $E = E_1 \oplus ... \oplus E_n$ une somme directe d'e.v.n., U un ouvert de E, F un espace vectoriel normé et f:* $\left|\begin{array}{ccc} U & \to & F \\ (x_1, ..., x_n) & \mapsto & f(x_1, ..., x_n) \end{array}\right.$. *Si f est différentiable en a, alors chacune des différentielles $d_{r,a}f$ existe et si $h = (h_1, ..., h_n)$, $h \in E$. $r \in \{1, ..., n\}$ alors $d_af(h) = \sum_{r=1}^{n} d_{r,a}f(h_r)$.*

Remarque 20.44. La réciproque est vraie si les $d_{r,a}f$ sont continues en a. Voir réciproque cours M. Avez Calcul différentiel page 20 + remarque et contre-exemples. Mais la démonstration nécessite sans doute le théorème de la moyenne, donc ne peut se démontrer à priori. Autrement dit, on obtient une c.n.s. si les différentielles partielles sont continues.

20.3 Matrice jacobienne

20.3.1 Définition

Définition 20.45. *Soit $E = \mathbb{K}^n$ et $F = \mathbb{K}^m$ et f différentiable en un point a de E. On appelle matrice jacobienne de f en a, la matrice (m, n) de l'application $d_a f$ dans les bases canoniques de E et F.*

20.3.2 Calcul de la matrice jacobienne

Soit f: $\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ x & \mapsto & (f_1(x), ..., f_m(x)) \end{array}\right.$ où $x = (x_1, ..., x_n)$. Si f est différentiable sur un ouvert contenant a alors la matrice jacobienne de f est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f^1}{\partial x_2}(a) & ... & .... & .... & .... \\ \frac{\partial f^2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f^2}{\partial x_2}(a) & ... & .... & ... & ... \\ ... & ... & \ddots & & ... & ... \\ ... & ... & ... & \frac{\partial f^i}{\partial x_j}(a) & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & \ddots & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & \frac{\partial f^n}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix}_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}}$$

20.3.2.1 Théorème de changement de variable

Proposition 20.46. *Soient g, ..., g: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ toutes différentiables en (a) et f: $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ une application différentiable en $b = (g_1(a), ..., g_m(a))$. Si $F = f \circ (g_1, ..., g_m)$ alors $d_{i,a}F = \sum_{r=1}^{n} d_{r,b}f \times d_{i,a}g_r$.*

Remarque 20.47. Si les $\frac{\partial f^i}{\partial x_j}$ sont continues alors f est différentiable.

20.4 Théorèmes des accroissements finis

$E \backslash F$	$\mathbb{R}$	$e.v.n.$
$\mathbb{R}$	$f(a) - f(b) = f'(c) \times (b - a)$	$\|f(b) - f(a)\| \leqslant g(b) - g(a)$
$e.v.n.$	$f(a) - f(b) = d_c f(b - a)$	$\|f(b) - f(a)\| \leqslant \sup_{x \in [a;b]} \|d_x f\| \times \|b - a\|$

20.4.1 Cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ $(F = \mathbb{R})$

20.4.1.1 Fonction définie sur $\mathbb{R}$

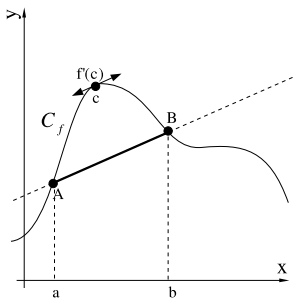


Figure 20.4.

Proposition 20.48. *Soit f une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles, définie et continue sur le segment $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ alors : $\exists c \in]a, b[$; $f(a) - f(b) = f'(c) \times (b - a)$.*

Remarque 20.49. Géométriquement cela signifie qu'il existe un point $C(c,\ f(c))$ de $\mathcal{C}_f$ où la tangente est parallèle au segment $[A, B]$. (A, B points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives a et b).

20.4.1.2 Fonction définie sur un e.v.n.

Remarque 20.50. On retrouve cette propriété pour des fonctions définies sur un e.v.n. et à valeurs dans $\mathbb{R}$: en remplaçant $(f'(c), (b-a))$ par $(d_c f(U), \|b-a\|)$.

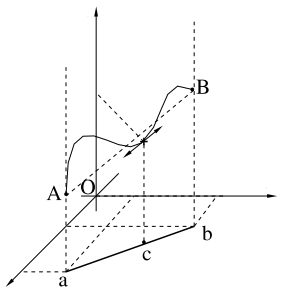


Figure 20.5.

Proposition 20.51. *Soient U un ouvert d'un e.v.n. E, $[a, b]$ un segment de U et $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue sur $[a, b]$ et différentiable sur $]a, b[$, alors :*

$\exists c \in]a, b[;\ f(a) - f(b) = d_c f(u) \times \|b-a\|_E$ *où* $u = \dfrac{b-a}{\|b-a\|_E}$
ou $f(a) - f(b) = d_c f(b-a)$.

20.4.2 Cas des fonctions à valeurs dans un e.v. F quelconque

Remarque 20.52. Mais pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, la propriété géométrique précédente n'est plus valable. (Voir contre-exemple ci-dessous).

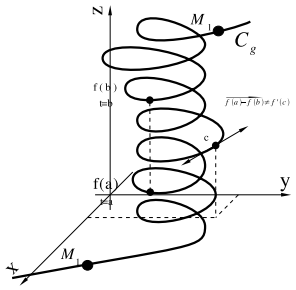


Figure 20.6. Contre-exemple

Autre approche : Supposons que la courbe $\mathcal{C}_f$ ci-contre représente, la trajectoire d'un mobile (M_1). $\|f'\|$ représente alors sa vitesse. Soit un second mobile (M_2) partant du même point A que (M_1) et décrivant la trajectoire représentée par la droite $\mathcal{C}_g$, si $\|g'\| \geqslant \|f'\|$ (Vitesse $M_1 \geqslant$ Vitesse M_2) alors (M_2) s'éloignera plus vite de A que (M_1). (Voir exemple ci-dessous).

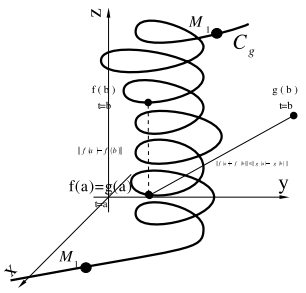


Figure 20.7. Fonction dans un e.v.n.

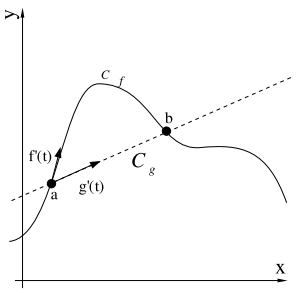


Figure 20.8. Fonction sur et dans $\mathbb{R}$.

20.4.2.1 Applications d'une variable réelle

Note 20.53. Vérifier ces énoncés.

Lemme 20.54. *Soient $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$, où $a<b$, F un e.v.n., $f\colon [a,b]\to F$ et $g\colon [a,b]\to \mathbb{R}$ deux applications continues sur $[a,b]$ et différentiable sur $]a,b[$.*
Si $\forall t\in]a,b[, \|f'(t)\|\leqslant g'(t)$ alors $\|f(b)-f(a)\|\leqslant g(b)-g(a)$.

Proposition 20.55. *(+ forte que la précédente) Soient $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$, où $a<b$, F un e.v.n., $f\colon [a,b]\to F$ et $g\colon [a,b]\to \mathbb{R}$ deux applications continues sur $[a,b]$ mais différentiable sur $[a,b]$ privé d'une ensemble dénombrable de valeurs que nous appellerons $\mathcal{E}$.*
Si $\forall t\in]a,b[, \|f'(t)\|\leqslant g'(t)$ alors $\|f(b)-f(a)\|\leqslant g(b)-g(a)$.

Corollaire 20.56. *Soient F un e.v.n., $f\colon [a,b]\to F$ une application continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Si $:(\exists k\in\mathbb{R};\forall x\in]a;b[, \|f'(x)\|\leqslant k)$ alors $\|f(b)-f(a)\|\leqslant k\times(b-a)$*

20.4.2.2 Applications définies sur un ouvert d'un e.v.n. quelconque

Corollaire 20.57. *Soient E un espace vectoriel normé, U un ouvert non vide de E, $f\colon U\to F$ une application différentiable sur U et $[a,b]$ un segment de U alors $\|f(b)-f(a)\|_F\leqslant \sup_{x\in[a,b]}\|d_xf\|_{\mathcal{L}(E,F)}\times\|b-a\|_E$ ou $\|f(b)-f(a)\|_F\leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\|d_{a+(1-t)(b-a)}f\|_{\mathcal{L}(E,F)}\times\|b-a\|_E$.*

Corollaire 20.58. *Soient $f\colon U\to F$ une application différentiable sur U, $[a,b]$ un segment de U, un point $c\in[a,b]$ alors $\|f(b)-f(a)\|_F\leqslant\|b-a\|_E\times\sup_{x\in]a,b[}\|d_xf-d_cf\|_{\mathcal{L}(E,F)}$.*

Lemme 20.59. *Soient $f\colon U\to F$ une application différentiable sur U, $[a,b]$ un segment de U et $u\in\mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire continue alors $\|f(b)-f(a)-u(b-a)\|\leqslant\|b-a\|\sup_{x\in[a,b]}\|d_xf-u\|$.*

Remarque 20.60. Cas particulier : Prenons $E=\mathbb{K}$ et $b=a+h$. Le corollaire devient :
$x\in[a,b]$ alors $\|f(a+h)-f(a)-h\,f'(c)\|\leqslant|h|\sup_{\theta\in[0,1]}\|f'(a+\theta h)-f'(c)\|$.

20.4.2.3 Applications définies sur un convexe

Note 20.61. Convexe ou connexe ? Un résultat de topologie affine dit que : U convexe $\Rightarrow U$ connexe. On peut donc remplacer la condition U connexe par U convexe et obtenir le même résultat. + Voir contre-exemple livre Avez Calcul diffférentiel page 13 2.2.

Proposition 20.62. *(des accroissement finis) Soient E, F deux e.v.n., U un ouvert connexe de E, $f\colon E\to F$ une application différentiable.*
Si $(\exists k\in\mathbb{R}^{*+};\forall u\in U;\|d_uf\|_F=?k)\Rightarrow(\forall(a,b)\in U^2,\|f(b)-f(a)\|_F\leqslant k\times\|b-a\|_E)$.

Corollaire 20.63. *Soient E,F deux e.v.n., U un ouvert connexe de E, $f\colon U\to F$ une application différentiable sur U.*
Si $(\forall(a,b,c)\in U^3,\|f(b)-f(a)-d_cf(b-a)\|_F\leqslant\sup_{x\in U}\|d_xf-d_c\|\times\|b-a\|_E)$.

20.4.3 Applications

20.4.3.1 Application de différentielle 0: $x\mapsto 0$

Réciproque du théorème vu au chapitre précédent, ce n'est pas tout à fiat une réciproque car dans le précédent théorème la condition de convexité ? connexité n'est pas présente.

Proposition 20.64. *Soient E,F deux e.v.n., U un ouvert connexe de E et $f\colon U\to F$ une application différentiable sur U.*
Si $(\forall u\in U;d_uf=0)\Rightarrow$ (f est constante sur U). 0 est ici l'application nulle

20.4.3.2 Comportement d'une application d'une variable réelle

Théorème 20.65. *Soient $]\alpha,\beta[\subset\mathbb{R}$ et $g:]\alpha,\beta[\to\mathbb{R}$ dérivable à droite sur $]\alpha,\beta[$ alors :*
(g croissante sur $]a,\beta[$)$\Leftrightarrow(\forall x\in]\alpha,\beta[, g'_d(x)\geqslant 0)$.

20.4.4 Relation entre différentiabilité et Lipschitziennité

20.4.4.1 Condition suffisante pour qu'une application soit lipschitzienne.

Proposition 20.66. *Soient un ensemble convexe A tel que $A\subset\mathcal{O}$ avec $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}\times E$, $f:\mathcal{O}\to E$ une application et $f_t:\left|\begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & f(t,x)\end{array}\right.$ différentiable sur E, de différentielle D_2f.*
Si (D_2f est bornée)$\Rightarrow$ (f est Lipschitzienne par rapport à x dans A).

20.4.4.2 Condition suffisante pour qu'une application soit localement lipschitzienne

Proposition 20.67. *Soient $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}\times E$, $f:\mathcal{O}\to E$ une application et $f_t:\left|\begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & f(t,x)\end{array}\right.$ différentiable sur E, de différentielle D_2f.*
Si (D_2f est localement localement bornée dans $\mathcal{O}$ ou D_2f est continue dans $\mathcal{O}$)$\Rightarrow$ (f est Lipschitzienne par rapport à x dans A).

20.5 Difféomorphisme

Définition 20.68. *Soient E,F deux espaces normés, U un ouvert de E, V un ouvert de F.*
*On dit qu'une application $f:U\to V$ est un **difféomorphisme** si et seulement si f est bijective et si f puis $f^{-1}:V\to U$ (son application inverse) sont différentiables sur U et V.*

Définition 20.69. *On dit qu'un difféomorphisme f est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si f et f^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$.*

Définition 20.70. *Soient E,F deux espaces normés, U un ouvert de E et $f:U\to F$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On dit que f est un **difféomorphisme local** au point a si et seulement s'il existe un ouvert U_1 avec $a\in U_1$ et $U_1\subset U$ dont l'image $V_1=f(U_1)$ soit un ouvert contenant $f(a)$ tel que $f_{|U_1}:U_1\to V_1$ soit un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$.*

Remarque 20.71. Si f est un difféomorphisme local au point a alors $\forall x\in U_1$, $d_xf\in\mathrm{Is}(E,F)$; en particulier si $E=\mathbb{R}^n$ et $F=\mathbb{R}^m$, on a $n=m$ et la matrice jacobienne de f est inversible en tout point x de U_1.

20.6 Théorème d'inversion locale

Remarque 20.72. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$, $a\in U$ et $f:U\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f'(a)\neq 0$. Il existe donc un intervalle ouvert I contenant a où f' garde un signe constant (positif par exemple). Ainsi f est croissante sur I. On sait que $f(I)=J$ est un intervalle, ouvert contenant $f(a)$ et que f est un homéomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de I sur J, avec $(f^{-1})y=\frac{1}{f'(x)}$ pour $y=f(x)$. En particulier pour $y\in J$ l'équation $y=f(x)$ a une solution unique dans I $x=f^{-1}(y)$. C'est ce résultat qu'on propose de généraliser.

Théorème 20.73. *Soient E,F deux espaces de Banach, U un ouvert de E, $a\in U$ et $f:U\to F$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose $d_af\in\mathrm{Is}(E,F)$. Alors f est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme local au point a. De plus la différentielle de f^{-1} au point $y=f(x)\in J$ est donnée par $D_yf^{-1}=[D_xf]^{-1}$*

Démonstration. Avez page 28. □

Remarque 20.74. Le théorème précédent affirme que l'équation $f(x) = y$ admet une solution unique, pourvu que y soit choisi assez voisin de $f(a)$ et que x soit cherché voisin de a.

Corollaire 20.75. *Soient E, F deux espaces de Banach, U un ouvert de E et $f\colon U \to F$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est un difféomorphisme de clase $\mathcal{C}^1$ de U sur un ouvert de F.*
2. *f injective et $\forall x \in U, d_x f \in \mathrm{Is}(E, F)$.*

20.7 Théorème des fonctions implicites

Remarque 20.76. Soient E, F, G trois espaces de Banach, U un ouvert de $E \times F$ $(a, b) \in U$ et $f\colon U \to G$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Dans l'équation $f(x, y) = f(a, b)$ suppose que a varie dans un voisinage de a. On cherche à déterminer y en fonction de a. On a résolu ce problème dans le cas particulier où $f(x, y) = x - g(y)$ avec y application de classe $\mathcal{C}^1$ d'un ouvert de F dans E vérifiant $d_b g \in \mathrm{Is}(E, F)$ et $g(b) = a$.

Théorème 20.77. *Soient E, F, G trois espaces de Banach, U un ouvert de $E \times F$ $(a, b) \in U$ et $f\colon U \to G$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $D_2 f(a, b) \in \mathrm{Is}(F, G)$. Alors il existe un ouvert $V = J \times K$ de (a, b) contenu dans U et une application $g\colon J \to K$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que les conditions suivantes soient équivalentes :*

a) $(x, y) \in J \times K$ *et* $f(x, y) = f(a, b)$.

b) $x \in J$ *et* $y = g(x)$.

En particulier $f(x, g(x)) = f(a, b)$ pour $x \in J$. Avec $d_x g = -\left[D_2 f(x, g(x))\right]^{-1} \circ D_1 f(x, g(x))(x)$.

Définition 20.78. *La fonction $y = g(x)$ s'appelle* ***fonction implicite*** *définie par l'équation $f(x, y) = f(a, b)$.*

Remarque 20.79. Si $E = \mathbb{R}^n$, $F = G = \mathbb{R}$ et $f = (f_1, ..., f_p)$ $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$. La condition de $D_2 f(a, b)$ inversible s'exprime par le Jacobien partiel : $\det\Big(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a, b)\Big)_{1 \leqslant i, j \leqslant p}$.

Exemple 20.80. $f(x, y) = x^2 + y^2$.

20.8 Différentielle d'ordre supérieur

Dans ce chapitre, on définit les notions de différentielles d'ordre n et d'applications de classe $\mathcal{C}^n$. On y aborde également les règles de calcul les concernant.

Dans la suite du cours, on adoptera les conventions suivantes : E, F sont des espaces vectoriels normés, U un ouvert de E et $f\colon U \to F$ une application différentiable.

La différentielle de f est une application $U \to \mathcal{L}(E, F)$. On peut donc se demander si df est différentiable en a, $a \in U$ ou même en tout point de U.

Par convention : on note $\mathcal{L}^2(E, F)$ l'ensemble des application multilinéaire de $E^n \to F$. Propriété : $\mathcal{M}_n(E, F)$ est un sous-espace vectoriel normé de $\mathcal{F}(E^p, F)$.

20.8.1 Différentielle d'ordre 2

20.8.1.1 Définition

Définition 20.81.

1. *Soit a un point de U. On dit que f est deux fois différentiable en a si et seulement si :*
   - *df est définie sur un ouvert U' de U (contenant a)*

– df *est différentiable en* a.

La différentielle de df *en* a *est notée* $d_a^2 f$, *elle appartient à* $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$. *On l'appelle* ***différentielle seconde de f en a*** ($d_a^2 f = d_a(df)$).

2. *On dit que* f *est 2 fois différentiable dans* U *si et seulement si* df *est différentiable en chaque point de* U.

   Dans ce cas, l'application $d^2 f$: $\left|\begin{array}{ccc} U & \to & \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E,F)) \\ x & \mapsto & d_x^2 f \end{array}\right.$ *est appelée* ***différentielle seconde de f***. ($d^2 f(x) = d_x^2 f$).

Remarque 20.82. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors $df: x \mapsto d_x f$ or $d_x f = f$ donc f est constante d'où $d^2 f = 0$.

20.8.1.2 Interprétation de $d_a^2 f$: Application bilinéaire associée à $d_a^2 f$

Rappelons que $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$ est canoniquement isomorphe à l'e.v.n. $\mathcal{L}^2(E, F))$ (ensemble des applications bilinéaires sur E à valeurs dans F, cela veut dire qu'une application de $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$ permet de définir de manière très simple une application ayant les propriétés d'une application bilinéaire). L'image de $d_a^2 f \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$ dans cet isomorphisme ($\widehat{\ }$) est donc une application bilinéaire de $E \times E \to F$ définie par $\widehat{d_a^2 f}$: $\left|\begin{array}{ccc} E \times E & \to & F \\ (h,k) & \mapsto & (d_a^2 f(h))(k) \end{array}\right.$ $\widehat{d_a^2 f}$ est appelé application bilinéaire associée à $d_a^2 f$. Conséquence, on peut travailler indifféremment avec $d_a^2 f$ ou $\widehat{d_a^2 f}$. On peut même utiliser la notation $d_a^2 f$ pour $\widehat{d_a^2 f}$ (dans ce cas $d_a^2 f$ représente à la fois la différentielle seconde de f en a et l'application bilinéaire associée $\widehat{d_a^2 f}$). On les différencie par les éléments qu'elles manipulent $(d_a^2 f(h))(k), d_a^2 f \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$ et pour $d_a^2 f(h,k), d_a^2 f \in \mathcal{L}^2(E, F)$.

$\widehat{d_a^2 f}(h;k) = (d_a^2 f(h))(k) = (d_a d f(h))(k)$.

20.8.1.3 Calcul de $d_a^2 f$

Proposition 20.83. $\widehat{d_a^2 f}(h;k) = (d_a^2 f(h))(k) = \left.\frac{d^2 f(a + x_t h + x_s k)}{dt\, ds}\right|_{\substack{s=0 \\ t=0}}$ *i.e.* $\frac{d^2 f(a + x_t h + x_s k)}{dt\, ds}(0,0)$

20.8.1.4 Théorème de Schwarz

Proposition 20.84. *Si* $f: U \to F$ *est deux fois différentiable en* a ($a \in U$) *alors :*

1. $\lim\limits_{\substack{v \to 0 \\ u \to 0}} \frac{\|f(a+u+v) - f(a+u) + f(a) - d_a^2 f(u,v)\|}{(\|u\| + \|v\|)^2} = 0$
2. *L'application* $d_a^2 f \in \mathcal{L}^2(E, F)$ *est une application bilinéaire symétrique.*
   $d_a^2 f(u,v) = d_a^2 f(v,u)$

Rappel : $d_a^2 f$ désigne aussi bien la différentielle seconde de f en a que l'application bilinéaire associée (c'est la suite de l'énoncé qui nous indique qu'il s'agit de cette dernière).

Rajouter règle de calcul comme pour les différentielles d'ordre n.

20.8.2 Différentielle d'ordre n

20.8.2.1 Définition

Convention : f est une fois différentiable si et seulement si f est différentiable . $d^1 f = df$.

Définition 20.85. *Soit* $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$,

1. *Soit* a *un point de* U. *On dit que* f *est* n *fois différentiable en* a *si et seulement si :*
   – $d^{(n-1)} f$ *est définie sur un ouvert* U' *de* U *(contenant* a*)*

– $d^{(n-1)}f$ *est différentiable en* a.

La différentielle de $d^{(n-1)}f$ *en* a *est notée* $d_a^n f$, *elle appartient à* $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, ...\mathcal{L}(E, F)...)$. *On l'appelle* ***différentielle d'ordre n de f en a*** $(d_a^n f = d_a(d^n f))$.

2. *On dit que* f *est* n *fois différentiable dans* U *si et seulement si* $d^{(n-1)}f$ *est différentiable en chaque point de* U.

   Dans ce cas, l'application $d^n f: \left| \begin{array}{ccc} U & \to & \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, ...\mathcal{L}(E, F)...) \\ x & \mapsto & d_x^n f \end{array} \right.$ *est appelée* ***différentielle d'ordre n de f***. $(d^n f(x) = d_x^n f)$.

3. *On pose* $d^0 f = f$.

20.8.2.2 Interprétation de $d_a^n f$: Application multilinéaire associée à $d_a^n f$

Rappelons que $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, ..., \mathcal{L}(E, F)...)$ est canoniquement isomorphe à l'e.v.n. $\mathcal{L}^n(E, F)$) (ensemble des applications n-linéaires sur E à valeurs dans F, cela veut dire qu'une application de $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$ permet de définir de manière très simple une application ayant les propriétés d'une application n-linéaire). En ayant toujours présent à l'esprit les remarques faites précédement, on peut définir l'application $\widehat{d_a^n f}: \left| \begin{array}{ccc} E^n & \to & F \\ (h_1, ..., h_n) & \mapsto & (...((d_a^n f(h_1))(h_2))(h_3)...)(h_n) \end{array} \right.$ ce n'est plus la différentielle d'ordre n de f, mais une application multinéaire définie à partir de celle-ci et $d_a^n f(h_1, ..., h_n) = (...((d_a^n f(h_1))(h_2))(h_3)...)(h_n)$. $\widehat{d_a^n f}$ est appelé application n-linéaire associée à $d_a^n f$. Conséquence, on peut travailler indifférement avec $d_a^n f$ ou $\widehat{d_a^n f}$. On peut même utiliser la notation $d_a^n f$ pour $\widehat{d_a^n f}$ (dans ce cas $d_a^n f$ représente à la fois la différentielle seconde de f en a et l'application bilinéaire associée $\widehat{d_a^n f}$). On les différencie par les éléments qu'elles manipulent.

20.8.2.3 Calcul de $d_a^n f$

Proposition 20.86. $(...((d_a^n f(h_1))(h_2))(h_3)...)(h_n) = \frac{d^n f(a + \sum_{i=1}^n x_{t_i} h_i)}{dt_n ... dt_1}(0, ..., 0)$.

20.8.2.4 Théorème de Schwarz

20.8.2.5 Propriétés

Proposition 20.87. *Si* $f: U - F$ *est* n *fois différentiable en* a $(a \in U)$ *alors :*
L'application $d_a^n f \in \mathcal{L}^n(E, F)$ *est une application* n*-linéaire symétrique.*
Autrement dit, pour toute permutation σ *de* $\{1, ..., n\}$ *on a :*
$d_a^n f(h_1, ..., h_n) = d_a^n f(h_{\sigma(1)}, ..., h_{\sigma(n)})$

Théorème 20.88. *Les deux propositions suivantes sont équivalentes.*

1. f *est différentiable en* a $(a \in U)$
2. f *est différentiable dans un voisinage ouvert de* U' $(U' \subset U)$ *contenant* a, $df: U' \to \mathcal{L}(E, F)$ *est* $(n-1)$ *fois différentiable en* a *et* $d^n f = d^{(n-1)}(df)$.

Conséquence : $d^m(d^n f) = d^{m+n} f$.

20.8.2.6 Règles de calcul

1. Applications linéaires continues : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ (une application linéaire continue $E \to F$) alors $d^n f = 0, \forall n \geqslant 2$.
2. Applications bilinéaires continues : Soit $f \in \mathcal{L}(E_1, E_2, F)$ (une application bilinéaire continue $E_1 \times E_2 \to F$) alors $d^n f = 0, \forall n \geqslant 3$.
3. Différentielle d'ordre supérieur d'un produit
4. ?
5. Différentielle d'application composée :

Proposition 20.89. *Soient E, F, G trois e.v.n. sur Λ, $\mathcal{O}$ un ouvert de E, $\mathcal{O}'$ un ouvert de F. Si $f: \mathcal{O} \to \mathcal{O}'$ est une application n fois différentiable dans $\mathcal{O}$ et $g: \mathcal{O}' \to G$ est une application n fois différentiable dans $\mathcal{O}'$ alors $g \circ f$ est n fois différentiable dans $\mathcal{O}$.*

6. Différentielle d'une combinaison linéaire d'application

Proposition 20.90. *Soient E, F deux e.v.n. sur Λ, $\mathcal{O}$ un ouvert de E, $\lambda, \mu \in \Lambda$. Si f et g sont n fois différentiable dans $\mathcal{O}$ alors $d^n(\lambda f + \mu g) = \lambda\, d^n f + \mu\, d^n g$.*

20.8.3 Application de classe $\mathcal{C}^1, ...; \mathcal{C}^n; ...; \mathcal{C}^\infty$

20.8.3.1 Définition

Définition 20.91. *Soit E, F deux e.v.n. sur Λ, U un ouvert de E et $f: U \to F$ une application.*

1. *On dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ dans $U \Leftrightarrow$ $d^n f$ existe et est continue sur U (f est différentiable sur U et $d^n f$ est continue sur U).*
2. *On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans U ou f est indéfiniment différentiable $\Leftrightarrow$ f est de classe $\mathcal{C}^n, \forall n \in \mathbb{N}$.*

Remarque 20.92.

1. f est de classe $\mathcal{C}^0$ sur U signifie f est continue sur U.
2. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U signifie f est continuement différentiable sur U.

20.8.3.2 Les espaces $\mathcal{C}^\infty(U, F)$

1. On note $\mathcal{C}^n(U, F)$, l'ensemble $\{f: U \to F;\ f \text{ est de classe } \mathcal{C}^n\}$.
2. La linéarité de la différentiation permet de montrer que $\mathcal{C}^n(U, F)$ est un e.v. sur Λ.
3. L'intersection $\bigcap_{n>0} \mathcal{C}^n(U, F)$ n'est autre que l'ensemble $\mathcal{C}^\infty(U, F)$.

20.8.3.3 Propriété

Théorème 20.93. *Soit $F = F_1 \times F_2$ et $f = (f_1, f_2)$ alors :*
f est de classe $\mathcal{C}^n \Leftrightarrow f_1, f_2$ sont de classe $\mathcal{C}^n$.

Proposition 20.94. *(Composition d'applications $\mathcal{C}^n$) Soient f, g deux applications de classe $\mathcal{C}^n \Rightarrow$ $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$.*

20.8.3.4 Cas où $E = \Lambda$

Théorème 20.95. *Soient $f: \Lambda \to F$ une application et $\mathcal{O}$ un ouvert de Λ.*
f est n fois dérivable sur $\mathcal{O} \Leftrightarrow$ f est n fois différentiable sur $\mathcal{O} \Leftrightarrow$ $f^n(x) = d_x^n f(1, ..., 1)$

Théorème 20.96. *En conservant les mêmes hypothèses on a :*
f est de classe $\mathcal{C}^n \Leftrightarrow$ f^n est continue.

20.9 Formules de Taylor

20.9.1 Formule de Taylor asymptotique

Proposition 20.97. *Soient E, F deux espaces normés, U un ouvert de E $a \in U$ et $f: U \to F$ une application différentiable n fois au point a. Alors pour h dans E tel que $a + h \in U$, on a : $f(a + h) = f(a) + D_1 f(a)(h) + \frac{1}{2!} D_2 f(a)(h, h) + ... + \frac{1}{n!} D_n f(a)(h, ..., h) + \|h\|^n \varepsilon(h)$ ou $f(a + h) = f(a) + d_a f(h) + \frac{1}{2!} d_a^2 f(h, h) + ... + \frac{1}{n!} d_a^n f(h, ..., h) + \|h\|^n \varepsilon(h)$. Avec $\varepsilon(0) = 0$ et $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.*

20.9.2 Formule de Taylor avec reste de Lagrange

Lemme 20.98. *Soit f une fonction $(n+1)$ fois dérivable sur un voisinage ouvert de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, à valeur dans un espace normé. On suppose qu'il existe $M>0$ telle que $\|f^{(n+1)}(t)\| \leqslant M$ pour tout $t \in [0,1]$ alors on a : $\|f(t)-f(0)-f'(0)-...-\frac{1}{n!}f^n(0)\| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}$.*

Proposition 20.99. *Soient E, F deux espaces normés, U un ouvert de E et $f: U \to F$ une application différentiable $(n+1)$ fois dans U. On suppose qu'il existe $M>0$ tel que $\|D_{n+1}f(x)\| \leqslant M$ ou $\|d_x^{n+1}f\| \leqslant M$ pour $x \in U$ alors :*

$\|f(a+t\,h)-f(a)-Df(a)(h)-...-\frac{1}{n!}D_nf(a)(h,...,h)\| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}$ ou $\|f(a+t\,h)-f(a)-d_af(h)-...-\frac{1}{n!}d_a^nf(a)(h,...,h)\| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}$.

20.9.3 Formule de Taylor avec reste de Intégrale

Lemme 20.100. *Soit u une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un voisinage ouvert I de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, à valeur dans un espace normé.*

Alors on a : $f(1)-f(0)-f'(0)-...-\frac{1}{n!}f^n(0) = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt$.

Proposition 20.101. *Soient E, F deux espaces normés, U un ouvert de E et $f: U \to F$ une application une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur U.*

$\forall a \in U$ et $h \in E$ tels que $[a, a+h] \subset U$ on a :

$f(a+th) = f(a)+Df(a)(h)+...+\frac{1}{n!}D_nf(a)(h,...,h)+\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}D^{(n+1)}f(a+t\,h)(h,...,h)dt$

$f(a+th) = f(a)+d_af(h)+...+\frac{1}{n!}d_a^nf(h,...,h)+\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}d_a^{n+1}f(a+t\,h)(h,...,h)dt$.

20.10 Maxima et minima relatifs (ou local) libre

Dans tout ce qui suit, on considère des applications continues $f: U \to \mathbb{R}$ où U est un ouvert d'un espace normé E.

20.10.1 Première condition nécessaire

Définition 20.102. *On dit que f admet un **minimum** (resp. un **maximum**) **relatif** (ou **local**) en $a \in U$, s'il existe un voisinage V de a, $V \subset U$ tel que $f(x) \geqslant f(a)$ (resp. $f(x) \leqslant f(a)$) pour tout $x \in V$. On dit que l'extremum est strict si et seulement si $\forall x \in V$, $f(x) > f(a)$ (resp. $f(x) < f(a)$).*

Remarque 20.103. f admet un maximum relatif équivaut à $-f$ admet un minimum relatif

Note 20.104. A mettre avec les fonctions numériques ! Cette définiton garde un sens si U est juste un ouvert d'un espace topologique.

Définition 20.105. *On dit que $a \in U$ est un point critique de f si et seulement si f est différentiable en a et si $d_af = 0$.*

Proposition 20.106. *Si $f: U \to \mathbb{R}$ admet un minimum relatif au point $a \in U$ et si f différentiable. On a alors a est un point critique de f (i.e. $D_af = 0$).*

20.10.2 Condition du second ordre

Rappel : Soit $\tilde{\varphi}$ une forme bilinéaire symétrique de $E \times E \to \mathbb{R}$. A $\tilde{\varphi}$ correspond la forme quadratique associée $\varphi(x) = \tilde{\varphi}(x,x)$. On dit que la forme quadratique ou que la forme bilinéaire symétrique est positive et on écrit $\varphi \geqslant 0$ si $\varphi(x) \geqslant 0, \forall x \in E$.

Pour une forme quadratique positive on a l'inégalité de Cauchy-Schwartz : $|\tilde{\varphi}(x,\ y)|^2 \leqslant \varphi(x) \times \varphi(y), \forall (x,y) \in E$.

Théorème 20.107. *Soient U un ouvert d'un espace normé E et $f: U \to \mathbb{R}$ une fonction 2 fois différentiable en $a \in U$. Si f admet un minimum relatif au point a alors la forme quadratique associée à la forme bilinéaire symétrique $D_2 f(a)$ est positive i.e. $D_2 f(a)(h)(h) \geqslant 0\ \forall h \in E$.*

20.10.3 Condition suffisante pour le minimum relatif

Si E est un espace normé rappelons que l'application $\mathcal{O}$: $\left|\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,E,\mathbb{R}) & \to & \mathcal{L}(E,\mathcal{L}(E,\mathbb{R})) \\ b & \mapsto & b(x,x) \end{array}\right.$ est une isométrie.

Définition 20.108. *Un forme bilinéaire continue b sur $E \times E$ est non dégénérée si $\mathcal{O}(b) \in \mathrm{Is}(E, \mathcal{L}(E,\mathbb{R}))$ i.e. $\mathcal{O}(b): E \to \mathcal{L}(E,\mathbb{R}) = E^*$ est une bijection bicontinue.*

Proposition 20.109. *Soit b une forme bilinéaire continue positive et non dégénérée alors il existe une constante $\delta > 0$ telle que $b(x,x) \geqslant \delta \|x\|^2$ pour tout $x \in E$.*

Proposition 20.110. *(condition suffisante) Soit U un ouvert d'un espace normé E et $f: U \to E$ une fonction 2 fois différentiable en $a \in U$. Si $d_a f = 0$, si $d_a^2 f$ est positive et non dégénérée, alors f admet un minimum strict au point a.*

20.11 Maxima et minima relatifs (ou local) liés (ou avec contraintes)

Introduction : Soit E, F deux espaces normés, U un ouvert de E, $f: U \to \mathbb{R}$ continue et H un sous-ensemble de E. On s'intéresse à l'étude des extremums relatifs de $f_{|U \cap H}$. On dit que ces extremums sont lorsqu'ils existent sont liés (par le fait qu'ils sont tous les deux dans H). Nous nous interessons à deux cas :

1. H est un sous-espace vectoriel de E.
2. $H = g^{-1}(0)$ où $g: U \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathrm{Dg}(x)$ est surjective pour tout $x \in U$.

Proposition 20.111. *Soit E un espace normé, U un ouvert de E, H un sous-espace vectoriel de E, $f: U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Si la restriction de $\mathrm{Df}(a)$ à l'espace H est nulle alors f présente un extremum lié en ?????????????????????????? $\in H$.*

Proposition 20.112. *Sous les mêmes hypothèses, si f est de classe $\mathcal{C}^2$. $D(f_{|H})(a) = 0$ et $D^2 f(a)_{|H \times H}$ est positive et non dégénérée alors f admet un minimum strict au point a.*

Proposition 20.113. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $g: U \to \mathbb{R}^m$ avec $m \leqslant n$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $a \in U$. On suppose que $\mathrm{Dg}(a)$ est surjective alors $\exists U' \in$ ouvert contenant a. Soit θ un diffémorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de U' sur ? ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que si π_1 est la projection canonique de $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ sur $\mathbb{R}^m$? restriction de f à U' soit égale à $\pi_1 \circ \theta$. En particulier on a : $\theta(U' \cap g^{-1}(0)) = \theta(U') \cap \mathbb{R}^{n-1}$.*

Proposition 20.114. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $g: U \to \mathbb{R}^m$ $(m \leqslant n)$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $a \in U$ tel que $f(a) = 0$ et $\mathrm{Dg}(a)$ surjective. Soit également $f: U \to \mathbb{R}$ différentiable en a. Ainsi a extremum relatif et $f_{|g^{-1}(0)}$ $\mathrm{KerDg}(a) \subset \mathrm{KerDf}(a)$.*

Lemme 20.115. *Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et $\gamma \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ $(m \leqslant n)$ surjective alors si $\mathrm{Ker}\gamma \subset \mathrm{Ker}\varphi$, il existe $\lambda \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ unique tel que $\varphi = \lambda \circ \gamma$.*

Proposition 20.116. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $g: U \to \mathbb{R}^m$ $(m \leqslant n)$ une application de classe $\mathcal{C}^1 a \in U$ tel que $f(a) = 0$ et enfin $g: U \to \mathbb{R}$ une application différentiable. On a alors si l'application linéaire $\mathrm{Df}(a)$ est surjective et si a est extremum de $f_{|U \cap g'(0)}$ il existe une application linéaire $\lambda: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ telle que $D(f - \lambda \circ g)(a) = 0$.*

Définition 20.117. *λ s'appelle multiplicateur de Lagrange.*

Chapitre 21
Equation différentielle

21.1 Définitions et remarques générales

Définition 21.1. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, E, F deux $\mathbb{K}$-evn de dimension finies, U une partie de $\mathbb{R} \times E^{n+1}$ et $g: U \to F$ une application.*

1. *On appelle* ***équation différentielle d'ordre n*** *toute équation de la forme : $g(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ où l'inconnue y est une fonction n fois dérivable.*
2. *On appelle* ***solution sur I de l'équation différentielle*** *toute application $y: I \to E$ telle que :*
   - *y soit n fois dérivable sur I,*
   - *$\forall x \in I, (x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x)) \in U$,*
   - *$\forall x \in I, g(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x)) = 0$.*
3. ***Résoudre l'équation****, c'est déterminer toutes les solutions de l'équation.*

Remarque 21.2.

1.
2.
3.
4.

21.2 Equation différentielle d'ordre 1

Définitions

Définition 21.3. *Soient E un espace de Banach sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{O}$ un ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times E$ et f: $\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{O} & \to & E \\ (x, y) & \mapsto & f(x, y) \end{array} \right.$. On appelle équation différentielle du premier ordre, une équation de la forme : $y' = f(x, y)$. y':nombre dérivé d'une fonction φ en x. y:valeur numérique la fonction φ en x.*

Solution d'une équation différentielle du premier ordre

Définition 21.4. *On appelle solution d'une équation différentielle du premier ordre toute fonction φ telle que : $\forall x \in I; \varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.*

φ est une application $I \to E$, dérivable sur I.

(Problème de Cauchy) On appelle problème de Cauchy la recherche d'un intervalle $I = [t_0 - \alpha; t_0 + \alpha], \bar{\mathcal{B}} = \bar{\mathcal{B}}(x_0, \beta)$ tels que $\exists(\varphi: I \to \bar{\mathcal{B}}); \forall t \in I, \left\{ \begin{array}{l} \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \\ \varphi(t_0) = x_0, x_0 \in \bar{\mathcal{B}} \end{array} \right.$.

Existence et unicité d'une solution locale

(Théorème de Caucy-Lipschitz) Soient E un espace de Banach, $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R} \times E$ et f: $\mathcal{O} \to E$ continue sur $\mathcal{O}$ localement Lipschitzienne par rapport à x (i.e. Lipschitzienne dans un voisinage V de (t_0, x_0)) alors $\forall S \subset V$, S est un cylindre de sécurité et $S = I \times \bar{\mathcal{B}}(x_0, \beta)$ et $\exists! \varphi$: $I \to \bar{\mathcal{B}}$;φ est dérivable sur I et $\left\{ \begin{array}{c} \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \\ \varphi(t_0) = x_0 \end{array} \right.$.

(Théorème de Peano) Dans le cas où E est de dimension finie, la continuité de f dans $\mathcal{O}$ suffit à assurer l'existence d'une solution, mais on perd l'unicité. On obtient alors le théorème de Peano.

(Théorème de Peano) Soient $f: \mathcal{O} \to E$ continue dans $\mathcal{O}$, V un voisinage d'un point (t_0, x_0) et $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R} \times E$ alors $\forall S \subset V$, S est un cylindre de sécurité et $S = I \times \bar{\mathcal{B}}(x_0, \beta)$ et $\exists \varphi: I \to \bar{\mathcal{B}}$;$\varphi$ est dérivable sur I et $\left\{ \begin{array}{c} \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \\ \varphi(t_0) = x_0 \end{array} \right.$.

Autre théorème

Soit $f:]a, b[\times E \to E$ continue, bornée et Lipschitzienne alors $\exists! \varphi:]a, b[\to E$ dérivable telle que $\left\{ \begin{array}{c} \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \\ \varphi(t_0) = x_0 \end{array} \right.$.

Exemple d'application

Application du théorème de Cauchy Lipschitz

Application du théorème de Peano

Equation de Ricati

Les théorèmes précédents prouvaient l'existence locale d'une solution, mais cette solution est complète ou partielle, c'est l'objet du chapitre suivant.

Existence et unicité globale d'une solution

Solution prolongeable

Définition 21.5. *Soit U un ouvert d'un espace de Banach E; I, I_1 deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f: I \to U$, $f_1: I_1 \to U$ deux solutions de l'équation différentielle du premier ordre $y' = f(x, y)$.*
*(f **prolonge** f_1) $\Leftrightarrow$ ($I_1 \subset I$ et $f = f_1$ sur I_1) $\Leftrightarrow$ (f_1 est contenue dans f).*

Définition 21.6. *Une solution est **maximale** si elle n'est pas prolongeable.*

Théorème d'unicité globale

Soient E un espace de Banach, $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R} \times E$, $f: \mathcal{O} \to E$ continue sur $\mathcal{O}$ localement Lipschitzienne et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1: I \to E \\ \varphi_2: I \to E \end{array} \right\}$ sont deux solutions de l'équation $y' = f(t, y)$ telle que $(\exists t_0 \in I; \varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$ alors $\varphi_1 = \varphi_2$ sur I.

Théorème d'existence globale

Soient E un espace de Banach, $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R} \times E$, $f: \mathcal{O} \to E$ localement Lipschitzienne, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et (t_0, x_0) un point de $\mathcal{O}$ alors il existe une solution maximale unique $\psi: J \to E$ contenant toute solution de l'équation $y' = f(t, y)$ avec la condition initiale $\psi(t_0) = x_0$.

21.3 Equation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 à coefficients constants

Définitions

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, E un espace de Banach. On appelle équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants, toute équation de la forme : $y' = A(y)$ où y' est la valeur de la dérivée d'une application $\varphi: I \to E$ en un point t, A un endomorphisme de E et y: valeur de l'application au point t.

C'est une équation du premier ordre où $f(x, y) = A(y)$.

On appelle solution de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 à coefficient constant définie précédement : toute application différentiable $f: I \to E$ telle que $\varphi'(t) = A(\varphi(t))$.

Si $E = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, l'équation est équivalente au système : $\frac{d\varphi^i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a^i_j \varphi^j$, $i = 1, ..., n$.

Soit S_I l'espace des solutions de $I \to E$, c'est un espace vectoriel.

Toute solution f est $\mathcal{C}^\infty$ (On démontre cette propriété par récurence).

Théorème fondamental

Soient E un espace de Banach, A un endomorphisme de E, x_0 un point de E, I un intervalle de $\mathbb{R}$ (quelconque) et t_0 un éléments de I. alors il existe une application f différentiable unique vérifiant : $\begin{cases} \varphi'(t) = A(f(t)) \\ f(t_0) = x_0 \end{cases}$ cette application est : $f : t \mapsto \exp((t-t_0)A)(x_0)$. On dit que f est la solution définie sur I de l'équation $y' = A(y)$, qui vérifie les conditions initiales $f(t_0) = x_0$.

Remarques : Les solutions maximales de l'équation $y' = A\,y$ sont définies sur $\mathbb{R}$ (tout entier). Prenonons $I = \mathbb{R}$, l'équation $y' = A\,y$ admet une solution définie $\forall t \in \mathbb{R}$ et vérifiant $f(t_0) = x_0$, $\forall (t_0, x_0)$. Soit un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant t_0, $f_{|I}$ vérifie aussi l'équation et les conditions initiales. Soit $\varphi = f_{|I}$ sur I. (Théorème de l'unicité). On dit alors que toute solution de $y' = A\,y$ est prolongeable sur $\mathbb{R}$.

Soit S_I e.v. des applications $I \to E$ solutions de l'équation $y' = A(y)$ et $t_0 \in I$. L'application $\psi_{t_0} : \left| \begin{array}{ccc} S_I & \to & E \\ f & \mapsto & f(t_0) \end{array} \right.$ est un isomorphisme d'espace vectoriel. Donc $\dim(S_I) = \dim(E)$.

Une fois obtenu, la solution générale $t \mapsto \exp(t \cdot A)(x)$ de l'équation $y' = A(y)$, on pourrait croire la résolution achevée. Il n'en est rien, car la somme $\exp(t \cdot A) = \sum_n^\infty \frac{(t \cdot A)^n}{n!}$ peut être difficile à calculer. Si l'on garde la solution sous cette forme, il y a des questions auxquelles il sera difficile de répondre : $\exp(t \cdot A)x$ est-elle périodique ? reste-t-elle bornée si $t \to \infty$?

Calcul explicite des solutions : On suppose ici que la dimension de E est finie.

Cas où A est un endomorphisme nilpotent

Soit $\{e_k\}$ une base de vecteurs propres. On a alors $A(e_k) = a_k e_k$ et $A^n(e_k) = a_k^n e_k$, d'où $\exp(t \cdot A)(e_k) = \exp(t \cdot a_k)(e^k)$. Les fonctions $\exp(t \cdot a_k) \cdot e_k$ sont donc solutions de $y' = A\,y$. Comme elles sont au nombre de $n = \dim(E)$ et qu'elles sont linéairement indépendantes, elle forment un base de l'espace des solutions. Dans la pratique les valeurs propres étant déterminées, on cherchera les e_k par la méthode des coefficients indéterminés en écrivant que $\exp(t \cdot a_k)e_k$ vérifie $y' = A\,y$.

Cas où A est un endomorphisme nilpotent

Si A est un endomorphisme nilpotent d'indice N alors $\exp(t \cdot A) = \mathrm{Id}_E + t\,A + ... + \frac{(t\,A)^{N-1}}{(N-1)!}$. La solution générale de $y' = A\,y$ est une fonction vectorielle dont les composantes sont des polynômes en t de degré strictement inférieur à N. On recherchera les composantes de cette fonction par la méthode des coefficients indéterminés.(Voir cours Calcul diff. Avez page 53).

Cas général sur le corps des complexes

Soit E un espace de Banach de dimension finie n sur le corps $\mathbb{C}$.

La solution générales de $y' = A\ y$ est donc la somme des m fonctions vectorielles $t \mapsto e^{t\lambda_i} X_i(t)$.

Cas général sur le corps des réels (Voir cours Calcul diff. Avez page 54).

21.4 Equation différentielle d'ordre supérieur

Jusqu'ici, les équations différentielles considérées ne faisaient intervenir que la dérivéee première de la fonction inconnue; elles étaient dites du premier ordre. Si l'on considère des équation faisant intervenir les dérivées seconde, troisième, ... d'une fonction inconnue, on obtient des équation différentiellles d'ordre 2, 3, ... Un artifice permet de ramener une équation différentielle d'ordre p à un système différentiel d'ordre 1. Par la suite, nous limiterons notre étude aux équations différentielles linéaires d'ordre.

21.4.1 Définition

21.4.2 Réduction à un système d'équa. diff. d'ordre 1

Les relation que nous allons établir pour une équation d'ordre p peuvent aussi s'applicauer à un système d'équation, qui se ramène également à un système d'ordre 1. Nous allons construire un système d'équation différentielles du premier ordre et montrer qu'il existe des bijections entre l'ensemble de ses solutions et l'ensemble des solutions de l'équation différentielle d'ordre supérieur p définie précédement.

Nous utiliserons dans ce paragraphe le système (1) de p équations différentielles d'ordre 1 et l'équation différentielle (2) d'ordre p.

$$(1)\begin{cases} y_0' = y_1 \\ y_1' = y_2 \\ \dots \\ y_{p-2} = y_{p-1} \\ y_{p-1}' = f(x, y_0, y_1, \dots, y_{p-1}) \end{cases} \qquad (2)\ y^{(p)} = f(x, y, y', \dots, y^{p-1})$$

21.4.2.1 Equipotence des ensembles de solution

Théorème 21.7. *Pour qu'une application φ, p fois dérivalbe sur un intervalle, soit solution de (2), il faut et il suffit que la suite des p applications $(\varphi, \varphi', \varphi'', \dots, \varphi^{p-1})$ soit solution de (1).*

Autrement dit, soit M l'ensemble des solutions de (2), M' l'ensemble des solutions de (1) et T l'application définie par :

$$T: \left| \begin{array}{ccc} M & \to & M' \\ \varphi & \mapsto & (\varphi, \varphi', \varphi'', \dots, \varphi^{p-1}) \end{array} \right. \quad \text{est une bijection.}$$

21.4.2.2 Equipotence des ensembles de solution maximale

Théorème 21.8. *Soit φ_1, φ_2 deux solutions de (2) pour que φ_2 prolonge φ_1, il faut et il suffit que la solution $(\varphi_2, \varphi_2', \varphi_2'', \dots, \varphi_2^{p-1})$ de (1) prolonge la solution $(\varphi_1, \varphi_1', \varphi_1'', \dots, \varphi_1^{p-1})$.*

Théorème 21.9. *Ainsi pour que φ soit solution maximale de (2), il faut et il suffit que $(\varphi, \varphi', \varphi'', \dots, \varphi^{p-1})$. Autrement dit, soit N l'ensemble des solutions maximales de (2), N' l'ensemble des solutions maximales de (1) et T l'application définie par :*

$$T: \left| \begin{array}{ccc} N & \to & N' \\ \varphi & \mapsto & (\varphi, \varphi', \varphi'', \dots, \varphi^{p-1}) \end{array} \right. \quad \text{est une bijection.}$$

Résoudre l'équation différentielle d'ordre p : (2) $y^{(p)} = f(x, y, y', \dots, y^{p-1})$

$$\Updownarrow$$

Résoudre le système différentielle d'ordre 1 : $(1)\begin{cases} y_0' = y_1 \\ y_1' = y_2 \\ \dots \\ y_{p-2} = y_{p-1} \\ y_{p-1}' = f(x, y_0, y_1, \dots, y_{p-1}) \end{cases}$

La réduction d'un système d'équation différentielle d'ordre supérieur p à un système d'équation différentielles du premier ordre se traduit par une augmentation du nombre des inconnues.

21.4.3 Equa. diff. d'ordre sup. linéaire, homogène et à coefficients constants

21.4.4 Définitions

Définition 21.10.

On appelle équation différentielle linéaire homgène d'ordre p, à coefficient constants, toute équation différentielle supérieur de la forme : $y^{(p)} + a_1 y^{(p-1)} + \dots + a_p y = 0$

$y^{(i)}$ valeur de la dérivée d'une fonction φ: $I \to E$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et E un espace de Banach. $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ sont les coefficients.

On appelle soltuion de l'équation différentielle homogène d'ordre p à coefficent constant (a_1, a_2, ..., a_n), toute application φ: $I \to E$ p fois dérivable (i.e. différentiable) telle que : $\varphi^{(p)} + a_1 \varphi^{(p-1)} + \dots + a_p \varphi = 0$.

Résoudre une équation différentielle linéaire homogène d'ordre p à coefficients constants, c'est trouver toutes les solutions de l'équation.

21.4.5 Méthode de résolution

On transforme cette équation d'ordre p en un système de p équation d'ordre 1, en un posant : $y = x_1$, $y' = x_2$, $y'' = x_3$, ..., $y^{(n-1)} = x_n$ (1). Alors $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in E^n$ vérifie le système différentiel homogène du premier ordre :

$$(2)\begin{cases} x_0' = x_2 \\ x_1' = x_3 \\ ... \\ x_{n-1}' = -a_n x_1 - a_{n-1}x_2 - ... - a_1 x_{p-1} \end{cases}$$

Réciproquement, si y vérifie le système précédent alors il vérifie aussi (1). Posons $A \in \mathrm{End}(E^n)$ notons aussi A sa matrice associée $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ & & ... & & \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & ... & -a_1 \end{pmatrix}$ on a $(2) \Leftrightarrow x' = Ax$. Or l'équation caractéristique de A est : $\det(A - \lambda \mathrm{Id}) = 0$ i.e. $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_n = 0$. Donc si λ_i est une racine d'ordre r_i de ce polynôme, la solution générale de (2) si $E = \mathbb{C}$ est : $\sum_{i=1}^{n} \exp(\lambda_i t) \times P_i(t)$ où P_i est un polynôme de degré r_{i-1} à coefficient dans E^n.

21.5 Equation différentielle linéaire d'ordre 1

21.5.1 Définitions

Définition 21.11.

Définition 21.12. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, E un espace de Banach. On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre de la forme : $y'(t) = A(t)y(t) + B(t)$.*

Soit l'équation différentielle linéaire du premier ordre : $y' = A(y)$ et appelée équation homogène associée.

On appelle solution de l'équation différentielle linéaire $y' = A(y) + B(t)$ définie précédement, toute application φ dérivalbe telle que $\forall t \in I; \varphi'(t) = A\varphi(t) + B(t)$.

21.5.2 Théorème d'existence

Théorème 21.13. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, t_0 de I, E un espace de Banach, x_0 un point de E et $y' = A(y) + B(t)$ une équation différentielle linéaire du premier ordre où A et B sont définies sur E et I. Alors le problème de Cauchy admet une solution unique, définie sur I tout entier. tel que $\begin{cases} \varphi'(t) = A(\varphi(t)) + B(t) \\ \varphi(t_0) = x_0 \end{cases}$.*

Remarque 21.14. Ce théorème ne donne aucune idée de la soltuion sauf si A est constant et $B = 0$. Dans ce cas la solution est $\exp(t - t_0)A$. Cependant en général, on ne pourra pas être explicite. On procède donc comme suit :

a) Etude de l'équation homogène associée, transformation et introduction d'un outil (appelé résolvante) permettant de décrire la solution.

b) Etude avec un second membre.

21.5.3 Etude de l'équation homogène : $y' = A_t(y)$ (*)

Soit S_I l'espace des solution définies sur l'intervalle I. S_I est un espace vectoriel. Si $(t_0, x_0) \in E^2$, on sait que l'équation admet une unique solution φ appartenant à S_I telle que : $\varphi(t_0) = x_0$.

L'application w_{t_0}: $\left|\begin{array}{ccc} S_I & \to & E \\ \varphi & \mapsto & \varphi(t_0) \end{array}\right.$ est un isomorphisme d'espace vectoriel. En particulier si $\dim E = n$ et si $\dim S_I = n$.

Remarque : Soit $t_0 \in I$ et $\varphi(t; x_0)$ la solution de l'équation homogène prenant la valeur x_0 en t_0. On a : $\begin{cases} \varphi'(t, x_0) + \varphi(t, x_0) = \varphi(t, x_0 + x) \\ \varphi(t + \lambda x_0) = \lambda\varphi(t, x_0) \end{cases}$ φ est linéaire en x_0. En particulier $\varphi(t, 0) = 0$.

Résolvante d'une équation linéaire

Introduction

Considérons l'équation (**) $y = A(t)(y)$ associée à (*) où y est la valeur de w_{t_0}: $\left|\begin{array}{ccc} I & \to & \mathrm{End}(E) \\ t & \mapsto & R(t) \end{array}\right.$. C'est encore une équation linéaire homogène de la forme $R'(t) = \mathcal{A}(t)R(t)$.

Avec $\mathcal{A}(t)$: $\left|\begin{array}{ccc} \mathrm{End}(E) & \to & \mathrm{End}(E) \\ f & \mapsto & \mathcal{A}(t)\cdot f = A(t)\circ f \end{array}\right.$. $\mathcal{A}(t)$ est linéaire et continue puisque $\|\mathcal{A}(t)\cdot f\| \leqslant \|A(t)\| \|f\|$. Donc $\mathcal{A}(t)$ est à valeur dans $\mathcal{L}(E,E) = \mathrm{End}(E)$ avec $E' = \mathrm{End}(E)$. On vérifie que $\mathcal{A}$: $I \to \mathrm{End}(E)$ est continue. Finalement, (**) est linéaire homogène et possède une solution unique associée au couple (t_0, φ_0) vérifiant $R(t_0) = \varphi_0$.

Définition

On appelle résolvante de (*) la solution de (**) qui prend la valeur Id pour tout $t = t_0$. On la note $R(t, t_0)$.

théorème

La solution de l'équation différentielle $y' = A(t)(y)$ prenant la valeur x_0 en t_0 est égale à $R(t, t_0)$ est la résolvante de (*).

remarque : A ce stade, on n'a pas d'information explicite sur la solution du problème. Cependant, on va voir que l'on peut tirer de ce résultat des informations intéressantes :

Cas trivial : $A(t) = A$ alors $R(t, t_0) = \exp(t - t_0)\exp(t - t_0)A$.

Propriété de la résolvante

$\forall (t_0, t_1, t) \in I^3$ on a $R(t, t_0) = R(t, t_1) \circ R(t_1, t_0)$

$\forall (t, t_0) \in I^2$ on a $R(t, t_0)$ est un isomorphisme de E dans E et $R^{-1}(t, t_0) = R(t_0, t)$.

Déterminant de la résolvante

Soit un espace Banach, de dimension finie A: $I \to \mathrm{End}(E)$ une fonction réglée continue : $\mathrm{Det}\, R(t, t_0) = \exp \int_{t_0}^{t} \mathrm{Tr}(A(o))\mathrm{ds}$.

Equation différentielle linéaire avec second membre $y' = A(t) + B(t)$

Théorème

Soient E un espace de Banach, I un intervalle de $\mathbb{R}$ la solution au problème de Cauchy $\left\{\begin{array}{l} \varphi'(t) = A(t)(\varphi(t)) + B(t) \\ \varphi(t_0) = x_0 \end{array}\right.$ est φ: $\left|\begin{array}{ccc} I & \to & E \\ t & \mapsto & R(t; t_0)(x_0) + \int_{t_0}^{t} R(t, \tau) \circ B(\tau) d\tau \end{array}\right.$.

Cas particulier A constant

$\left\{\begin{array}{l} \varphi'(t) = A(t)(\varphi(t)) + B(t) \\ \varphi(t_0) = x_0 \end{array}\right.$ la solution s'écrit alors : $\varphi(t) = \int_{t_0}^{t} (\exp(t - \tau)A)B(\tau)d\tau + (\exp(t - t_0)A)(x_0)$.

Résumé :

Pour résoudre (*)$\left\{\begin{array}{l} \varphi'(t) = A(t)(\varphi(t)) + B(t) \\ \varphi(t_0) = x_0 \end{array}\right.$ la solution de (*) s'écrit $R(t; t_0)(x_0) + \int_{t_0}^{t} R(t, s) \circ B(s)\mathrm{ds}$. Le second membre est la somme : de la solution $R(t, t_0)(x_0)$ de l'équation sans second membre $\left\{\begin{array}{l} \varphi'(t) = A(t)\varphi(t) \\ \varphi(t_0) = x_0 \end{array}\right.$ et de la solution $\int_{t_0}^{t} R(t, s) \circ B(s)\mathrm{ds}$ de l'équation $\left\{\begin{array}{l} \varphi'(t) = A(t)\varphi(t) + B(t) \\ \varphi(t_0) = 0 \end{array}\right.$.

Equation différentielle	Expression	
de Bernouilli	$a(t)y^m + b(t)y + y' = 0$	$m \neq 1$
de Bessel	$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\lambda^2}{x^2}\right)y = 0$	
de Clairaut	$y - x\,y' = A(y')$	
de Euler	$a\,x^2 y'' + b\,x\,y' + c\,y = f(x)$	
de Hill	$y'' + \Phi(t)y = 0$	Φ fonction réelle de période π
de Lagrange	$f(y')t + g(y')y = h(y')$	
de Mathieu	$y''(t) + [\lambda - 2\,h^2\cos(2t)]y(t)$	cas particulier de Hill
de Ricatti	$y' = A(x)y^2 + B(x)y + C(x)$	
de à variables séparées	$g(y)\cdot y' = f(x)$	

Chapitre 22
Théorie des Graphes

22.1 Notion de Graphe

22.1.1 Graphes non orientés

Définition 22.1. *On appelle* ***graphe non orienté*** *ou* ***multigraphe*** *le triplet $G = (S, A, e)$ où :*

- *S est un ensemble fini ou dénombrable dont les éléments sont appelés* ***sommets****.*
- *A est un ensemble fini ou dénombrable dont les éléments sont appelés* ***arêtes****.*
- *$e\colon A \to \mathcal{P}_2(S) \cup \Delta$ est une application où $\mathcal{P}_2(S)$ est l'ensemble des paires d'éléments de S et où Δ est la diagonale de $S \times S$.*

Remarque 22.2.

- Pour lever toute ambiguité S, A peuvent être notés $S(G)$, $A(G)$ pour dire qu'il s'agit de l'ensemble des sommet et des arêtes du graphe G.
- Les arêtes sont donc des couples de sommets et peuvent être notés (u, v).
- En tenant compte de la symétrie, elles peuvent être vues plus simplement comme de paires de sommets : on remplace les deux couples (u, v) et (v, u) par une seule paire $\{u, v\}$, qu'on écrit uv pour simplifier la notation.

Définition 22.3. *Soit une arête uv les sommets u et v sont appelés* ***extrémités*** *de l'arête uv.*

Définition 22.4. *Deux sommets u et v sont dits* ***adjacents ou voisins*** *et on note $u \sim v$ si et seulement s'ils appartiennent à la même arête.*

Définition 22.5. *Une* ***boucle*** *est une arête (u, v) si et seulement si $u = v$.*

Définition 22.6. *Une arête (u, v) est un* ***lien*** *si et seulement si $u \neq v$.*

Remarque 22.7.

- L'ensemble des voisins du sommet v est noté $N(v)$.
- Le nombre de sommets d'un graphe G est noté $s(G)$, le nombre d'arête $a(G)$.

Définition 22.8. *Soient $G = (S_G, A_G)$ et $H = (S_H, A_H)$ deux graphes. On appelle* ***isomorphisme*** *de G dans H toute bijection $f\colon S_G \to S_H$ telle que $uv \in A_G$ si et seulement si $f(u)f(v) \in A_H$. Dans ce cas, s'il existe un isomorphisme entre G et H, on dit que G est* ***isomorphe*** *à H et on écrit $G \cong H$.*

Définition 22.9. *On appelle* ***graphe simple*** *un graphe non orienté (i.e. un multigraphe) (S, A) sans boucle et tel que pour deux sommets x, y quelconques, il existe au plus une arête admettant x et y comme extrémités. (e injective ?)*

Remarque 22.10. Dans ce cas A est identifiable à une partie de l'ensemble $\mathcal{P}_2(S)$ des paires d'éléments de S.

Définition 22.11. *Un graphe est dit complet si et seulement si pour toute paire $(x; y)$ de sommets du graphes, il existe au moins une arête d'extrémité $x; y$. (Cela veut-il dire que (e) est injective ?)*

Définition 22.12.

- *On appelle* ***clique*** *un graphe simple et complet (Cela veut-il dire que* (e) *est bijective ?)*
- *Une clique à n-sommets est appelée* ***n-clique****, on la note* $[K_n]$.

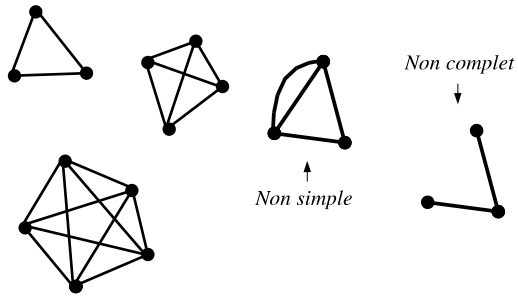


Figure 22.1. Cliques : $[K_3], [K_4], [K_5]$ et contre-exemples.

22.1.2 Graphe orienté

Définition 22.13. *On appelle* ***graphe ou graphe orienté*** *le quadruplet* $G = (V, E, o, e)$ *où :*

- V *est un ensemble fini ou dénombrable dont les éléments sont appelés* ***sommets****.*
- E *est un ensemble fini ou dénombrable dont les éléments sont appelés* ***arcs(ou arêtes)****.*
- $o: E \to V$ *est une application appelée* ***application-origine*** *(ou application initiale).*
- $e: E \to V$ *est une application appelée* ***application-extrémité*** *(ou application terminale).*

Remarque 22.14.

- Pour lever toute ambiguité V, E peuvent être notés $V(G)$, $E(G)$ pour dire qu'il s'agit de l'ensemble des sommets et des arêtes du graphe G.
- Souvent un arc est identifié avec le couple de ses extrémité; E est alors une famille finie ou dénombrable d'éléments de $V \times V$ et le graphe est noté $G = (V, E)$
- Les arcs sont donc des couples de sommets et peuvent être notés (u, v).

Définition 22.15. *Un graphe orienté est dit* ***n-graphe*** *si et seulement si pour tout couple de sommets* (x, y)*, le nombre d'arcs d'extrémité initiale* x *et d'extrémité finale* y *est inférieur à* n*, le nombre* n *étant atteint pour au moins un couple de sommet.*

Remarque 22.16. En identifiant un arc, avec le couple de ses extrémités, les 1-graphes sont les graphes des relations binaires sur un ensemble fini ou dénombrable.

Définition 22.17. *Soit un arc* (u, v)*, les sommets* u *et* v *sont appelés* ***extrémités*** *de l'arc* (u, v) *ou sommets* ***adjacents*** *dans ce cas on note* $u \sim v$*. Plus précisément, on dit que :*

- u ***domine*** v *et on note* $u \to v$,
- u *est l'extrémité initiale et* v *est l'extrémité terminale.*
- u *est un voisin intérieur de* v *et* v *est un voisin extérieur de* v.

Remarque 22.18. Les ensembles des voisins intérieurs et extérieurs d'un sommet v sont notés respectivement $N^-(v)$ et $N^+(v)$.

La définition d'isomorphisme reste valable pour les graphes orientés, en remplaçant les paires uv et $f(u)f(v)$ par des couples.

Définition 22.19. *Soient* $G = (V_G, E_G)$ *et* $H = (V_H, E_H)$ *deux graphes. On appelle isomorphisme de* G *dans* H *toute bijection* $f: V_G \to V_H$ *telle que* $(u, v) \in E_G$ *si et seulement si* $(f(u), f(v)) \in E_H$*. Dans ce cas, s'il existe un isomorphisme entre* G *et* H*, on dit que* G *est isomorphe à* H *et on écrit* $G \cong H$.

22.1.3 Définitions Communes

Définition 22.20. *On appelle* ***noeud*** *du graphe un sommet qui admet plus de 2 arcs incidents.*

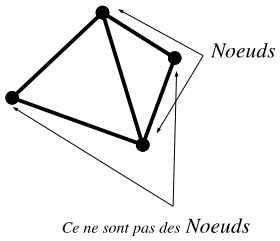


Figure 22.2. Noeuds

Définition 22.21. *On appelle* ***ordre*** *d'un graphe le nombre de sommet du graphe.*

Définition 22.22. *Un* ***graphe*** *est dit* ***fini*** *si et seulement si l'ensemble des sommets est fini.*

Définition 22.23. *On dit que deux sommets x, y sont réliés par un* ***fuseau*** *si et seulement si ils existe au moins deux arêtes. Un* ***fuseau*** *est dans ce cas l'ensemble des arêtes reliant x, y.*

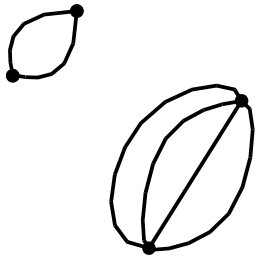


Figure 22.3.

Définition 22.24. *On appelle* ***graphe biparti****, tout graphe admettant une partition de l'ensemble S de ses sommets en deux classes S_1 et S_2 telles que tout arc du graphe ait une de ses extrémités dans S_1 et l'autre dans S_2. Si A est l'ensemble des arcs, il est noté (S_1, S_2, A).*

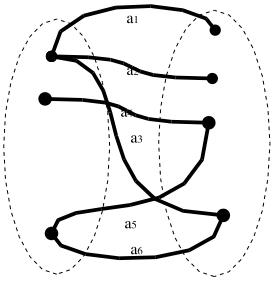


Figure 22.4. Graphe biparti

Définition 22.25. *Un* ***graphe*** *est dit* ***complet*** *si et seulement si* 2 *sommets distincts sont toujours adjacents.*

Note 22.26. (Voir si cette définition n'est pas en contradiction avec la définition de la page 153).

Définition 22.27. *Un 1-graphe(S,A) est dit* ***symétrique*** *si et seulement si* $(x, y) \in A \Rightarrow (y, x) \in A$.

Définition 22.28. *On appelle* ***Graphe k-chromatique*** *un graphe dont on peut colorier les sommets à l'aide de k couleurs de manière que deux sommets adjacents distincts ne soient jamais de la même couleur.*

22.2 Représentation de graphes

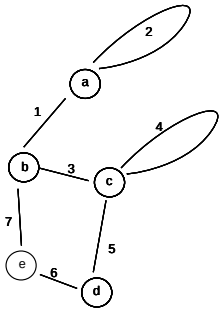
22.2.1 Graphes non orientés (i.e. multigraphes)

22.2.1.1 Matrice d'incidence

Définition 22.29. *La* ***matrice d'incidence*** *d'un graphe* ***non orienté*** *est la matrice* $M = (m_{ve})$ *où*

- $m_{ve} = 2$, *si* v *est l'extrémité de la boucle* e
- $m_{ve} = 1$, *si* v *est l'une des extrémités du lien* e,
- $m_{ve} = 0$, *sinon.*

Exemple 22.30. Nombre d'arête $a(G) = 7$. $3+3+4+2+2 = 14 \leftrightarrow 2 \times a(G) = 14$.



	1	2	3	4	5	6	7
a	1	2	0	0	0	0	0
b	1	0	1	0	0	0	1
c	0	0	1	2	1	0	0
d	0	0	0	0	1	1	0
e	0	0	0	0	0	1	1

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{degré des sommets} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Définition 22.31. *La somme des coefficients de la ligne* v *de* M *s'appelle le* ***degré du sommet*** v, *on le note* $d(v)$.

Définition 22.32. *Un sommet de degré nul est un* ***sommet isolé****.*

Définition 22.33. *Un graphe est* ***régulier*** *si et seulement si ses degrés sont tous égaux.*

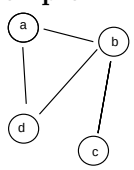
Théorème 22.34. *Pour tout graphe* G $\sum_{v \in V} d(v) = 2\, e(G)$.

22.2.1.2 Matrice adjacente

Définition 22.35. *La* ***matrice d'adjacente*** *d'un graphe* ***non orienté*** *est la matrice* $A = (a_{uv})$, *où*

- $a_{uv} = 1$ *si* $u \sim v$,
- $a_{uv} = 0$ *sinon.*

Exemple 22.36.



	a	b	c	d
a	0	1	0	1
b	1	0	1	1
c	0	1	0	0
d	1	1	0	0

$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

22.2.1.3 Liste d'adjacence

Définition 22.37. *Une* ***liste d'adjacence*** *d'un sommet v est une liste $L(v)$ de ses voisins $N(v)$.*

Remarque 22.38. Une suite $(L(v);\ v \in V)$ de telles listes est une structure plus concise que celles des matrices d'incidences et d'adjacence, donc plus adaptée aux algorithmes.

22.2.2 Graphes orientés (i.e. graphes)

22.2.2.1 Matrice d'incidence

Définition 22.39. *La* ***matrice d'incidence*** *d'un* ***graphe orienté*** *sans boucle est la matrice $M = (m_{ve})$ où*

- $m_{ve} = 1$*, si v est l'extrémité initiale de l'arc e*
- $m_{ve} = -1$*, si v est l'extrémité terminale du l'arc e,*
- $m_{ve} = 0$*, sinon.*

Définition 22.40.

- *La somme des coefficients négatifs de la ligne v de M s'appelle le* ***degré intérieur*** *du sommet v, on le note $d^-(v)$.*
- *La somme des coefficients positifs de la ligne v de M s'appelle le* ***degré extérieur*** *du sommet v, on le note $d^+(v)$.*

Définition 22.41.

- *Un sommet de degré intérieur nul est une* ***source*** *isolé.*
- *Un sommet de degré extérieur nul est un* ***puits****.*

22.2.2.2 Matrice adjacente

Définition 22.42. *La* ***matrice d'adjacente*** *d'un* ***graphe orienté*** *sans boucle est la matrice $A = (a_{uv})$, où*

- $a_{uv} = 1$ *si* $u \rightarrow v$,
- $a_{uv} = -1$ *si* $v \rightarrow u$
- $a_{uv} = 0$ *sinon.*

Remarque 22.43. C'est une matrice antisymétrique.

22.2.2.3 Liste d'adjacence

Définition 22.44. *Une* ***liste d'adjacence*** *d'un sommet v est une liste $L(v)$ de ses voisins extérieurs $N^+(v)$.*

22.3 Chaînes, cycles, circuits et chemins

Pour ces définitions, on peut considérer soit les sommets, soit les arcs ou les arêtes.

Définition 22.45. *Une* ***chaîne*** *dans un graphe ou graphe orienté est une suite* $(v_0, v_1..., v_m)$ *de sommets distincts, où* $v_{i-1} \sim v_i, 1 \leqslant i \leqslant m$,

- *le sommet* v_0 *est le sommet initial de la chaîne,*
- *le sommet* v_m *son sommet terminal.*

Quand on veut expliciter ces deux sommets, on parle d'une v_0v_m*-chaine.*

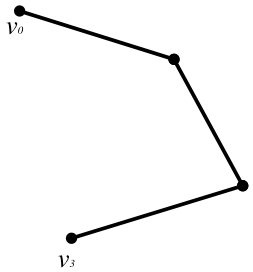


Figure 22.5.

Définition 22.46. *(A revoir) On appelle* ***cycle*** *d'un graphe une chaine* $u_1, u_2, ..., u_q$ *où les arcs* u_i *sont distincts et telle que l'extrémité de* u_1 *non commune avec* u_2 *coïncide avec l'extrémité de* u_q *non commune avec* u_{q-1}

Définition 22.47. *Un* ***circuit*** *dans un graphe ou graphe orienté est une suite* $(v_0, v_1..., v_m)$ *de sommets, où* $v_{i-1} \sim v_i, 1 \leqslant i \leqslant m$, *dont tous sont distincts sauf* v_0 *et* v_m *qui sont confondus.*

Théorème 22.48. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *G est biparti ;*
2. *tout circuit de G est de longueur paire.*

Définition 22.49. *Un* ***chemin*** *dans un graphe orienté est une suite* $(v_0, v_1..., v_m)$ *de sommets distincts, où* $v_{i-1} \to v_i, 1 \leqslant i \leqslant m$.

Définition 22.50. *Un* ***circuit orienté*** *dans un graphe orienté est une suite* $(v_0, v_1..., v_m)$ *de sommets, où* $v_{i-1} \to v_i, 1 \leqslant i \leqslant m$, *dont tous sont distincts sauf* v_0 *et* v_m, *qui sont confondus.*

Définition 22.51. *La* ***longueur d'une chaîne*** *(ou chemin ou circuit ou circuit orienté) est son nombre d'arêtes.*

Définition 22.52. *La* ***distance*** $d(u, v)$ ***entre deux sommets*** u *et* v *d'un graphe (ou orienté) est la longueur d'une plus courte* uv*-chaîne (plus court* (u, v)*-chemin).*

Définition 22.53.

- *Une chaîne, un cycle, un circuit ou un chemin sont dits* ***hamiltoniens*** *si et seulement s'ils passent une et une seule fois par chaque sommet du graphe.*
- *Un* ***graphe*** *possédant un cycle hamiltonien est dit* ***hamiltonien****.*

Exemple 22.54. Une chaîne hamiltonienne dans un graphe est indiquée dans la figure 2.4.

Définition 22.55.

- *Une chaîne, un cycle, un circuit ou un chemin sont dits* ***eulériens*** *si et seulement s'ils utilisent une et une seule fois chaque arêtes du graphe.*
- *Un* ***graphe*** *possédant une chaine eulérienne est dit* ***eulérien****.*

Définition 22.56. *On appelle* ***racine*** *d'un graphe orienté, un sommet* r *tel que pour tout sommet* x *il existe un chemin de* r *à* x.

22.4 Sous graphes

Définition 22.57. *On appelle* ***sous-graphe*** *H d'un graphe, tout graphe obtenu par suppression d'arètes ou de sommets du graphe G. On écrit dans ce cas : $H \subseteq G$*

Soit $G=(V,E)$ un graphe, et soient $v \in V$ et $e \in E$. On considère deux graphes associés:

- le graphe $G\backslash e$, défini par $V(G\backslash e) = V(G)$ et $E(G\backslash e) = E(G)\backslash\{e\}$, est obtenu à partir de G par la suppression de l'arête e.
- le graphe $G - v$, défini par $V(G-v) = V(G)\backslash\{v\}$ et $E(G-v) = E(G) \cap [V(G\backslash v)]^2$, est obtenu à partir de G par la suppression du sommet v.

On appelle sous graphe de G tout graphe H obtenu par une suite de telles opérations. Cette relation est notée $H \subseteq G$.

Exemple 22.58. Les sommets et les arêtes de la suite définissant une chaîne ou un circuit constituent les ensembles de sommets et d'arête d'un sous graphe. On peut donc considérer comme sous graphe toute chaîne et tout circuit d'un graphe.

Définition 22.59. *Un* ***sur-graphe*** *d'un graphe G est un graphe H dont G est un sous-graphe. On écrit dans ce cas : $H \supseteq G$.*

Il existe deux types particuliers de sous graphes :

Définition 22.60. *Un sous graphe obtenu uniquement par la suppression d'arêtes s'appelle* ***sous-graphe couvrant****.*

Exemple 22.61. Une chaine ou un circuit hamiltonien sont donc des sous graphes couvrants.

Définition 22.62. *Un sous graphe obtenu uniquement par la suppression de sommets s'appelle* ***sous-graphe induit****.*

Exemple 22.63. Dans un graphe simple, tout plus court circuit est un sous-graphe induit.

Figure 2.4: Une chaîne hamiltonienne dans un graphe.

Figure 2.5: Le sous-graphe induit par $V - \{x, y\}$.

Si S est l'ensemble de sommets ou d'arêtes supprimés, le sous-graphe obtenu est noté $G - S$. Quand S est un ensemble de sommets, on dit que $G - S$ est induit par son ensemble de sommets $V\backslash S$, et on le note également $G[V\backslash S]$. Le sous graphe induit obtenu suite à la suppression de deux sommets est indiqué dans la figure 2.5.

Soient G et H deux sous graphes d'un graphe.

- L'union de G et H est le sous-graphe $G \cup H$ avec $V(G \cup H) = V(G) \cup V(H)$ et $E(G \cup H) = E(G) \cup E(H)$.
- L'intersection de G et H est le sous-graphe $G \cap H$ avec $V(G \cap H) = V(G) \cap V(H)$ et $E(G \cap H) = E(G) \cap E(H)$.

22.5 Connexité et forte connexité

22.5.1 Graphe connexe

Proposition 22.64. *Soit $G=(V,E)$ un graphe. La relation binaire $\sim\sim$, sur V définie par : ($u \sim\sim v$ $\Leftrightarrow$ existe une uv-chaîne dans G) est une relation d'équivalence.*

Définition 22.65. *Les sous-graphes induits par les classes d'équivalence de $\sim\sim$ s'appellent les* ***composantes*** *de G. On note $c(G)$ le nombre de composantes de G.*

Définition 22.66. *Un* ***graphe*** *est dit* ***connexe*** *si et seulement si* $c(G) = 1$ *(autrement dit il possède une seule composante).*

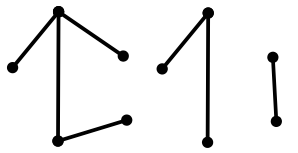


Figure 22.6. Connexité.

22.5.2 Graphe orienté fortement connexe

Proposition 22.67. *Soit* $G = (V, E)$ *un graphe orienté. La relation* $\leftrightarrow$ *sur* V *définie par :*
($u \leftrightarrow v \Leftrightarrow \exists$ *un* (u, v)*-chemin et un* (v, u)*-chemin dans* G*) est une relation d'équivalence.*

Définition 22.68. *Les sous graphes induits par les classes d'équivalence de* $\sim\sim$ *s'appellent les* ***composantes fortes*** *de* G*.*

Définition 22.69. *Un* ***graphe orienté*** *est* ***fortement connexe*** *si et seulement s'il a une seule composante forte.*

22.5.3 Arêtes/sommets séparat(eur/rices), graphe séparable, bloc

Définition 22.70. *Une arête séparatrice d'un graphe* G *est une arête* (e) *telle que* $c(G \setminus e) > c(G)$*.*

Théorème 22.71. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *e est une arête séparatrice de* G
2. *e n'appartient à aucun circuit de* G

Définition 22.72. *Soit* G *un graphe connexe.*
Un ***sommet séparateur*** *de* G *est un sommet* v *tel que* $G \setminus v$ *est non connexe.*

Exemple 22.73. Les sommets séparateurs d'un graphe sont indiqués dans la figure 3.6.

Définition 22.74. *Un graphe est* ***séparable*** *si et seulement s'il contient un sommet séparateur, sinon il est* ***non séparable****.*

Définition 22.75. *Un* ***bloc*** *d'un graphe est un sous-graphe non séparable maximal.*

22.5.4 Excentricité d'un sommet, diamètre, rayon et centre d'un graphe

Définition 22.76. *Soit* v *un sommet d'un graphe* G*. L'****excentricité*** *de* v *est définie par :*

- $\mathrm{ex}(v) = \max\{d(u, v) : u \in V\}$.

Définition 22.77. *Le* ***rayon*** *et le* ***diamètre*** *d'un graphe* $G = (V, E)$ *sont définis par :*

- $\mathrm{ray}(G) = \min\{\mathrm{ex}(v); v \in V\}$,
- $\mathrm{diam}(G) = \max\{\mathrm{ex}(v); v \in V\}$.

Définition 22.78. *Un* ***centre d'un graphe*** *est un sommet dont l'excentricité est égale au rayon du graphe.*

22.5.5 Forêts, Arbres

Définition 22.79. *Une* ***forêt*** *est un graphe sans circuit.*

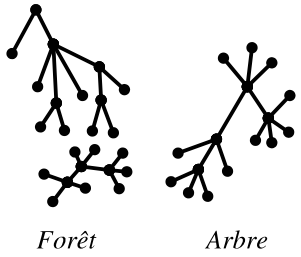


Figure 22.7.

Définition 22.80. *Un* ***arbre*** *est un graphe connexe sans circuit.*

Définition 22.81. *On appelle* ***hauteur*** *d'un arbre le maximum des longueurs des chemins issus de la racine.*

Définition 22.82. *Un arbre* ***binaire*** *est un arbre où tout nœud admet soit* 0 *ou* 2 *fils.*

Théorème 22.83. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *G est un arbre;*
2. *G est connexe et toute arête de G est arête séparatrice;*
3. *pour toute paire de sommets de G, il existe une et une seule chaîne qui les relie.*

La figure 2.6 montre la suppression d'une arête séparatrice d'un arbre.
Figure 2.6: La suppression d'une arête séparatrice d'un arbre

Proposition 22.84. *Pour tout arbre G,* $e(G) = v(G) - 1$.

Figure 2.7: Un arbre couvrant d'un graphe

Définition 22.85. *Un* ***arbre couvrant*** *d'un graphe G est un arbre qui est un sous-graphe couvrant de G.*

Exemple 22.86. Un arbre couvrant dans un graphe est indiqué dans la figure 2.7.

Définition 22.87. *Soient G un graphe et H un sous graphe de G.*
Soit P une propriété des graphes (être connexe, contenir un circuit, ...).

- *On dit que H* ***est minimal pour*** *P si et seulement si*
  - *i. H satisfait P,*
  - *ii. et aucun* ***sous-graphe*** *propre de H ne satisfait P.*
- *On dit que H* ***est maximal pour*** *P si et seulement si*
  - *i. H satisfait P*
  - *ii. et aucun* ***sur-graphe*** *propre de H ne satisfait P.*

Définition 22.88. *On appelle* ***sous-graphe propre****, (à définir !).*

Théorème 22.89. *Soit G un graphe connexe. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *T est un arbre couvrant de G;*
2. *T est un sous graphe couvrant connexe de G, et minimal pour cette propriété;*
3. *T est un sous graphe couvrant de G sans circuit, et maximal pour cette propriété.*

La figure 2.8 montre le circuit obtenu en ajoutant une arête de G à un arbre couvrant T.

Définition 22.90. *On appelle* ***circuit fondamental*** *d'un graphe G par rapport à un arbre couvrant T, tout circuit obtenu par rajout d'une arête à T..*

Arbre couvrant Circuit fondamental
Figure 2.8. L'addition d'une arête à un arbre couvrant

Corollaire 22.91. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *G est connexe;*
2. *G contient un arbre couvrant.*

Chapitre 23

Hypergraphes, Systèmes d'indépendants et matroïdes

23.1 Hypergraphe

Définition 23.1. *Soient E un ensemble et $\mathcal{F}$ une famille de parties de E. On appelle* ***système d'ensemble ou hypergraphe*** *le couple $(E, \mathcal{F})$.*

Définition 23.2. *On appelle* ***système d'indépendant ou graphe héréditaire*** *tout hypergraphe $(E, \mathcal{F})$ vérifiant les propriétés suivantes :*

- $\varnothing \in \mathcal{F}$, *($\mathcal{F}$ contient l'ensemble vide)*
- $A \in \mathcal{F}, (B \subseteq A \Rightarrow B \in \mathcal{F})$, *(axiome d'hérédité).*

Dans ce cas les éléments de $\mathcal{F}$ sont appelés ***indépendants*** *de $(E, \mathcal{F})$.*

Définition 23.3. *(Définition à préciser) On appelle* ***base d'un système d'indépendant*** *$(E, \mathcal{F})$, (l'ensemble des ?) les indépendants maximaux de $(E, \mathcal{F})$ pour l'inclusion.*

Définition 23.4. *Soit $(E, \mathcal{F})$ un hypergraphe.*

On appelle ***fonction de poids ou fonction de coût*** *sur l'ensemble E, toute application c: $E \to \mathbb{R}^+$ ou son prolongement c: $\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \to & \mathbb{R}^+ \\ A & \mapsto & \sum_{x \in A} c(x) \end{array} \right.$.*

Définition 23.5. *On appelle* ***hypergraphe pondéré*** *tout hypergraphe $(E, \mathcal{F})$ muni d'une fonction de coût c. On le note $(E, \mathcal{F}, c)$*

Définition 23.6. *Soient $(E, \mathcal{F}, c)$ un hypergraphe pondéré et $A \in \mathcal{F}$.*

On dit que A est une ***partie optimale par rapport à c*** *si et seulement si :*
$c(A) = \max\{c(F), F \in \mathcal{F}\}$.

23.2 Matroïde

Nous définissons ici un type particulier de système d'indépendance appelé matroïde. Les matroïdes ont été introduits et étudiés pas H. Whitney dans les années 1930. Ils possèdent maintes belles propriétés et sont d'une improtance capitale dans la combinatoire pure et appliquée, ainsi que dans des domaines tels que la géométrie, la statique et l'électrotechnique.

23.2.1 Définition

Définition 23.7. *On appelle* ***matroïde*** *tout système d'indépendance $(E, \mathcal{F})$ qui satisfait la propriété suivante :*

$\forall A, B \in \mathcal{F}, (\text{card}(A) < \text{card}(B) \Rightarrow \exists x' \in B \backslash A; A \cup \{x'\} \in \mathcal{F})$ *(axiome d'existence d'un transfert stable).*

23.2.2 Propriété

Lemme 23.8. *Soit $M = (E, \mathcal{F})$ un matroïde alors M satisfait la propriété suivante :*

(M'): $\forall A, B \in \mathcal{F}, (\text{card}(A) < \text{card}(B) \Rightarrow \exists C \in \mathcal{F}; A \subseteq C \subseteq A \cup B; \text{card}(C) = \text{card}(B))$

Toutes les bases d'un matroïde ont le même cardinal

Proposition 23.9. *Soit $M = (E, \mathcal{F})$ un matroïde dont $\mathcal{B}$ est l'ensemble des bases. Alors M satisfait les deux propriétés suivantes :*

1. *Soit B, B' deux bases, tout élément x de $B\backslash B'$ **peut être remplacé par** un élément x' de $B'\backslash B$ tel que $(B\backslash\{x\})\cup\{x'\}$ reste une base :*
$$B, B' \in \mathcal{B}, \forall x \in B\backslash B' \Rightarrow \exists x' \in B'\backslash B, (B\backslash\{x\})\cup\{x'\} \in \mathcal{B}.$$
2. *Soit B, B' deux bases, tout élément x de $B\backslash B'$ **peut remplacer** un élément x' de $B'\backslash B$ tel que $(B'\backslash\{x'\})\cup\{x\}$ reste une base :*
$B, B' \in \mathcal{B}, \forall x \in B\backslash B' \Rightarrow \exists x' \in B'\backslash B, (B'\backslash\{x'\})\cup\{x\} \in \mathcal{B}.$

Proposition 23.10. *Soient $(E, \mathcal{B})$ un clutter ? non nul, satisfaisant la propriété (1) du théorème 31.9, et $M = (E, \mathcal{F})$ le système d'indépendance pour lequel $\mathcal{B}$ est la famille des bases. Alors M est un matroïde.*

23.2.3 Exemples

- **Matroïdes graphiques**

  Théorème 23.11. *(A revoir) Soit G un graphe connexe. On considère le système d'indépendance $M(G) = (E, \mathcal{F})$, où $E = E(G)$ (ensemble des arètes) et $\mathcal{F}$ est la famille des ensembles des arêtes des forêts de G (donc ,$\mathcal{B}$ est la famille des ensembles des arêtes des arbres couvrants de G, un clutter) .*
  M(G) est un matroïde.

- **Ordonnancement des tâches**
  Soit E un ensemble de n tâches à exécuter sur un processeur unique, une tâche à la fois. Chaque tâche demande une unité de temps pour s'exécuter. A chaque tâche est associée une date limite de terminaison $d(x)$.

  Exemple 23.12.

Date d'exécution	$f(x)$	1	2	3	4	5	6	7
	x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
Date souhaitée	d	1	2	3	4	4	4	6

  Définition 23.13. *On dira qu'un ensemble de tâches $X \subseteq E$ est **réalisable** s'il existe un ordonnancement de E pour lequel les tâches de X sont exécutées toutes avant leurs dates limites.*

  Posons $E_i = \{x \in E; d(x) \leqslant i\}$.

  Lemme 23.14. *X est réalisable si et seulement si* $\mathrm{card}(X \cap E_i) \leqslant i, 0 \leqslant i \leqslant n$.

  Théorème 23.15. *Soient E un ensemble de tâches et $\mathcal{F}$ la famille de parties réalisables de E.*
  $(E, \mathcal{F})$ est un matroïde.

Chapitre 24
Théorie des langages formels

24.1 Définitions

Définition 24.1. *Un* ***alphabet*** *est un ensemble* Σ.

Définition 24.2. *Un* ***mot*** *sur* Σ *est une suite finie d'éléments de* Σ*; sa longueur est la longueur de la suite. L'ensemble des mots sur* Σ *(y compris le mot* ε *de longueur nulle) est noté* Σ^*.

Définition 24.3. *Un* ***langage*** *sur* Σ *est une partie* L *de* Σ^*.

Chapitre 25
Informatique

25.1 Survol du Cours

25.1.1 Sujet, Livres, Site Internet

Sujet : Aspects algorithmiques de l'informatique.

Livres : Thomas Cormen, Charles Leiserson and Ronald Rivest, Introduction to Algorithms, MIT Press, Cambridge Mass.,1990.

Edition française: Thomas Cormen, Charles Leiserson et Ronald Rivest, Introduction à l'Algorithmiqne, Dunod Paris,1994.

Site Internet: al.ei.tuat.ac.jp/~sekisita/ (animations des algorithmes).

25.1.2 Algorithmes et Heuristiques : Philosophie et Terminologie

Un algorithme est une procédure de calcul bien définie pour résoudre un problème. Une instance du problème est un cas particulier du problème, représenté par des données que l'algorithme accepte comme entrée. La sortie de l'algorithme est constituée de la valeur ou des valeurs calculées par l'algorithme comme solution de cette instance du problème. L'algorithme est correct si pour toute instance du problème, la sortie de l'algorithme résoud en effet le problème. Evidemment, la fiabilité d'un algorithme dépend de cette propriété. Il est donc impératif de toujours s'efforcer de démontrer l'exactitude des algorithmes. Parfois, aucun algorithme convenable ne se présente pour résoudre un certain problème. Dans ce cas-là, on se contente d'une heuristique, une procédure de calcul bien définie qui n'aboutit pas forcément à une solution exacte du problème, mais dont la sortie a des chances d'être une bonne approximation de la solution exacte. Ici aussi, l'analyse mathématique de l'heuristique est fort souhaitable, afin de mieux interpréter ses résultats. Une heuristique dont la sortie est proche de la solution exacte, pour n'importe quelle entrée, est appelée un algorithme approché. Une démarche alternative est de considérer des algorithmes probabilistes, des procédures de calcul dont les choix à certaines étapes dépendent de mécanismes aléatoires. Le but est que la sortie soit presque toujours proche de la solution exacte, c'est-à-dire, avec une probabilité très élevée. Un aspect essentiel de l'algorithmique est l'étude de la performance des algorithmes, c'est-à-dire leurs temps d'exécution. Ce temps est calculé en fonction de la taille de l'entrée. Si le temps d'exécution est très élevé, l'algorithme peut s'avérer impraticable, donc inutile. Une approche heuristique serait alors le seul moyen d'aborder le problème. Dans ce cours, on traitera généralement d'algorithmes efficaces, dont le temps d'exécution est borné par une fonction polynômiale en la taille de l'entrée. Plusieurs algorithmes pour trier des suites de nombres réels seront étudiés, ainsi que des algorithmes de parcours des graphes, pour en déterminer diverses propriétés structurelles. On traitera également l'heuristique gloutonne et ses liens avec les matroïdes (une abstraction des espaces vectoriels). Il existe néanmoins une classe importante de problèmes de base pour lesquels on ne connait aucun algorithme efficace. On étudiera cette classe de problèmes, dits NP-complets, à la fin du cours.

25.2 Pseudocode

Afin de décrire précisément un algorithme, nous adoptons un format appelé pseudocode, semblable aux codes employés par de nombreux languages de programmation, tels PASCAL, FORTRAN et MAPLE. En particulier, il y a des instructions échanger, des boucles pour, tant que et répéter/jusqu'à, et des séquences si/alors/sinon. La structure des blocs de l'algorithme est indiquée par des indentations plutôt que par des instructions début/fin. Une suite s'appelle un tableau, et les notations ci-dessous sont employées.

Notations pseudocode.

Tableaux

A	tableau
longueur(A)	nombre d'éléments du tableau A
A[i]	élément du tableau A en position i
A[p..q]	tableau de longueur q - p + 1 dont les éléments sont A[p], . . . , A[q]

Attributions.
Les symboles flèche $\leftarrow$ et $\leftrightarrow$ H ont des interprétations variées, selon le contexte. Par exemple:

$i \leftarrow j$	attribuer la valeur j à i, poser i égal à j
pour $i \leftarrow 1$ à n	attribuer successivement les valeurs $1, 2, ..., n$ à i
$i \leftrightarrow$ j	j échanger i

Commentaires sont précédés par le symbole #.

25.2.1 Analyse d'Algorithmes

ll y a deux aspects principaux de l'analyse d'algorithmes :

Exactitude. On entend par celle-ci:

- l'efficacité de l'algorithme comme procédure,
- la justesse du code de programmation de l'algorithme.

Evidemment les deux aspects sont primordiaux. On se penchera uniquement sur le premier. La vérification du code est un travail assez difficile et élaboré en général.

Efficacité. On entend par celle-ci le temps d'exécution pris par l'algorithme, mesuré par le nombre de calculs élémentaires effectués. Le temps d'exécution est une fonction de la taille de l'entrée. Il dépend du modèle de machine utilisé :

1. Modèle de machine d'accés aléatoire (RAM: Les instructions sont exécutées de façon consecutive, une à la fois.
2. Modèle de machine parallèle: Des instructions indépendantes peuvent être exécutées simultanément. Ce modèle nécessite des algorithmes et des ordinateurs sur mesure.

On traitera le sujet du temps d'exécution seulement dans le modèle RAM. Plusieurs mesures du temps d'exécution sont envisageables :

Meilleur des cas. Il s'agit du plus petit temps d'exécution possible, parmi toutes les entrées d'une taille donnée. L'intérêt de cette mesure est minime. Elle n'est que rarement représentative de l'efficacité d'un algorithme.

Pire des cas. En tant que borne supérieure du temps d'exécution, valable pour toute entrée d'une taille donnée, ce paramètre est clairement intéressant.

Cas moyen. On entend par ceci le temps d'exécution espéré, en supposant toutes les entrées équiprobables. Bien que cette dernière supposition n'est que rarement satisfaite dans la pratique, on peut souvent l'imposer en perturbant de manière aléatoire l'entrée , comme on le verra plus tard dans l'étude de Tri Rapide. Le temps d'exécution moyen est donc une mesure d'efficacité informative.

Pour comparer l'efficacité des algorithmes, on regarde d'habitude le comportement asymptotique de leurs temps d'exécution. Ce point de vue est plutôt théorique, et ne correspond pas toujours à la réalité pratique.

Efficacité d'un algorithme : Durée d'exécution de cet algorithme en fonction de la taille du problème. On considère comme efficace [resp. inefficace] un algorithme dont le temps d'exécution croit polynomialement [resp. exponentiellement] avec la taille du problème. On parle alors d'algorithme de type polynomial [resp. exponentiel]. Cette notion est utilisée pour donner une classification des problèmes.

Le prochain paragraphe présente les notations requises.

25.2.2 Rappel : Taux de Croissance des Fonctions

Prérequis : voir chapitre comparaison et évaluation locale

Remarque 25.1. Ces notations asymptotiques ne font pas la distinction entre des constantes multiplicatives positives, qu'elles soient grandes ou petites. Or, si la taille d'entrée, n n'est pas très élévée, ces constantes cachées peuvent se révéler cruciales dans la pratique.

Exemple 25.2.

1. Quoique $10^{10}\lg n = o(n)$, pour $n < 235$ on a $10^{10}\lg n > n$.
2. Un problème de programmation linéaire consiste à maximiser (ou minimiser) une fonction linéaire de plusieurs variables positives satisfaisant une collection d'inéquations linéaires. Formellement:

$$\text{maximiser : } cx \text{ avec : } \mathrm{A}x \leqslant b \text{ et } x > 0$$

où x est le vecteur des variables, b et c sont des vecteurs à valeurs réelles, et A est une matrice à valeurs réelles. Deux algorithmes pour résoudre des programmes linéaires, totalement différents l'un de l'autre, sont la méthode du simplexe, développée par G. Dantzig il y a une cinquantaine d'années, et la plus récente méthode de l'ellipsoïde de H. Khachian. La méthode du simplexe a un temps d'exécution qui est exponentiel dans le pire des cas. Or, dans la pratique, elle s'avère très rapide, avec un temps d'exécution moyen qui est linéaire. La méthode de l'ellipsoïde, en revanche, a un temps d'exécution qui est polynomial dans le pire des cas, mais elle s'avère bien moins efficace que la méthode du simplexe sur des problèmes réels.

25.3 Algorithmes de Tri

25.3.1 Enoncé du Problème de Tri

Problème de Tri. Etant donné un ensemble fini $S = \{z_l, z_2, ..., z_n\}$ et une pondération $f : S \to \mathbb{R}$, ranger les membres de S par ordre croissant de poids. Autrement dit, étant donnée une suite $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de nombres réels (où $a_i = f(x_i)$), les trier par ordre croissant.

Remarque 25.3. Trier $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ par ordre décroissant équivaut à trier $(-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$ par ordre croissant; les deux problèmes sont donc équivalents.

On étudiera plusieurs algorithmes de tri, ayant chacun ses atouts et ses inconvénients. L'opération de base utilisée sera la comparaison de deux nombres. Pour la clarté de l'exposition, on supposera que les nombres à trier sont distincts. D'ailleurs, dans nos exemples, ces nombres seront tout simplement les entiers $1, 2, ..., n$ dans un certain ordre.

25.3.2 Tri par Insertion

Cet algorithme est peut-être le plus simple et le plus naturel des algorithmes de tri : les nombres sont insérés un par un à la bonne position. Considérer des patients qui entrent dans la salle d'attente d'un médecin un par un, pas forcément dans l'ordre de l'heure de rendez-vous. Quand un nouveau patient arrive, il vérifie les heures de rendez-vous des personnes déja assises, commençant avec celle de la fin de la rangée, jusqu'à ce qu'il trouve sa propre place. Ensuite, il demande à celles ayant des rendez-vous plus tard que lui de se déplacer vers l'arrière d'une place, et il s'asseoit à la place ainsi libérée.

L'algorithme TRI INSERTION fait des appels récursifs à lui-même et à une sous-routine INSERER, qui accepte comme entrée un tableau trié, et insère un seul nouvel élément à la bonne place.

INSERER(A, p, q)
01 # Insérer nouvel élément $A[q+1]$ dans tableau trié $A[p...q]$
02 $i \leftarrow q+1$
03 tant que $i > p$ et $A[i] < A[i-1]$ faire
04 $A[i] \leftrightarrow A[i-1]$
05 $i \leftarrow i-1$

TRI INSERTION(A, p, q)
01 # Trier le tableau $A[p...q]$
02 si $q > p$
03 alors
04 TRI INSERTION($A, p, q-1$)
05 INSERER($A, p, q-1$)

25.3.3 Tri par Division-Fusion

Cet algorithme de tri emploie une technique appelée Diviser pour Régner . Le problème est divisé récursivement en sous-problèmes. Dès que les sous-problèmes sont suffisament petits, ils sont résolus, puis fusionnés pour produire la solution au problème original. Ce processus peut être représenté par un couple d'arbres binaires (voir la figure 1.1) :

FUSIONNER(A, p, q, r)
01 # Fusionner sous tableaux triés $A[p...q]$, $A[q+1...r]$
02 $i \leftarrow p$
03 # $A[i]$ est le plus petit élément de son sous tableau.
04 $j \leftarrow q+1$
05 # $A[j]$ est le plus petit élément de son sous tableau.
06 $k \leftarrow p$
07 tant que $i \leqslant q$ et $j \leqslant r$ faire
08 si $A[i]C < A[j]$
09 alors
10 $B[k] \leftarrow A[i]$
11 $i \leftarrow i+1$
12 sinon $B[k] \leftarrow A[j]$
13 $j \leftarrow j+1$
14 $k \leftarrow k+1$
15 si $j = r+1$
16 alors
17 pour $s \leftarrow 0$ à $r-k$ faire
18 $A[r-s] \leftarrow A[q-s]$
19 pour $s \leftarrow p$ à $k-1$ faire
20 $A[s] \leftarrow B[s]$

Exemple 25.4. $A[1..4] = 2458$, $A[5..8] = 1367$. Le plus petit élément de chacun des deux tableaux est indiqué en gras.

$A1$	$A[2]$	$A[3]$	$A[4]$	$A[5]$	$A[6]$	$A[7]$	$A[8]$	$B[1]$	$B[2]$	$B[3]$	$B[4]$	$B[5]$	$B[6]$	$B[7]$
5	2	4	8	1	6	3	7							
5	2	4	8	1	6	3	7							
4	8	2	5	1	6	3	7							

TRI FUSION(A, p, r)
01 # Trier tableau $A[p...r]$
02 si $p < r$
03 alors

```
04      q ← ⌊(q+r)/2⌋                    (diviser)
05      TRI FUSION(A, p, q)              (régner)
06      TRI FUSION(A, q+1, r)            (régner)
07      FUSIONNER(A, p, q, r)
```

Cet algorithme a un inconvénient. Les éléments du tableau A ne sont pas triés sur place, mais sont placés dans un nouveau tableau B. On peut contourner ce problème en utilisant la sous-routine suivante au lieu de la sous-routine FUSIONNER.

```
FUSIONNER SUR PLACE(A, p, q, r)
01 # Fusionner sous tableaux triés A[p...q], A[q+1...r] sur place
02 i ← p
03 # A[i] est le plus petit élément de son sous tableau.
04 j ← q+1
05 # A[j] est le plus petit élément de son sous tableau.
06 si p ⩽ q < r
07     alors
08         si A[i] < A[j]
09             alors
10                 FUSIONNER SUR PLACE(A, p+1, q, r)
11             sinon
12                 pour k ← j à i+1 faire
13                     A[k] ↔ A[k−1]
14                     FUSIONNER SUR PLACE(A, p+1, q+1, r)
```

Exemple 25.5. $A[1...4] = 2458$, $A[5...8] = 1367$. Les plus petits éléments des deux tableaux, $A[i]$ et $A[j]$, sont indiqués en gras. 2 4 5 8 1 3 6 7 1 2 4 5 8 3 6 7 1 2 4 5 8 3 6 7 1 2 3 4 5 8 6 7 1 2 3 4 5 8 6 7 1 2 3 4 5 8 6 7 1 2 3 4 5 6 8 7 1 2 3 4 5 6 7 8

En revanche, cette sous routine a aussi un inconvénient, dont on se rendra compte lorsqu'on étudiera son temps d'exécution.

25.3.4 Tri Rapide

Il a un net avantage sur Tri Fision dans la mesure qu'il trie des tableaux sur place. Comme dans le cas de Tri Fusion, il emploie une stratégie du type diviser pour régner , bien que les sous problèmes dans lesquels le problème se divise ne sont pas normalement de tailles égales. Le coeur de l'algorithme est la sous routine de division, PARTITIONNER(A, p, r).

```
PARTITIONNER(A, p, r)
01 # Permuter le tableau A[p...r] sur place, et retourner un entier q tel que A[p] remplace A[q]
02 # et A[i] ⩽ A[q] < A[j], p ⩽ i < q < j ⩽ r.
03 i ← p+1
04 # Tout élément à gauche du curseur i est inférieur où égal à A[p]
05 j ← r
06 # Tout élément à droite du curseur j est supérieur à A[p]
07 répéter
08     tant que A[j] > A[p] et j ⩾ i faire
09         j ← j−1
10     tant que A[i] ⩽ A[p] et i < j faire
11         i ← i+1
12     si j ⩽ i
13         alors
14             A[p] ↔ A[j]
15             q ← j
```

```
16          retourner q
17      sinon A[i] ↔ A[j]
18          i ← i + 1
19          j ← j − 1
```

Exemple 25.6. Les positions des curseurs i et j sont indiquées en gras.
12345678 - 12345678 - 12345678 87654321– 87654321 87654321- 17654328 - 1765432 8 62473185 - 62473185 62473185 -62453187 62453187 62453187 12453 6 87

Le premier élément du tableau d'entrée, $A[p]$, s'appelle le pivot. Les longueurs des tableaux de sortie $A[p...q-1]$ et $A[q+1...r]$ dépendent uniquement de la taille du pivot par rapport aux autres éléments. Si le pivot est l'élément médian du tableau d'entrée, par exemple, les deux tableaux de sortie auront une même longueur. En revanche, si le pivot est le plus petit ou le plus grand élément du tableau d'entrée, l'un des deux tableaux de sortie sera de longueur nulle. La façon dans laquelle PARTITIONNER divise le tableau peut donc varier énormément. Afin de vérifier le bon fonctionnement de PARTITIONNER, il convient de focaliser sur l'ensemble S des éléments du tableau qui ne sont pas plus grands que le pivot $A[p]$, et son complémentaire L, l'emsemble constitué des éléments du tableau qui sont plus grands que $A[p]$:
$S = \{A[i]\,; A[i] \leqslant A[p]\}$,
$L = \{A[i]\,; A[i] > A[p]\}$.
A tout moment, les éléments strictement à gauche du curseur i appartiennent à S et les éléments strictement à droite du curseur j appartiennent à L. Jusqu'à la fin de l'avant dernière itération de la boucle, la situation est comme indiquée dans le dernier dessin de la figure 1.2, où les curseurs i et j se situent éventuellement à la même position.

Positions initiales des curseurs
Le curseur j se déplace vers la gauche
Le curseur i se déplace vers la droite
$A[i]$ et $A[j]$ échangés
Les curseurs i et j se déplacent chacun d'un cran
Figure 1.2: PARTITIONNER : la situation générale intermédiaire

Les déplacements possibles à la dernière itération sont indiqués dans la figure 1.3. La situation finale, aprés le dernier échange (ligne 9), est montrée dans la figure 1.4. L'algorithme TRI RAPIDE fait des appels récursifs à lui-même et à la sous routine PARTITIONNER.

Situation à la fin de l'avant dernière itération
Le curseur j se déplace à la même position du curseur i
Le curseur j se déplace juste à gauche du curseur i
Le curseur i se déplace à la même position du curseur j
Figure 1.3: PARTITIONNER:l'itération finale

```
TRI RAPIDE(A, p, r)
01 # Trier le tableau A[p...r]
02 si p < r
03    alors
04        q = PARTITIONNER(A, p, r)
05        TRI RAPIDE(A, p, q − 1)
06        TRI RAPIDE(A, q + 1, r)
```

25.3.5 Analyse du Tri par Insertion

Meilleur des cas	$\Theta(n)$
Pire des cas	$\Theta(n^2)$
Cas moyen	?

25.3.6 Analyse du Tri par Fusion

Meilleur des cas	
Pire des cas	$O(n \lg n)$
Cas moyen	

25.3.7 Analyse du Tri Rapide

Meilleur des cas	
Pire des cas	$\Theta(n^2)$
Cas moyen	$\Theta(n \lg n)$

Tri Rapide est un algorithme de tri dont le temps d'exécution au pire des cas est de $\Theta(n^2)$, comparable à celui de Tri Insertion, mais dont le temps d'exécution espéré est de $\Theta(n \lg n)$, comparable à celui de Tri Fusion.

25.4 Heuristique GLOUTON

25.4.1 Définition

Dans ce chapitre, on traitera une heuristique très simple et assez générale appelée l'heuristique gloutonne. On verra que pour une certaine classe de problèmes cette heuristique rend toujours la solution exacte. Dans un tels cas, l'heuristique est appelée algorithme glouton.

```
GLOUTON(E, F, c)
# Déterminer une base optimale B d'un système d'indépendance pondéré (E, F) avec
# une fonction de coût c.
Trier les éléments de E par ordre décroissant de coût : c(x_1) ⩾ ...c(x_n)
F ← ∅
pour i ← 1 à n faire
    si F ∪ {x_i} ∈ F
        alors
            F ← F ∪ {x_i}
B ← F
retourner B
```

25.4.2 Heuristique GLOUTON appliquée aux Matroïdes

25.4.2.1 Propriétés

Proposition 25.7. *Soient $M = (E, \mathcal{F})$ un matroïde pondéré avec une fonction de coût c et B la sortie retournée par* GLOUTON$(E, \mathcal{F}, c)$. *Alors B est une base optimale de M.*

Proposition 25.8. *Soit $(E, \mathcal{F})$ un système d'indépendance. Supposons que, pour toute fonction de coût $c\colon E \to \mathbb{R}^+$, l'heuristique* GLOUTON$(E, \mathcal{F}, c)$ *retourne une base optimale. Alors $(E, \mathcal{F})$ est un matroïde.*

25.4.2.2 Exemples :

- **Recherche d'un arbre couvrant de coût minimum**
  Problème : Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe avec une fonction de coût $c\colon E \to \mathbb{R}$. Déterminer un arbre couvrant de G de coût minimum.

  Théorème 25.9. *(Rappel) Soit G un graphe connexe. On considère le système d'indépendance $M(G) = (E, \mathcal{F})$, où $E = E(G)$ et $\mathcal{F}$ est la famille des ensembles des arêtes des forêts de G (donc ,$\mathcal{B}$ est la famille des ensembles des arêtes des arbres couvrants de G, un clutter) .*

M(G) est un matroïde.

Grâce au théorème précédant et aux résultats de la section 4, l'heuristique GLOUTON est parfaitement adaptée à ce problème. On a donc l'algorithme suivant, inventé par J.B. Kruskal.

```
KRUSKAL(G,c)
01 # Déterminer un arbre couvrant de G=(V,E) de coût minimum.
02 Trier E sous forme de tableau E[1...m] par ordre croissant des coûts.
03 F ← ∅
04 # F est l'ensemble des arêtes de la forêt déjà construite.
05 pour tout v∈V faire
06     r(v) ← v
07 # r(v) est la racine de la composante de F contenant v.
08 pour i ← 1 à m faire
09     si E[i]=xy et r(x)≠r(y)
10         alors
11             F ← F∪{E[i]}
12             pour tout v∈V\{y} faire
13                 si r(v)=r(y)
14                     alors
15                         r(v) ← r(x)
16         r(y) ← r(x)
17 retourner F
```

La figure 2.9 montre un tri par ordre croissant des arêtes d'un graphe, et la figure 2.10 indique l'arbre optimal retourné par KRUSKAL.

Figure 2.9: Un tri des arêtes par ordre croissant des poids

Figure 2.10: Un arbre optimal

- **Ordonnancement des tâches**
  Problème : Soit E un ensemble de n tâches à exécuter sur un processeur unique, une

tâche à la fois. Chaque tâche demande une unité de temps pour s'exécuter. A chaqce tâche est associée une date limite de terminaison $d(x)$ ainsi qu'une pénalité $c(x)$ à imposer au cas ou cette date limite ne soit pas respectée.

Déterminer un ordonnancement $f: E \to \{1, 2, ..., n\}$ de tâches qui minimise $\sum \{c(x): f(x) > d(x)\}$, la somme des pénalités imposées.

Date d'exécution	$f(x)$	1	2	3	4	5	6	7	
	x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
Date souhaitée	d	1	2	3	4	4	4	6	
Pénalité	c	3	6	4	5	**7**	**2**	**1**	Total : 10

Si les tâches étaient exécutées dans cet ordre, la pénalité totale serait 7 + 2 + 1=10.

Date d'exécution	$f(x)$	6	7	1	2	3	4	5	
	x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
Date souhaitée	d	1	2	3	4	4	4	6	
Pénalité	c	**3**	**6**	4	5	7	2	1	Total : 9

Si elles étaient exécutuées dans l'ordre 3, 4, 5, 6 7 1 2 la pénalité totale serait 3 + 6 = 9.

Définition 25.10. *(Rappel) On dira qu'un ensemble de tâches $X \subseteq E$ est* ***réalisable*** *s'il existe un ordonnancement de E pour lequel les tâches de X sont exécutées toutes avant leurs dates limites.*

Théorème 25.11. *(Rappel) Soient E un ensemble de tâches et $\mathcal{F}$ la famille de parties réalisable de E.*

$(E, \mathcal{F})$ est un matroïde.

On conclut que pour résoudre le problème d'ordonnancement, il suffit de trier les tâches par ordre décroissant de leurs pénalités, puis appliquer GLOUTON.

	x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
Date souhaitée	d	1	2	3	4	4	4	6
Pénalité	c	3	6	4	5	7	2	1

↓

	x	x_5	x_2	x_4	x_3	x_1	x_6	x_7
Date souhaitée	d	4	2	4	3	1	4	6
Pénalité	c	7	6	5	4	3	2	1

↓

Date d'exécution	$f(x)$	1	2	3	4	5	6	7	
	x	x_3	x_2	x_4	x_5	x_7	x_1	x_6	
Date souhaitée	d	3	2	4	4	4	1	6	
Pénalité	c	4	6	5	7	1	**3**	**2**	Total : 5

25.5 Algorithmes de parcours dans les graphes

25.5.1 Arbres de parcours

Soit $G = (V, E)$ un graphe. On peut construire un arbre dans G comme suit. On commence par un arbre constitué d'un seul sommet r. A chaque étape, on construit l'arbre par extension, c'est-à dire, en ajoutant un nouveau sommet et une nouvelle arête qui relie ce sommet à un sommet de l'arbre déjà construit. Le sous graphe ainsi obtenu est connexe et sans circuit, donc un arbre. Un tel arbre T s'appelle un arbre de parcours de G, et le sommet r la racine de T. Le sommet x est le prédécesseur de y dans T, noté $x = p[y]$ (voir la figure 3.1). Il est clair que T est complètement déterminé par sa fonction prédécesseur .

Figure 3.1: Construction d'un arbre de parcours de racine r

Un pseudocode pour cet algorithme est comme suit:

```
PARCOURS(G, r).
01 # Construire un arbre couvrant p de racine r dans la composante connexe de G contenant r.
02 # Les sommets incorporés dans l'arbre sont marqués en rouge, les autres en blancs
03 Pour tout v ∈ V \ {r}
04     faire couleur[v] ← blanc
05 couleur[r] ← rouge
06 # p est la fonction prédécesseur de l'arbre.
07 # La racine n'a pas de prédécesseur
08 p[r] ← 0
09 tant que vrai
10     si il existe une arête e = xy avec couleur[x] = rouge et couleur[y] = blanc
11         alors
12             couleur[y] ← rouge
13             p[y] ← x
14         sinon
15             retourner p.
```

Remarquons que cet algorithme s'arrête quand il ne reste aucune arête reliant un sommet rouge à un sommet blanc. Si tout sommet est rouge, p est un arbre couvrant de G, qui est par conséquent un graphe connexe. Sinon, le graphe G ne peut contenir aucune chaîne entre un sommet rouge et un sommet blanc; par définition, il est donc non connexe. On vient de démontrer le théorème suivant:

Théorème 25.12. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *$G = (V, E)$ est connexe;*
2. *pour toute partition (R, B) de V avec $\varnothing \subset R \subset V$, il existe une arête de G dont une extrémité appartient à R et une extrémité appartient à B.*

Remarque 25.13. L'algorithme PARCOURS peut être affiné de plusieurs façons en imposant des contraintes supplémentaires sur le choix de l'arête : (ligne 6)

- PARCOURS EN LARGEUR: le sommet x est le plus ancien sommet rouge pour lequel il existe une arête y avec un sommet blanc;
- PARCOURS EN PROFONDEUR: le sommet est le plus récent sommet rouge pour lequel il existe une aréte xy avec y un sommet blanc;
- Algorithme de PRIM (dans le cas d'un graphe pondéré): l'arête y est une arête de coût minimum reliant un sommet rouge à un sommet blanc.

On verra par la suite que les arbres de parcours qui en résultent possèdent des propriétés particulières qui permettent de résoudre plusieurs questions fondamentales sur la structure des graphes.

25.5.2 Parcours en largeur

25.5.2.1 Algorithme PARCOURS EN LARGEUR

Pour améliorer l'efficacité de l'algorithme décrit ci-dessous, on se servira d'une structure de données appelée file, un ensemble totalement ordonné i muni de deux opérations:
- ENFILER(Q, y): ajouter l'élément y comme dernier élément de Q;
- DEFILER(Q): supprimer le premier élément x de Q et retourner comme sortie.

Ces opérations sont illustrées dans la figure 3.2.

```
PARCOURS EN LARGEUR(G, r)
01 # Construire un arbre de parcours en largeur p de racine r dans un graphe connexe G.
02 # Les sommets incorporés dans l'arbre sont marqués en rouge, les autres en blancs.
03 pour tout v ∈ V \ {r} faire
04     couleur[v] ← blanc
05 couleur[r] ← rouge
06 # p est la fonction prédécesseur de l'arbre.
07 # La racine n'a pas de prédécesseur
08 p[r] ← ∅
09 # n[v] est le niveau du sommet v dans l'arbre, la distance de r à v dans l'arbre.
10 # La racine est au niveau 0
11 n[r] ← 0
12 # t est le temps, augmenté par une unité pour chaque sommet ajouté à l'arbre.
13 t ← 0
14 t[r] ← t
15 Q ← {r}
16 tant que Q ≠ ∅ faire
17     x ← DEFILER(Q)
18     #L[x] est la liste des voisins du sommet
19     pour tout y ∈ L[x] faire
20         si couleur[y] = blanc
21             alors
22                 couleur[y] ← rouge
23                 p[y] ← x
24                 n[y] ← n[x] + 1
25                 t ← t + 1
26                 t[y] ← t
27                 ENFILER(Q, y)
28 retourner (p, n, t).
```

Un arbre de parcours en largeur de racine r dans un graphe, avec le temps de l'addition de chaque sommet ainsi que son niveau, est indiqué dans la figure 3.3. Notons r le nombre de sommets et m le nombre d'arêtes de G. Le temps d'exécution de PARCOURS EN LARGEUR est alors $O(m)$: l'initialisation (lignes 1-8) et les opérations DEFILER (lignes 9-10) se font en temps $O(n)$, et un temps constant (lignes 11-16) est dépensé pour chaque voisin de chaque sommet .

Temps $t[v]$ de l'addition du sommet v Niveau $n[v]$ du sommet v

Figure 3.3 : Un arbre de parcours en largeur de racine T

25.5.2.2 Propriétés de PARCOURS EN LARGEUR

Proposition 25.14.

1. $n[x] < n[y] \Rightarrow t[x] < t[y]$.
2. $xy \in E(G) \Rightarrow |n[x] - n[y]| \leqslant 1$.
3. $d(r, v) = n[v] = d_T(r, v)$, *pour tout* $v \in V$ *(où* $d_T(r, v)$ *désigne la distance de* r *à* v *dans* T*).*

25.5.2.3 Applications de PARCOURS EN LARGEUR

- **Excentricité d'un sommet, du diamètre, du rayon et centre d'un graphe**

  Définition 25.15. *(Rappel) Soit* v *un sommet d'un graphe* G*. L'excentricité de* v *est définie par :*

  – $\mathrm{ex}(v) = \max\{d(u, v) : u \in V\}$.

Ce paramètre se calcule en temps $O(m)$ par un parcours en largeur de racine v.

Définition 25.16. *(Rappel) Le rayon et le diamètre d'un graphe $G = (V, E)$ sont définis par :*

- $\text{ray}(G) = \min\{\text{ex}(v); v \in V\}$,
- $\text{diam}(G) = \max\{\text{ex}(v); v \in V\}$.

Ces deux paramètres se calculent donc en temps $O(mn)$: un parcours en largeur depuis chaque sommet v, suivi par le calcul du maximum et du minimum d'un ensemble de n nombres, ce qui se fait en temps $O(n)$.

Définition 25.17. *(Rappel) Un* ***centre d'un graphe*** *est un sommet dont l'excentricité est égale au rayon du graphe.*

Ces sommets peuvent être déterminés en temps $O(mn)$.

- **Circuits pairs, impairs et graphes bipartis**

Théorème 25.18. *(Rappel) Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *G est biparti ;*
2. *tout circuit de G est de longueur paire.*

25.5.3 Parcours en profondeur

25.5.3.1 Algorithme PARCOURS EN PROFONDEUR

L'algorithme PARCOURS EN PROFONDEUR(G, T) est un algorithme récursif : dès qu'un nouveau sommet est ajouté à l'arbre, un parcours en profondeur PP() de racine démarre dans le sous graphe de G induit par les sommets non encore explorés.

```
PP (x)
# Construire un arbre de parcours en profondeur T(x) de racine x,
# dans le sous graphe induit par les sommets non encore explorés.
t ← t + 1
# d[x] est le temps de découverte du sommet .
d[x] ← t
# Le sommet x est ajouté à l'arbre.
couleur[x] ← rouge
pour tout y ∈ L[x] faire
    si couleur[y] = blanc
        alors
            p[y] ← x
            PP(y)
t ← t + 1
# f[x] est le temps de fin d'exploration du gaphe à partir de x.
f[x] ← t
```

```
PARCOURS EN PROFONDEUR(G, r)
# Construire un arbre de parcours en profondeur p de racine r dans un graphe G.
# Les sommets incorporés dans l'arbre sont marqués en rouge, les autres en blancs.
pour tout v ∈ V faire
    couleur[v] ← blanc
p[r] ← ∅
t ← 0
PP(r)
retourner (p, d, f)
```

Cet algorithme est illustré dans la figure 3.4; le couple $(d[v],\ f[v])$ est indiqué pour chaque sommet v. Le temps d'exécution de l'algorithme PARCOURS EN PROFONDEUR(G, r) est $O(m)$, comme pour PARCOURS EN LARGEUR(G, r).

25.5.3.2 Propriétés de PARCOURS EN PROFONDEUR

Proposition 25.19.

1. $d[x] < d[y] \Rightarrow$ *soit* $d[x] < d[y) < f[y] < f[x]$ *soit* $d[x] < f[x] < d[y] < f[y]$.
2. $y \in E(G) \Rightarrow$ x, y *parents.*

Remarque 25.20. Soit G un graphe orienté. Si $L[x]$ désigne la liste des voisins extérieurs du sommet dans G, l'algorithme PARCOURS EN PROFONDEUR(G, r) construit une arborescence de racine r dans G, c'est-à-dire, un arbre orienté (pas forcément couvrant) dont tout sommet sauf la racine a un degré intérieur de un.

25.5.3.3 Applications de PARCOURS EN PROFONDEUR

- **Tri topologique d'un graphe orienté**

  Définition 25.21. *Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté sans circuit orienté.*
  *Un **tri topologique** de G est un ordre total $\preceq$ de V tel que $(x, y) \in E(G) \Rightarrow x \preceq y$.*

  Cette notion est illustrée dans la figure 3.5.

  Figure 3.5 : Tri topologique

  Exercice 25.1. Soit G un graphe orienté sans circuit orienté.

  a) Montrer que G a une source (un sommet de degré intérieur nul).

  b) En déduire que G admet un tri topologique.

  Exercice 25.2. Soit G un graphe orienté sans circuit orienté.

  a) Montrer que, par rapport à une arborescence de parcours en profondeur de G, $(x, y) \in E(G)$ $\Rightarrow$ soit est un ancêtre de y, soit $d[x] > d[y]$.

  b) Ecrire un pseudocode ponr déterterminer un tri topologique de G en faisant une seule passe de PARCOURS EN PROFONDEUR(G, r).

  Figure 3.6: Sommets séparateurs

- **Détermination des sommets séparateur d'un graphe connexe**

  Définition 25.22. *(Rappel) Soit G un graphe connexe.*
  *Un **sommet séparateur** de G est un sommet v tel que $G \setminus v$ est non connexe.*

  Remarque 25.23. On peut répérer les sommets séparateurs de G en faisant une seule passe de PARCOURS EN PROFONDEUR(G, r). Par rapport à l'arbre retourné par l'algorithme :

  1. La racine r est un sommet séparateur si et seulement si elle a au moins deux fils.
  2. Un sommet $v \neq r$ est un sommet séparateur si et seulement si il a un fils dont aucun descendant n'est relié à aucun ancêtre strict de v.

  Exercice 25.3. En utilisant la propriété (2) de PARCOURS EN PROFONDEUR, vérifier que ces deux conditions caractérisent bien les sommets séparateurs.

  Exercice 25.4. Ecrire un pseudocode pour déterminer les sommets séparateurs d'un graphe G en faisant une seule passe de PARCOURS EN PROFONDEUR(G, r).

  Définition 25.24. *(Rappel) Un graphe est **séparable** si et seulement s'il contient un sommet séparateur, sinon il est **non séparable**.*

Définition 25.25. *(Rappel) Un* ***bloc*** *d'un graphe est un sous graphe non séparable maximal.*

Exercice 25.5. Montrer que deux blocs d'un graphe ont au plus un sommet commun, et qu'un tel sommet est un sommet séparateur du graphe.

Exercice 25.6. Ecrire un pseudocode pour déterminer les ensembles des sommets des blocs d'un graphe G en faisant une seule passe de PARCOURS EN PROFONDEUR(G, r).

25.5.4 Algorithme de Prim

Dans le cas d'un graphe connexe G avec une fonction de coût c, une heuristique gloutonne qui généralise la procédure PARCOURS s'impose : choisir comme arête y à rajouter à l'arbre une arête de coût minimum. Cette heuristique a été introduite par R.C. Prim, qui a montré qu'elle retourne toujours un arbre couvrant de coût minimum. Elle est illustré dans la figure 3.7. Pour des raisons d'efficacité, le pseudocode utilise une structure de données appelée file de priorité. Il s'agit d'une file dont les éléments sont ordonnés par ordre croissant selon une pondération réelle, appelée clé. Une file de priorité est munie de quatre opérations (dont deux nous seront utiles):

Le choix d'une aréte de l'arbre Arbre optimal de poids 30
Figure 3.7: Construction d'un arbre optimal par l'algorithme de Prim

- INSERER(Q, y) : insérer un nouveau élément y dans Q (à la bonne place)
- METTRE-A-JOUR(Q, y): mettre à jour Q suite à un changement de la clé de y;
- MIN(G) : retourner le premier élément x de Q (celui pour lequel la clé est minimum) ,
- EXTRAIRE-MIN(Q): supprimer le premier élément x de Q et retourner x comme sortie.

Remarque 25.26. Une file de priorité peut être mise à jour en utilisant la sous routine ENTASSER de l'algorithme TRI PAR TAS.

```
PRIM(G, r, c)
01 # Construire un arbre couvrant de G = (V, E, c) de racine r et de coût minimum.
02 # Les sommets incorporés dans l'arbre sont marqués en rouge, les autres en blancs.
03 pour tout v ∈ V faire
04     couleur[v] ← blanc
05     # clé[v] est le poids minimum d'une arête reliant le sommet blanc v à un sommet rouge.
06     clé[v] ← ∞
07 p[r] ← ∅
08 clé[r] ← 0
09 # Q est une file prioritaire des sommets blancs.
10 Q ← V
11 tant que Q ≠ 0 faire
12     x ← EXTRAIRE − MIN(Q)
13     # Le sommet x est ajouté à l'arbre.
14     couleur[x] ← rouge
15     pour tout y ∈ L[x] faire
16         si couleur[y] = blanc et c(xy) < clé[y]
17             alors
18                 p[y] ← x
19                 clé[y] ← c(xy)
20                 METTRE-A-JOUR(Q, y)
21 retourner p.
```

Remarque 25.27. Bien que cette heuristique ne rentre pas parfaitement dans le cadre de l'heuristique GLOUTON introduite dans le chapitre 2, on peut montrer assez facilement qu'elle retourne toujours comme sortie un arbre couvrant de coût minimum.

Théorème 25.28. *PRIM(G, r, c) retourne un arbre couvrant de coût minimal.*

25.6 Complexité algorithmique

25.6.1 Problèmes de Décision

Exemple 25.29. Considérons deux problèmes que nous avons déjà rencontrés :

- CIRCUIT HAMILTONIEN.
  Soit $G = (V, E)$ un graphe. Existe-t-il un circuit hamiltonien dans G ?
- ARBRE COUVRANT DE COÛT MINIMUM.
  Soit $G = (V, E, c)$ un graphe connexe pondéré. Déterminer le cout minimum d'un arbre couvrant de G.

Remarquons que le premier problème demande une réponse "oui" ou "non" , le second un nombre réel.

Définition 25.30. *Un problème qui demande une réponse oui ou non s'appelle un* ***problème de décision****.*

Remarque 25.31. Le second problème contient de façon implicite une infinitude de tels problèmes, un pour chaque $r \in \mathbb{R}$: existe-t-il un arbre couvrant de coût inférieur ou égal à r ? Dans ce chapitre, on verra comment classifier les problèmes de décision selon leur complexité algorithmique. Pour cela il conviendra d'employer le vocabulaire de la théorie des langages formels. Pour les besoins de ce chapitre, il suffira de considérer l'alphabet $\{0, 1\}$. Un langage sera alors une partie de $\{0, 1\}^*$.

25.6.2 Codages

Soit maintenant Q un problème de décision. Une instance I de Q est un cas spécifique du problème, par exemple un certain graphe, ou un certain graphe connexe pondéré. Un codage de l'ensemble $\mathcal{I}$ des instances de Q est une injection $c : \mathcal{I} \to \{0, 1\}^*$. L'ensemble $c(\mathcal{I})$ est donc un langage. La taille d'une instance I est la longueur de son codage $c(I)$. Ce codage sera supposé économe.

Exemple 25.32. Dans le cas d'un graphe, par exemple, bien qu'il y a un nombre illimité de codages possibles, il nous suffit d'en prendre un dont la taille est bornée par une fonction polynomiale du nombre n de sommets et du nombre m d'arêtes.

Un exemple d'un tel codage est la concaténation des lignes de la matrice d'adjacence, une suite de longueur n^2 (voir la figure 4.1) .

	a	b	c	d
a	0	1	0	1
b	1	0	1	1
c	0	1	0	0
d	1	1	0	0

$\to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to 0101101101001100$

Figure 4.1: Codage de graphes en mots de $\{0, 1\}^*$

Un problème de décision Q ainsi codé peut être vu comme une fonction Q: $c(\mathcal{I}) \to \{0, 1\}$, où $Q(x) = 1$ si la réponse est oui et $Q(x) = 0$ si la réponse est non. On étend le domaine de à $\{0, 1\}^*$ en posant $Q(x) = 0$ si $x \in \{0, 1\}^* \backslash c(\mathcal{I})$, et on associe à Q le langage $L(Q) = \{\text{xE } \{0, 1\}^*; Q(x) = 1\}$.

De même, un algorithme dans ce contexte de langages formels est une fonction $A : \{0, 1\}^* \to \{0, 1\}$.

Définition 25.33. *On dit que A **accepte** un mot si $A(x)=1$ et que A **rejette** sinon.*

Définition 25.34. *On dit que l'algorithme A **décide** L ou que A est un **algorithme de décision** si et seulement si A accepte tout mot d'un langage L et rejette tout mot $x \in f\{0,1\}\setminus L$.*

25.6.3 Les classes de complexité $\mathcal{P}$, NP et co-NP

25.6.3.1 La classe $\mathcal{P}$

On s'intéressera par la suite aux algorithmes qui fonctionnent en temps polynomial.

Définition 25.35. *Un algorithme de décision A **décide un langage L en temps polynomial** s'il existe un polynôme p tel que, pour tout $l \in \mathbb{N}$ et tout mot dans $\{0,1\}^*$ de longueur l :*

- *A accepte x en temps au plus $p(l)$ si $x \in L$, et*
- *A rejette x en temps au plus $p(l)$ si $x \in \{0,1\}^*\setminus L$.*

Définition 25.36. *L'ensemble des langages pour lesquels il existe des algorithmes de décision en temps polynomial est noté $\mathcal{P}$.*

Par un abus de langage, on dit que le problème Q appartient $\mathcal{P}$ à si $L(Q) \in \mathcal{P}$.

Exemple 25.37. On a déjà rencontré, dans le cadre des graphes, plusieurs problèmes de décision qui appartiennent à $\mathcal{P}$, dont :

- Est-ce que le graphe G est connexe ?
- Est-ce que le graphe G est biparti ?

25.6.3.2 La classe NP

Définition 25.38. *Un **algorithme de vérification** est une application $V\colon \{0,1\}^* \times \{0,1\}^* \to \{0,1\}$.*

Définition 25.39. *L'algorithme V **vérifie le mot** x si et seulement s'il existe un mot y tel que $V(x,y)=1$. Dans ce cas, le mot y s'appelle un **certificat** pour x.*

Définition 25.40. *On dit qu'un **algorithme vérifie un langage** L si et seulement si V vérifie tout mot de L et ne vérifie aucun mot de $\{0,1\}^*\setminus L$. Dans ce cas, on dira que V est un **algorithme de vérificateur** pour L.*

Définition 25.41. *Un algorithme de vérification A **vérifie un langage L en temps polynomial** s'il existe un polynôme p tel que, pour tout $l \in \mathbb{N}$ et tout mot dans $\{0,1\}^*$ de longueur l :*

- *A vérifie x en temps au plus $p(l)$ si $x \in L$, et*
- *A ne vérifie pas x si $x \in \{0,1\}^*\setminus L$.*

Définition 25.42. *L'ensemble des langages pour lesquels il existe des algorithmes de vérification en temps polynomial est noté* NP.

Remarque 25.43.

- Par définition, tout langage L décidé par un algorithme A en temps polynomial est également vérifié par ce même algorithme (avec le certificat nul) en temps polynomial, c'est-à-dire, la fonction V définie par $V(x,\, y) = \begin{cases} A(x), \text{si } y=\varepsilon \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ est un algorithme de vérification pour L en temps polynomial. On a donc l'inclusion $\mathcal{P} \subseteq$ NP.
- En revanche, il existe des langages dans la classe NP pour lesquels on ne connait aucun algorithme de décision polynomial.

Exemple 25.44.

- Un exemple est le problème CIRCUIT HAMILTONIEN, pour lequel un certificat convenable est la suite des sommets d'un circuit hamiltonien. Evidemment, on peut vérifier en temps polynomial qu'il s'agit bien d'un circuit hamiltonien du graphe.
- Un autre exemple est le problème: FACTORABILITE :
  Soit n un entier positif. Existe-t-il des entiers $p>1$ et $q>1$ tels que $p\times q=n$?
  Dans ce cas, un certificat pourrait consister tout simplement en les facteurs p et q. Il suffirait de multiplier p et q et vérifier que leur produit est en effet n. Cette opération peut se faire en temps $p(\lg\ n)$, pour un certain polynôme (la longueur de l'instance n étant $\lg n$). En revanche, un entier premier n'aurait pas un tel certificat, évidemment.

Pour illustrer la différence entre la décidabilité d'un langage et sa vérification considérer l'énoncé d'une conjecture difficile.

- Décider si l'énoncé est exact, est équivalent à démontrer la conjecture ou éventuellement de trouver un contre-exemple.
- En revanche, muni d'une preuve de la conjecture (le certificat), vérifier son exactitude est une tâche beaucoup plus facile.

Remarque 25.45. On ne sait pas s'il existe des langages qui appartiennent à NP mais pas à $\mathcal{P}$. En effet, la question $\mathcal{P}$ = NP ? est une des principales questions ouvertes en mathématiques. Une réponse affirmative à cette question aurait des conséquences algorithmiques majeures. Pour cette raison, une réponse négative est plus probable.

25.6.3.3 La classe co-NP

Soit un problème de décision. La négation de Q est le problème de décision $\bar{Q}$ défini par $\bar{Q}(x)=1-Q(x)$ pour tout $x\in c(\mathcal{I})$; autrement dit, la réponse à est oui si et seulement si la réponse à est non .

Exemple 25.46. Si Q est le problème CIRCUIT HAMILTONIEN, $L(\bar{Q})$ est le langage défini par l'ensemble des graphes non hamiltoniens.

Définition 25.47. *On définit la classe de langages co-*NP *par co-*NP $=\{L(\bar{Q}); L(Q)\in \text{NP}\}$.

25.6.3.4 Remarques

- Le problème de non existence dans un graphe d'un circuit hamiltonien appartient donc à la classe co-NP. Tandis que la vérification de l'existence d'un circuit hamiltonien est facile, on ne connait pas de certificat vérifiable en temps polynomial pour la non existence d'un circuit hamiltonien. Autrement dit, on ne sait pas si CIRCUIT HAMILTONIEN appartient à co-NP. Plus généralement, la question NP = co-NP ? est ouverte. Il est fort probable que la réponse sera négative.
- En principe, on pourrait définir de manière analogue la classe co-$\mathcal{P}$: co-$\mathcal{P}$ = $\{L(\bar{Q})$; $L(Q)\in\mathcal{P}\}$. Or un algorithme de décision en temps polynomial pour $L(Q)$ se transforme facilement en un tel algorithme pour $L(\bar{Q})$. Donc NP = co-$\mathcal{P}$, ce qui entraîne la relation $\mathcal{P}\subset \text{NP}\cap\text{co-NP}$.
- Il est naturel de demander si cette inclusion est stricte : $\mathcal{P}\subset$ NP $\cap$ co-NP ? Encore une question ouverte! Or cette fois-ci on pense que la réponse sera affirmative. Pour la plupart des problèmes appartenant à la fois à NP et à co-NP, on connait en effet des algorithmes polynomiaux.

  Exemple 25.48.

  - Le problème de décider si un graphe est biparti appartient à NP : une bipartition sert comme certificat. Ce problème appartient également à co-NP, un certificat convenable étant un circuit de longueur impaire. Le problème appartient donc à NP $\cap$ co-$\mathcal{N}$. Or ce problème appartient en fait à $\mathcal{P}$, puisqu'il existe un algorithme polynomial pour décider si un graphe est biparti (par exemple, en utilisant un parcours en largeur).

- Une instance moins évident de ce phénomène est le problème de couplages. Un couplage dans un graphe est un ensemble d'arêtes sans extrémité commune. Le problème de décider si un graphe contient un couplage de cardinalité k appartient clairement à NP, un tel couplage servant comme certificat. Grâce à un théorème de W.T. Tutte démontré en 1947, on sait que ce problème appartient également à co-NP. Tutte a montré qu'un graphe $G = (V, E)$ contient un couplage de cardinalité k si et seulement si, pour tout $S \subseteq V$, le nombre $c_{\text{imp}}(G \backslash S)$ de composantes de $G \backslash S$ ayant un nombre impair de sommets est inférieur ou égal à $\text{card}(V) + \text{card}(S) - 2k$. Un ensemble $S \subseteq V$ tel que $c_{\text{imp}}(G \backslash S) > \text{card}(V) + \text{card}(S) - 2k$ sert donc comme certificat que G ne contient aucun couplage de cardinalité k. Presque vingt ans plus tard, en 1965, J. Edmonds découvre un algorithme polynomial pour déterminer un couplage de cardinalité maximum dans un graphe, ce qui montre que le problème appartient à $\mathcal{P}$.
- Une exception notable à cette règle est le problème de PRIMARITÉ : Soit n un entier positif. Est-ce-que n est un nombre premier ? On a vu que ce problème appartient à co-NP, sa négation étant le problème FACTORABILITÉ. Son appartenance à NP, bien que moins évident, a été démontré par V. Pratt. Néanmoins, on ne connait aucun test de primarité qui se fait en temps polynomial. Un tel algorithme aurait des conséquences majeures en cryptographie (sécurité internet, ...).

25.6.4 Réductibilité, NP-complétude et la classe NPC

25.6.4.1 Réductibilité

Définition 25.49. *Soient L et L' deux langages.*

1. *On dit que L' est* ***réductible*** *(en temps polynomial) à L, et on le note $L' \preccurlyeq L$, si et seulement s'il existe une fonction r: $\{0, 1\}^* \to \{0, 1\}^*$, calculable en temps polynomial, telle que : $(x \in L') \Leftrightarrow (r(x) \in L)$.*
2. *Une telle fonction r s'appelle une* ***fonction de réduction*** *de L' à L,*
3. *et un algorithme qui calcule r un* ***algorithme de réduction****.*

Puisque la composition de fonctions polynomiales est une fonction polynomiale, la relation $\preceq$ est réflexive et transitive (un préordre). Les langages L' et L sont polynomialement équivalents si $L' \preceq L$ et $L \preceq L'$.

Exemple 25.50. Les problèmes de l'existence d'un circuit hamiltonien dans un graphe et de l'existence d'un circuit hamiltonien orienté dans un graphe orienté sont polynomialement équivalents. Pour réduire le premier au dernier, il suffit de remplacer chaque arête xy par deux arêtes (x, y) et (y, x). Pour réduire le dernier au premier, on pourrait remplacer chaque sommet par une chaîne de longueur deux $x^- x x^+$, et remplacer chaque arête (x, y) par une arête $x^+ x^-$. Ces réductions sont illustrées dans la figure 4.2.

Si $L' \preceq L$, le langage L' est en quelque sorte moins complexe que L. On a, par exemple, le résultat suivant :

Théorème 25.51. *Soient L' et L deux langages. Si $L' \preceq L$ et $L \in \mathcal{P}$, alors $L \in \mathcal{P}$.*

Figure 4.2: Equivalence polynomiale de CIRCUIT HAMILTONIEN et CIRCUIT HAMILTONIEN ORIENTE

25.6.4.2 NP-complétude

Définition 25.52. *Un langage L est appelé* **NP-*dur*** *si et seulement si $L' \preceq L$ pour tout $L \in$ NP.*

Définition 25.53. *Si d'ailleurs* $L \in$ NP *, le langage* L *est* NP*-complet.*
La classe des langages NP*-complets est notée* NPC*.*

Ces langages sont alors les langages les plus complexes de la classe $\mathcal{N}$. Selon le théorème 4.2.1, si l'un entre eux appartenait à $\check{r}\mathcal{P}$, tout langage dans $\mathcal{N}$ s'y retrouverait, et on aurait $\mathcal{P} =$ NP.

25.6.5 Satisfaisabilité

25.6.5.1 Le problème SAT

Une formule booléenne est satisfaisable s'il existe une interprétation pour laquelle la formule s'évalue à 1. Le problème de satisfaisabilité de formules booléennes, noté SAT, s'énonce comme suit:

SAT

Soit f une formule booléenne. Est-ce que f est satisfaisable ?

Il est clair que le problème SAT appartient à NP, une interprétation satisfaisante étant un certificat convenable. Le théorème clé de la théorie de complexité dit que ce problème appartient en fait à la classe NPC.

Théorème 25.54. *(Théorème de Cook) Le problème SAT est* NP*-complet.*

On s'intéressera par la suite aux formules booléennes d'une forme particulière. Un littéral est une variable x ou sa négation $\bar{x}$. Une clause disjonctive est une disjonction de littéraux, une clause conjonctive une conjonction de littéraux. Une formule est en forme normale conjonctive si elle est une conjonction de clauses disjonctives. Elle est en forme normale disjonctive si elle est une disjonction de clauses conjonctives.

Exemple 25.55. La formule
$f = (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \bar{x_3} \vee x_4) \wedge (\bar{x_1} \vee \bar{x_3} \vee \bar{x_4})$ est en forme normale conjonctive.

Exercice 25.7. Soient $f = f_1 \wedge f_2 \wedge ... \wedge f_k$ et $g = g_1 \wedge g_2 \wedge ... \wedge g_l$ des formules booléennes en forme normale conjonctive. Montrer que :

a) $(f \wedge g)$ est en forme normale conjonctive.

b) $(f \vee g)$ est équivalente à une formcle booléenne en forme normale conjonctive.

c) $(\neg f)$ est en forme normale disjonctive, et elle est équivalente à une forme booléenne en forme normale conjonctive.

En déduire que toute formule booléenne est équivalente à une formule booléenne en forme normale conjonctive.

25.6.5.2 Le problème k-SAT

Le problème de k-satisfaisabilité, noté k-SAT, est défini comme suit:

k-SAT

Soit f une formule booléenne en forme normale conjonctive avec k littéraux par clause. Est-ce que f est satisfaisable?

Proposition 25.56. *Toute formule booléenne est équivalente, par une réduction polnomiale, à une formule booléenne en forme normale conjonctive avec trois littéraux par clause. Autrement dit,* SAT $\preceq$ 3*-SAT.*

Par le théorème de Cook, la proposition 4.3.1 et la transitivité de la relation de réductibilité $\preceq$, on déduit la NP-complétude de 3-SAT.

Théorème 25.57. *Le problème 3-SAT est* NP*-complet.*

Exercice 25.8. Montrer que 2-SAT $\in \mathcal{P}$.

25.6.6 Problèmes NP-complets

25.6.6.1 COUVERTURE EXACTE

A l'instar de ce dernier théorème, on peut montrer que beaucoup de problèmes de la classe NP appartiennent en fait à la sous classe NPC. L'intérêt de ce type de résultats est l'indice qu'ils apportent quant à la difficulté de ces problèmes. Lorsqu'on sait qu'un certain problème est NP-complet, on ne cherche plus à le résoudre au moyen des algorithmes polynomiaux, on cherche plutôt des heuristiques ou des algorithmes d'approximation.

Un exemple type est le problème :

COUVERTURE EXACTE

Soit A une famille de parties d'un ensemble X . Est-ce qu'il existe une partition $\mathcal{P}$ de X telle que $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{A}$?

Théorème 25.58. *3-SAT $\preceq$ COUVERTURE EXACTE.*

Corollaire 25.59. *Le problème COUVERTURE EXACTE est* NP*-complet.*

25.6.6.2 CIRCUIT HAMILTONIEN ORIENTÉ

Une différente construction nous permet de démontrer la NP-complétude du problème CIRCUIT HAMILTONIEN ORIENTÉ.

Théorème 25.60. *COUVERTURE EXACTE $\preceq$ CIRCUIT HAMILTONIEN ORIENTÉ.*

Corollaire 25.61. *Le problème CIRCUIT HAMILTONIEN ORIENTÉ est* NP*-complet.*

Corollaire 25.62. *Le problème CIRCUIT HAMILTONIEN est* NP*-complet.*

Chapitre 26
Domaine opérateur

26.1 Définition

Définition 26.1. *On appelle* ***loi de composition externe*** *ou* ***action d'une ensemble*** Ω *(dit domaine opérateur) sur un ensemble E, toute application de $\Omega \times E \to E$. On dit dans ce cas que Ω opère E.*

Exemple 26.2. Voir les groupes opérants sur un ensemble.

Chapitre 27
L.C.I., Magma, Semi-groupe, Monoïde

27.1 Loi de composition interne ou loi de composition

Définition 27.1. *On appelle loi de composition interne sur E (l.c.i.), toute application* f: $\left|\begin{array}{ccc} E\times E & \to & E \end{array}\right.$. *Si l'on désigne par* $*$ *cette loi alors* $\forall a,b\in E, f(a,b)$ *est noté* $a*b$.

Remarque 27.2. f étant une application s'assurer que $a * b$ est unique $\forall a,\ b \in E$ avant d'affirmer que la loi $*$ est une loi de composition interne.

27.2 Magma

Définition 27.3. *Soit E un ensemble, $*$ une loi de composition interne.*
Le couple $(E,*)$ est appelé ***magma****.*

Définition 27.4. *Soit $(E,*)$ un magma et a un élément de E.*
On appelle ***translation*** *à droite [resp. à gauche] par a et on note δ_a [resp. γ_a] l'application :* $\left|\begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x*A \end{array}\right.$ *[resp.* $\left|\begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & A*x \end{array}\right.$ *].*

Définition 27.5. *Etant donné deux magmas $(E,*)$ et $(F,\top)$. On appelle :*

- ***morphisme de magmas*** *(ou homomorphisme) de $(E,*)$ dans $(F,\top)$ toute application $f: E\to F$ telle que : $\forall x,y\in E, f(x*y)=f(x)\top f(y)$.*
- ***endomorphisme d'un magma*** *$(E,*)$ est un morphisme de magmas de $(E,*)$ dans $(E,*)$.*
- ***isomorphisme de magmas*** *est un morphisme bijectif de magmas.*
- ***automorphisme d'un magma*** *$(E,*)$ est un endomorphisme bijectif du magma $(E,*)$.*

Exemple 27.6. 1. L'application $\ln:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ est un isomorphisme du magma $(\mathbb{R}_+^*,*)$ sur le magma $(\mathbb{R},+)$.

2. Soient E un ensemble, $*$ et $\top$ deux l.c.i. dans E. Pour que $\top$ soit distributive à gauche [resp. à droite] sur $(E,*)$; il faut et il suffit que, pour tout a de E l'application γ_a: $\left|\begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & a\top x \end{array}\right.$ [resp. δ_a: $\left|\begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x\top a \end{array}\right.$] soit un endomorphisme du magma $(E,*)$.

Définition 27.7. *Soient X un ensemble, $(E,*)$ un magma.*
On peut munir E^X d'une l.c.i., encore notée $*$, définie par :
$\forall f,g\in E^X, \forall x\in X, (f*g)(x)=f(x)*g(x)$
et appelée ***extension*** *à E^X de la* ***loi $*$*** *de E.*

Exemple 27.8. $f,g\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $f+g$: $\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)+g(x) \end{array}\right.$

Définition 27.9. *Soit $(E,*)$ un magma.*
On peut munir $\mathcal{P}(E)$ d'une l.c.i., encore notée $*$, définie par :
$\forall A,B\in\mathcal{P}(E), A*B=\{x\in E;\exists(a,b)\in A\times B; x=a*b\}=\{a*b;(a,b)\in A\times B\}$
et appelée ***extension*** *à $\mathcal{P}(E)$ de la loi $*$ de E.*

Exemple 27.10.

- Dans $\mathbb{R}$, $\{1,2\}+\{4,9\}=\{5,6,10,11\}$, $]-\infty;0[+]0;+\infty[=\mathbb{R}$.

– Pour $A \in \mathcal{P}(E)$ et $a \in A$, on peut noter $a * A$ au lieu de $\{a\} * A$; par exemple, dans $(\mathbb{R}, \cdot)$ usuel, pour tout x de $\mathbb{R}$, $x \cdot \mathbb{Z} = \{x \cdot n; n \in Z\}$.

Définition 27.11. *Soit $(E, *)$ un magma.*

– *Une **partie** A de E est dite **stable** pour $*$ si et seulement si $A * A \subset A$, i.e. $\forall a, b \in A, x * y \in A$.*

– *Si A est une partie stable de E pour $(E, *)$, la l.c.i. dans A définie par :*
$$\left|\begin{array}{ccc} A \times A & \to & A \\ (x, y) & \mapsto & x * y \end{array}\right.$$
*est appelée **l.c.i. induite** sur A par $*$ de E et encore notée $*$.*

Définition 27.12. *On appelle **produit** de deux **magmas** $(E, \top)$ et $(F, \bot)$ le magma $(E \times F, *)$ où $*$ est la l.c.i. dans $E \times F$ définie par :*
$\forall (x, y), (x', y') \in E \times F, (x, y) * (x', y') = (x \top x', y \bot y')$.

Exemple 27.13. $\mathbb{R}^2$, muni de la l.c.i. $+$ définie par :
$\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}, (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ est appelé le produit du magma $(\mathbb{R}, +)$ par lui-même.

Proposition 27.14. *Soit E un ensemble muni d'une l.c.i. associative et commutative*

1. *(Linéarité de la composition finie)*
2. *(Invariance par permutation des signes de composition)*
$$\forall (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2, \forall (x_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in E^{(n \times p)}$$
$$\prod_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1}^{p} x_{i,j} \right) = \prod_{j=1}^{p} \left(\prod_{i=1}^{n} x_{i,j} \right) \text{ (en notation multiplicative)}$$
$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} x_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{n} x_{i,j} \right) \text{ (en notation additive)}$$
$$\dots$$
Lors de compositions (additions, multiplications ...) finies d'élément de E, on conserve le résultat en permuttant les signes de composition.
3. *(Invariance par permutation des indices)*

Remarque 27.15. On retrouvera donc cette propriété dans un groupe commutatif, un espace vectoriel, un anneau ou un corps pour la première loi et pour la deuxième loi s'il sont commutatifs.

Démonstration. (par récurrence) □

27.3 Semi-groupe

Définition 27.16. *Soit E un ensemble $(E, *)$ une loi de composition interne associative.*
*Le couple $(E, *)$ est appelé **semi-groupe.***

Remarque 27.17. En fait, il s'agit d'un magma dont la loi de composition est associative

27.4 Monoïde

Définition 27.18. *Soit E un ensemble $(E, *)$ une loi de composition interne associative admettant un élément neutre le triplet $(E, *, e)$ est appelé **monoïde**.*

Remarque 27.19.

1. Il s'agit en fait d'un semi-groupe possédant un élément neutre pour $(E, *)$.
2. Demi-groupe : synonyme de monoïde selon le dictionnaire de Mathématiques PUF. Bouvier et George.

Proposition 27.20. *Soit $(E,*)$ un monoïde.*

i. a inversible $\Rightarrow$ a régulier

ii. a inversible $\Rightarrow$ a admet un unique inverse

iii. a et b inversibles $\Rightarrow a*b$ inversible et $[(a*b)^{-1}=b^{-1}*a^{-1}]$

iv. a inversible $\Rightarrow$ l'équation $a*x=b$ $[x*a=b]$ admet un solution unique $x=a^{-1}*b$ $[x=b*a^{-1}]$.

v. $*$ commutative et a symétrisable à droite ou à gauche $\Rightarrow$ a admet un symétirique

Proposition 27.21. *La propriété d'associativité dans un monoïde entraine que :*

1. *Le produit dans E de n éléments x_1; x_2; ...; x_n peut s'écrire simplement $x_1*x_2*...*x_n$. Quel que soit l'ordre des calculs. Démonstration (Cours de Licence).*
2. *On peut adopter la notation exponentielle :*
   - *$x^n=x*x*...*x$ (n facteurs) avec $x^1=x$ et $x^0=e$*
   - *et avoir $x^m*x^n=x^{m+n}=x^n*x^m$ $(x^m)^n=x^{m\times n}=(x^n)^m$ où $m,n\in\mathbb{N}$*

Remarque 27.22. Attention :

- si $(E,*)$ n'est pas commutative alors $(x*y)^n\neq(x^n*y^n)$
- si x et y commutent alors $(x*y)^n=x^n*y^n$ et $x^m*y^n=y^n*x^m$.

Note 27.23. Dans la suite acu sera l'abréviation pour anneau commutatif unitaire et acui celle pour anneau commutatif unitaire intègre. $\mathcal{D}_p$ désignera l'ensemble des diviseurs de p. "ou" désignera le ou inclusif et "ou bien" le ou exclusif.

27.4.1 Eléments premiers dans un monoïde commutatif

[Document, de les-mathématiques.net]

A l'origine de cet article, il y a un certain malaise que j'ai éprouvé (et je ne dois pas être le seul) en constatant que la définition d'élément premier d'un acui, qui est censée généraliser celle d'entier premier dans $\mathbb{N}$, fluctuait suivant les auteurs avec des propositions qui n'étaient pas toujours logiquement équivalentes. Ceci m'a amené à proposer une définition ne faisant appel qu'à l'inversibilité en partant du principe que ce qui caractérise un élément premier c'est le fait qu'il ne puisse se factoriser en un produit de 2 facteurs que si l'un des facteurs est inversible et pas l'autre. D'où le titre.

[Note personnelle Guy : Pour montrer qu'un nombre n'est pas premier, il suffit de montrer qu'il existe une décomposition en produit de 2 nombres inversibles ou non inversibles (c'est à dire composés)

Exemple 27.24. $1=1\times1$ inversibles, $14=2\times7$ non inversibles.

Autrement dit, il faut montrer que les seuls décompositions possibles en produit de 2 facteurs soient le produit de 2 facteurs inversibles ou de 2 facteurs non inversibles.]

Par négation, un élément non premier n sera donc un élément pour lequel il existera une factorisation en 2 facteurs inversibles (n sera alors inversible) ou en 2 facteurs non inversibles(on dira alors que n est un élément composé). La structure la plus générale où l'on puisse développer ces idées est celle de demi-goupe multiplicatif abélien, comme $(\mathbb{N},\times)$, pour disposer de la notion d'élément inversible. On se retrouve ainsi dans le cadre naturel où s'est forgé le concept de nombre entier premier. Formalisons cela en considérant un demi-groupe abelien $(E,\times)$ d'élément neutre 1. On notera $\mathcal{U}$ l'ensemble des éléments inversibles de E $(1\in\mathcal{U})$ et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des éléments premiers de E obtenu grâce à l'une des 2 définitions équivalentes suivantes :

27.4.2 Définition

Définition 27.25.

- $\forall p\in E$ $\quad p$ *premier* $\iff\forall(a,b)\in E^2\quad p=a\,b\Rightarrow(a,b)\notin\mathcal{U}^2\bigcup(E\backslash\mathcal{U})^2$ *(I)*

- $\forall p \in E \quad p \text{ premier } \iff \forall (a,b) \in E^2 \quad p = a\,b \Rightarrow a \text{ ou bien } b \in \mathcal{U}.$

C'est à dire que p ne peut s'écrire comme produit de 2 facteurs que si l'un est inversible et pas l'autre. D'où par négation: $\forall p \in E$, p non premier $\iff \exists (a, b) \in E^2 \quad p = a\ b$ et $(a, b) \in \mathcal{U}^2 \bigcup (E \backslash \mathcal{U})^2$.

On obtient ainsi une classification des éléments d'un demi-groupe abélien multiplicatif. Chaque élément d'un tel demi-groupe est :

- soit premier,
- soit inversible,
- soit composé (i.e. factorisable en un produit de 2 éléments non inversibles).

Chaque cas excluant les deux autres.

Remarque 27.26.

- On peut remarquer facilement que tout élément inversible x n'est pas premier, car il est produit de 2 inversibles $x = x \times 1$. Donc dans un groupe, il n'y a pas d'éléments premiers.
- Un carré x^2 n'est jamais premier, car suivant que x est inversible ou pas, x^2 est le produit de 2 inversibles ou de 2 non inversibles.
- D'autre part, pour le demi-groupe $(A, \times)$ d'un acui A l'élément 0 n'est pas premier, car il est produit de 2 non inversibles $0 = 0 \times 0$. Donc 0 est même un élément composé.
- Si A est un acu, on pourra bien sûr appliquer cette définition au demi-groupe abelien $(A, \times)$ i.e. hors intégrité de l'anneau.

27.4.3 Définitions consensuelles

Note 27.27. A étant un acu rappelons 2 définitions pour lesquelles il y a consensus de tous les auteurs cités dans cet article.

Définition 27.28. *A intègre* $\iff A \neq \{0\}$ *et* $\forall (a,b) \in A^2 \quad a\,b = 0 \Longrightarrow a = 0$ *ou* $b = 0$

Définition 27.29. *I idéal premier de $A \iff A/I$ est intègre* $\iff A/I \neq \{0\} (A \neq I)$ *et* $\forall (\overline{x}, \overline{y}) \in A/I \quad \overline{x}.\overline{y} = \overline{0} \Longrightarrow \overline{x} = \overline{0}$ *ou* $\overline{y} = \overline{0} \iff A/I \neq \{0\} (A \neq I)$ *et* $\forall (a,b) \in A^2 \quad a\,b \in I \Longrightarrow a \in I$ *ou* $b \in I$.

Par conséquent si A est intègre l'idéal nul $I = \{0\}$ est premier.

27.4.4 Quelques liens logiques

p étant un élément d'un acui A considérons 3 propositions utilisées par différents auteurs pour définir un élément premier.

Proposition 27.30. *$p \neq 0$ et $p \notin \mathcal{U}$ et $\mathcal{D}_p = \mathcal{U} \bigcup p\mathcal{U}$ (II) Maclane et Birkhoff [1]*

Proposition 27.31. *$p\,A$ est un idéal premier (III) Arnaudiès et Bertin [2], Bouvier ,George, ... [3]*

Proposition 27.32. *$p \notin \mathcal{U}$ et $\forall (a,b) \in A^2, p|a\,b \Longrightarrow p|a$ ou $p|b$ (IV) Duverney [4]*

Montrons que (III) $\iff$ (IV).

Démonstration.

1. (III) $\overset{?}{\Longrightarrow}$ (IV) :
   On utilisera les équivalences suivantes qui caractérisent un idéal (principal) premier : $p\,A$ idéal premier $\iff A/p\,A$ est intègre $\iff A/p\,A \neq \{0\}$ et $\forall (a,b) \in A^2, a\,b \in p\,A \Longrightarrow a \in p\,A$ ou $b \in p\,A$.

D'abord $p \notin \mathcal{U}$ (sinon $p \in \mathcal{U} \Longrightarrow pA = A \Longrightarrow A/pA = \{0\}$ ce qui contredirait (III)).

Ensuite $p|a\,b \Longrightarrow a\,b \in pA$ d'où d'après (III) $a \in pA$ ou $b \in pA$ c'est à dire $p|a$ ou $p|b$ et ainsi (IV) est bien vérifié.

2. (IV) $\overset{?}{\Longrightarrow}$(III) :

   D'abord $A/pA \neq \{0\}$(sinon $pA = A \Longrightarrow p \in \mathcal{U}$ce qui contredirait (IV)) Ensuite $a\,b \in pA \Longrightarrow p|a\,b$ d'où d'après (IV) $p|a$ ou $p|b$c'est à dire $a \in pA$ ou $b \in pA$et ainsi (III) est bien vérifié. □

Remarque 27.33. En définissant un élément premier p d'un acui A grâce à l'une des 2 propositions équivalentes (III) ou (IV) on aurait l'inconvénient que 0 soit premier. En effet $0A = \{0\}$ est un idéal premier vu que $A/0A = A$ qui est intègre. Des lors (III) $\not\Leftrightarrow$ (II) car pour $p = 0$ (III) est vraie alors que (II) est fausse. Et même si on ajoutait à (III) $pA \neq \{0\}$ l'équivalence avec (II) serait encore fausse. (II) $\not\Leftrightarrow pA$ est un idéal premier non nul.

Exemple 27.34. On peut s'en convaincre avec l'acui $\mathbb{Z}(i\sqrt{5})$:

Il est facile de montrer qu'avec $p = 3$ (II) est vraie.

En posant $N(a + i\sqrt{5}b) = a^2 + 5b^2$, il est immédiat que $N(z\,z') = N(z)N(z')$ d'où si $z\,z' = 1$ avec $z = a + i\sqrt{5}b, N(z) = a^2 + 5b^2 = 1$, ce qui entraîne $b = 0, a = (\pm)1$.

Les inversibles de $\mathbb{Z}(i\sqrt{5})$ sont donc 1 et -1.

Soit $\mathcal{U} = \{1, -1\}$. $p = 3 \neq 0$ et $p = 3 \notin \mathcal{U} = \{1, -1\}$.

De plus $a + i\sqrt{5}b \in \mathcal{D}_3 \Longrightarrow \underline{(a + i\sqrt{5}b)(x + i\sqrt{5}y) = 3} \Rightarrow N(3) = 9 = (a^2 + 5b^2)(x^2 + 5y^2) \Longrightarrow a^2 + 5b^2 \in \mathcal{D}_9 = \{1, 3, 9\}$.

Or $a^2 + 5b^2 = 1 \Longrightarrow b = 0$ et $a = \pm 1 \Longrightarrow a + i\sqrt{5}b = \pm 1 \in \mathcal{U}$ et $a^2 + 5b^2 = 3 \Longrightarrow b = 0$ et $a^2 = 3$ ce qui est impossible dans $\mathbb{Z}$.

Enfin $a^2 + 5b^2 = 9 \Longrightarrow x^2 + 5y^2 = 1 \Longrightarrow y = 0$ et $x = \pm 1$ d'où avec l'égalité souslignée $a + i\sqrt{5}b = \pm 3 \in 3\mathcal{U}$.

On a donc prouvé l'inclusion : $\mathcal{D}_3 \subset \mathcal{U} \bigcup 3\,\mathcal{U}$ et comme l'inclusion contraire est immédiate (II) est bien vraie avec $p = 3$.

Pourtant $3\,\mathbb{Z}(i\sqrt{5})$ est un idéal non nul qui n'est pas premier vu que $(2 - i\sqrt{5})(2 + i\sqrt{5}) = 9 \in 3\,\mathbb{Z}(i\sqrt{5})$ bien que ni $(2 - i\sqrt{5})$, ni $(2 + i\sqrt{5}) \in 3\,\mathbb{Z}(i\sqrt{5})$ compte tenu que $2 - i\sqrt{5} = 3(a + i\sqrt{5}b) \Longrightarrow 2 = 3a$ ce qui est impossible dans $\mathbb{Z}$ et idem avec $2 + i\sqrt{5}$.

Le but recherché étant de trouver une définition générale d'un élément premier valable aussi bien pour les entiers naturels que pour les éléments d'un acui quelconque il reste la proposition (II) et on remarque qu'elle est équivalente à la proposition (I) proposée dans l'introduction. $p \neq 0$ et $p \notin \mathcal{U}$ et $\mathcal{D}_p = \mathcal{U} \bigcup p\mathcal{U}$ (II) $\forall (a, b) \in A^2 \quad p = a\,b \Longrightarrow (a, b) \notin \mathcal{U}^2 \bigcup (A\backslash\mathcal{U})^2$ (I).

Montrons que (II) $\Leftrightarrow$ (I)

Démonstration.

1. (II)$\overset{?}{\Longrightarrow}$(I) : $p = a\,b \Longrightarrow a$ et $b \in \mathcal{D}_p = \mathcal{U} \bigcup p\mathcal{U}$ alors $\underline{(a, b) \notin \mathcal{U}^2}$. Sinon on aurait $p = a\,b \in \mathcal{U}$ ce qui contredirait (II). On a aussi $\underline{(a, b) \notin (A\backslash\mathcal{U})^2}$. Sinon a et $b \notin \mathcal{U}$ et comme a et $b \in \mathcal{D}_p = \mathcal{U} \bigcup p\mathcal{U}$ on aurait donc a et $b \in p\mathcal{U}$ soit $a = p\,\varepsilon, b = p\,\theta$ puis $a\,b = p = p^2\varepsilon\theta$ et $p(1 - p\varepsilon\theta) = 0$ enfin comme A est intègre et $p \neq 0, 1 = p\varepsilon\theta$. On aurait donc $p \in \mathcal{U}$ ce qui contredirait (II). Finalement (I) est vérifiée.

2. (I)$\overset{?}{\Longrightarrow}$(II) : $p \neq 0$ sinon $p = 0.0$ avec $(0, 0) \in (A\backslash\mathcal{U})^2$ ce qui contredirait (I). $p \notin \mathcal{U}$ sinon $p = p.1$ avec $(p, 1) \in \mathcal{U}^2$ ce qui contredirait (I). $\mathcal{D}_p \subset \mathcal{U} \bigcup p\mathcal{U}$. En effet $a \in \mathcal{D}_p \Longrightarrow p = a\,b$ d'où d'après (I) $(a, b) \notin \mathcal{U}^2 \bigcup (A\backslash\mathcal{U})^2$. D'autre part, on a l'alternative : ou bien $a \in \mathcal{U}$ et alors $a \in \mathcal{U} \bigcup p\mathcal{U}$, ou bien $a \notin \mathcal{U}$ et alors $b \in \mathcal{U}$ sinon $(a, b) \in (A\backslash\mathcal{U})^2$ ce qui contredirait (I). Donc il existe $c \in A$tel que $b\,c = 1$ d'où $p = a\,b \Longrightarrow p\,c = a\,b\,c = a.1 = a$ et $a \in p\mathcal{U}$ vu que $c \in \mathcal{U}$. Par conséquent $a \in \mathcal{U} \bigcup p\mathcal{U}$. Finalement, l'inclusion annoncée est prouvée et comme l'inclusion contraire est immédiate, on a montré que (II) est vérifiée ce qui termine la preuve de l'équivalence annoncée. □

Note 27.35. Malgré l'équivalence des propositions (II) et (I) dans un acui, où l'intégrité a été utilisée, on peut remarquer que (II) fait référence à la structure d'anneau à cause de 0 qui y figure alors que ce n'est pas le cas de (I) qui se réfère seulement à un demi-groupe abélien multiplicatif. On pourrait aussi définir un élément premier, hors intégrité, dans un acu grâce à (I), mais on perdrait la règle des degrés deg(PQ) = deg(P) + deg(Q) pour P et Q non nuls qui découle de l'intégrité or cette règle est fondamentale pour l'arithmétique dans les anneaux de polynômes $A[X_1, X_2, ..., X_n]$. Il semble dès lors raisonnable de définir un élément premier dans un acui avec la proposition (II) ou la (I), c'est le choix fait dans ce qui suit. Montrons qu'avec la proposition (I), on retrouve les caractérisations usuelles des éléments premiers dans $\mathbb{N}$ et dans les demi-groupes multiplicatifs d'anneaux (acui) classiques comme $\mathbb{Z}$, et $A[X_1, X_2...X_n]$ avec $n \geq 1$ et A un acui , éventuellement un corps. Ici je préfère dire polynôme premier que polynôme irréductible qui pourrait faire référence à la notion d'élément irréductible d'un acui dont je préfère ne pas parler ici, même si , pour $p \neq 0$ les 2 notions coïncident sur un acui factoriel([2] page 50).

27.4.5 Applications à quelques ensembles particuliers

27.4.5.1 Premiers dans $\mathbb{N}$

Dans $\mathbb{N}$ il n'y a qu'un inversible : 1 donc $\mathcal{U} = \{1\}$. La définition élémentaire pour qu'un entier $p$soit premier est: card($\mathcal{D}_p$) = 2. Montrons que pour $p \in \mathbb{N}$, card($\mathcal{D}_p$) = 2 $\Longleftrightarrow \forall(a, b) \in \mathbb{N}^2$, $p = a\,b \Longrightarrow a$ ou bien b est inversible i.e. a ou bien b est égal à 1 ($\overset{?}{\Longrightarrow}$) On a $c\,a\,r\,d(\mathcal{D}_p) = 2$ d'où $\mathcal{D}_p = \{1, p\}$et donc $p \neq 1$. Si on a $p = a\,b$ alors $a$et $b \in \mathcal{D}_p = \{1, p\}$ ou $a = 1$et alors $b = p \neq 1$ par conséquent $a$ou bien b est bien inversible. ou $b = 1$et alors $a = p$ ensuite même raisonnement. ($\Longleftarrow$?) Si $a \in \mathcal{D}_p$alors il existe b tel que $p = a\,b$ d'où $a$ou bien b est inversible i.e. $a$ou bien b est égal à 1. Soit $a = 1$ et $b = p$ soit $b = 1$ et $a = p$.Les seuls diviseurs de p sont donc:1 et p et comme $p \neq 1$(sinon $p = 1$.1,p serait produit de 2 inversibles)on a bien card($\mathcal{D}_p$) = 2.

27.4.5.2 Premiers dans $\mathbb{Z}$

Il est facile de montrer que $p \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \Longleftrightarrow |p| \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

27.4.5.3 Premier dans $A[X_1, X_2, ..., X_n]$

our simplifier , $A[X_1, X_2....X_n]$ sera noté $A[X_i]$, c'est l'anneau des polynômes à coéfficients dans un acui A en les indéterminées $X_1, X_2, ...X_n$ où $n \geq 1$. Avec la règle des degrés, il est immédiat que les inversibles de $A[X_i]$ sont les inversibles de A. On rappelle que :

Définition 27.36. *Un polynôme de $A[X_i]$ sera dit primitif si et seulement si ses coefficients ne sont divisibles que par les inversibles de A avec la convention que le polynôme nul n'a que le coefficient 0.*

Par conséquent le polynôme nul n'est pas primitif car $o|o$ et o n'est pas inversible. Il est clair qu'un polynôme dont l'un des coéfficients est inversible comme 1 ou -1 est primitif. Il est aussi clair qu'un polynôme non nul à coéfficients dans un corps est primitif car il admet un coéfficient $a_k \neq 0$ et un diviseur d de ce polynôme divisera $a_k$donc $d \neq 0$et par suite $d$est inversible.

Proposition 27.37. *Les premiers de $A[X_i]$ sont :*

- *Soit les polynômes constants, quand la constante est un élément premier de A.*
- *Soit les polynômes non constants, primitifs et ne pouvant s'écrire comme produit de 2 polynômes non constants.*

Autrement dit :

$$P \in \mathcal{P}(A[X_i]) \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \deg(P) = 0 \text{ et } P \in \mathcal{P}(A) \\ \text{ou bien} \\ \deg(P) \geqslant 1, P \text{ est primitif et } P = Q\ R \Rightarrow \deg(Q) \text{ ou bien } \deg(R) = 0 \end{array} \right.$$

Démonstration.

1. $(\overset{?}{\Longrightarrow})$ P étant premier, $P \neq 0$ et donc P admet un degré. Si $\deg(P) = 0$ alors $P \in A$ et si on a $P = Q\,R$ dans A comme $A \subset A[X_i]$, on a aussi $P = Q\,R$ dans $A[X_i]$ or $P \in \mathcal{P}(A[X_i])$ donc Q ou bien R est inversible dans $A[X_i]$ et par suite dans A ce qui assure la primalité de P dans A. Si $\deg(P) \geq 1$ alors P est primitif. En effet, soit $D \in A$ un diviseur de P. On a alors $P = D\,Q$ dans $A[X_i]$ avec $\deg(Q) = \deg(P) \geq 1$ d'où Q n'est pas inversible et par conséquent D est inversible sinon P serait produit de 2 non inversibles ce qui contredirait sa primalité. De plus, si on a $P = Q\,R$ dans $A[X_i]$ et comme $P \in \mathcal{P}(A[X_i])$, Q ou bien R est inversible donc $\deg(Q)$ ou bien $\deg(R) = 0$.
2. $(\overset{?}{\Longleftarrow})$ Si $\deg(P) = 0$ et $P \in \mathcal{P}(A)$, on a $P \neq 0$ soit $P = Q\,R$ dans $A[X_i]$ alors $Q \neq 0$ et $R \neq 0$ d'où Q et R ont un degré et comme $\deg(P) = \deg(Q) + \deg(R)$ on a $\deg(Q) = \deg(R) = 0$ et donc Q et $R \in A$. Or $P \in \mathcal{P}(A)$ d'où Q ou bien R est inversible dans A et donc dans $A[X_i]$ ainsi on a bien $P \in \mathcal{P}(A[X_i]$. Si $\deg(P) \geq 1$, P est primitif et $P = Q\,R \Longrightarrow \deg(Q)$ ou bien $\deg(R) = 0$ soit $P = Q\,R$ dans $A[X_i]$, on a par hypothèse $\deg(Q)$ ou bien $\deg(R) = 0$ par exemple $\deg(Q) = 0$ d'où $\deg(R) \geq 1$ et ainsi R n'est pas inversible. De plus la constante Q divise le polynôme primitif P donc Q est inversible ce qui prouve bien que $P \in \mathcal{P}(A[X_i])$. □

Exemple 27.38. Les polynômes primitifs de degré 1 sont premiers(c'est clair)comme: $P = -3X + 5Y + 2Z$ avec $A = \mathbb{Z}$ Par contre $P = 5X - 10Y + 15Z$ est de degré 1 mais n'est pas premier car il n'est pas primitif vu que $5|P$et 5 n'est pas inversible dans $\mathbb{Z}$.

Traitons maintenant le cas particulier des polynômes à coéfficients dans un corps commutatif K. Un élément de K est soit 0 donc non premier soit inversible donc non premier aussi et par conséquent $\mathcal{P}(K) = \emptyset$. De plus $\forall P \in K[X_i]$ avec $d\,e\,g(P) \geq 1$ Pest primitif d'où l'équivalence précédente devient:

$P \in \mathcal{P}(K[X_i]) \Longleftrightarrow d\,e\,g(P) \geq 1$ et $P = Q\,R \Longrightarrow d\,e\,g(Q)$ou bien $d\,e\,g(R) = 0$

Exemple 27.39. les polynômes de degré 1 à une ou plusieurs indéterminées et à coéfficients dans un corps sont premiers.

Comme application de la classification des éléments d'un demi-groupe abélien multiplicatif et pour terminer, donnons une caractérisation des corps parmi les acui nœthériens :

Proposition 27.40. *Pour qu'un acui nœthérien soit un corps il faut et il suffit qu'il n'ait pas d'élément premier. Autrement dit, pour un acui nœthérien A: A est un corps* $\Longleftrightarrow \mathcal{P}(A) = \emptyset$.

Démonstration. On a déjà remarqué que si A est un corps alors $\mathcal{P}(A) = \emptyset$. Il reste donc à montrer que si A est un acui nœthérien et $\mathcal{P}(A) = \emptyset$ alors A est un corps. A est intègre donc par définition $A \neq \{0\}$ dès lors on peut choisir un élément non nul $a_0 \in A$ et en raisonnant par l'absurde on va montrer que a_0 est inversible. En effet si a_0 n'était pas inversible comme il n'est pas premier ($\mathcal{P}(A) = \emptyset$) il serait composé donc il s'écrirait $a_0 = a_1 b_1$ avec a_1 et b_1 non inversibles d'où $a_0 A \subset a_1 A$. On pourrait alors recommencer avec a_1 à la place de a_0 soit $a_1 = a_2 b_2$ avec a_2 et b_2 non inversibles d'où $a_1 A \subset a_2 A$ etc ... A chaque étape, on obtiendrait un élément a_k non inversible et non premier donc il serait composé et pourrait s'écrire $a_k = a_{k+1} b_{k+1}$ avec a_{k+1} et b_{k+1} non inversibles et bien sûr $a_k A \subset a_{k+1} A$. On construirait ainsi une suite croissante d'idéaux qui serait stationnaire à partir d'un certain rang n vu que A est nœthérien; par conséquent $a_n A = a_{n+1} A$ d'où il existerait $x \in A$ tel que $a_{n+1} = a_n x$ et comme par construction $a_n = a_{n+1} b_{n+1}$ on aurait $a_n = a_n x\, b_{n+1}$ puis $a_n(1 - x\, b_{n+1}) = 0$. De plus comme on aurait $a_0 A \subset a_k A$ pour tout entier k on aurait $a_n \neq 0$ (sinon $a_0 A \subset 0A = \{0\}$ et donc $a_0 = 0$ et la contradiction) or A est intègre d'où $1 - x\, b_{n+1} = 0$ et enfin $1 = x\, b_{n+1}$ d'où b_{n+1} serait inversible et la contradiction. Finalement A est bien un corps. Par conséquent un acui nœthérien autre qu'un corps admet au moins un élément premier. □

On peut alors montrer que tout élément ni nul ni inversible admet une décomposition primaire qui n'est pas unique en général en s'inspirant de la méthode précédente.

La propriété précédente permet aussi de prouver qu'un acui n'est pas nœthérien effet un acui autre qu'un corps qui n'a pas d'élément premier n'est pas nœthérien.

Exemple 27.41. L'anneau $\hat{\mathbb{Z}}$ des entiers algébriques sur $\mathbb{C}$.

Démonstration. D'abord $\hat{\mathbb{Z}}$ est un acui (bien connu) mais ce n'est pas un corps, sinon, comme l'intersection de 2 corps est un corps on aurait $\hat{\mathbb{Z}} \bigcap \mathbb{Q}$ qui serait un corps or $\hat{\mathbb{Z}} \bigcap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$. En effet soit la fraction irréductible $\frac{p}{q} \in \hat{\mathbb{Z}} \bigcap \mathbb{Q}$. Il existe donc un polynôme unitaire $P \in \mathbb{Z}[X]$ de degré $\geqslant 1$ tel que $P(\frac{p}{q}) = 0$. D'où, avec des notations évidentes $a_0 + a_1\frac{p}{q} + a_2(\frac{p}{q})^2 + ... + a_{n-1}(\frac{p}{q})^{n-1} + (\frac{p}{q})^n = 0$. Après multiplication par q^n, on obtient : $a_0q^n + a_1p\,q^{n-1} + a_2p^2q^{n-2} + ...a_{n-1}p^{n-1}q + p^n = 0$. Dès lors q divise p^n et en appliquant le théorème de GAUSS à répétition comme $p \wedge q = 1$, on a $q|p^n \Longrightarrow q|p^{n-1} \Longrightarrow q|p^{n-2}... \Longrightarrow q|p \Longrightarrow \frac{p}{q} \in \mathbb{Z}$ ce qui prouve une inclusion, l'autre étant évidente. $\hat{\mathbb{Z}}$ n'est donc pas un corps. De plus $\mathcal{P}(\hat{\mathbb{Z}}) = \emptyset$ sinon soit $p \in \mathcal{P}(\hat{\mathbb{Z}})$ comme $p \in \hat{\mathbb{Z}}$, il existerait $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire et de degré ≥ 1 tel que $P(p) = 0$ d'où avec les notations précédentes $a_0 + a_1p + a_2p^2 + ...a_{n-1}p^{n-1} + p^n = 0$. Or dans $\mathbb{C}$ tout complexe est un carré d'où $p = q^2$ avec $q \in \mathbb{C}$. On aurait donc $a_0 + a_1q^2 + a_2q^4 + ...a_{n-1}q^{2n-2} + q^{2n} = 0$ par conséquent $q \in \hat{\mathbb{Z}}$ et finalement p serait un carré dans $\hat{\mathbb{Z}}$ donc ne pourrait être premier d'où la contradiction. □

$\hat{\mathbb{Z}}$ est un bon exemple d'acui sans éléments premiers qui n'est ni nœthérien ni bien sûr factoriel. J'espère avoir convaincu le lecteur de l'intérêt d'utiliser la proposition (I) pour définir les éléments premiers et de l'intérêt de la classification des éléments d'un demi-groupe abélien multplicatif qui s'y rapporte car ce sont des facteurs de clarté et de simplification des preuves en arithmétique élémentaire ou plus élaborée. Pour me contacter guyphilippe@les-mathematiques.net

Bibliographie

1 S.MACLANE et G.BIRKHOFF Algèbre 1/structures fondamentales GAUTHIER-VILLARS 1970 p171

2 J-M.ARNAUDIES et J.BERTIN Groupes, algèbres et géométrie T1 ELLIPSES 1993 p 48

3 A.BOUVIER, M.GEORGE ET F.LE LIONNAIS Dictionnaire des mathématiques PUF 1996 p670

4 D.DUVERNEY Théorie des nombres DUNOD 1998 p53

Chapitre 28
Théorie des Groupes

28.1 Structure de groupe

28.1.1 Définition d'un groupe

Définition 28.1. *Soit (E, Δ) un magma.*
On dit que le couple (E, Δ) est une structure de groupe , (ou est un groupe) ssi:

- *la loi Δ est associative dans E*
- *E admet un élément neutre e pour Δ*
- *tout élément a de E admet un symétrique noté a^{-1} pour la loi Δ.*

Remarque 28.2.

1. (E, Δ) est un monoïde dont tout élément admet un symétrique.
2. Si l'on note $\cdot, \times, +$ la loi, l'élément symétrique a^{-1} est appelé inverse ou opposé.

Exemple 28.3.

1. $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe.
2. Les éléments inversibles (i.e. les unités) d'un anneau $(A, +, \times)$ forment un groupe.
3. $(M_n(\mathbb{K}, +))$ est un groupe.

28.1.2 Groupe fini

Définition 28.4. *On appelle **groupe fini** un groupe qui a un nombre fini d'éléments:*

28.1.3 Ordre d'un groupe

Définition 28.5. *Soit G un groupe fini.*
*On appelle **ordre** de G, le cardinal de G, on le note $o(G)$ ou $|G|$.*

28.1.4 Groupe commutatif

Définition 28.6. *Soit (E, Δ) un groupe, (E, Δ) est un groupe **commutatif** (ou abélien) lorsque Δ est commutative.*

28.1.5 Propriétés

Proposition 28.7.

1. *l'élément neutre e et l'inverse (je préfère l'opposé) sont uniques;*
2. *Tout élément de E a un symétrique unique b et $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$. Il n'est pas nécessaire que a, b commutent. Cependant, si a et b commutent alors $(a\Delta b)^{-1} = (b\Delta a)^{-1} = b^{-1}\Delta a^{-1} = a^{-1}\Delta b^{-1}$.*

3. *tout élément de E est simplifiable (ou régulier).*
4. *l'équation $a\Delta x = b$ $(x\Delta a = b)$ admet un solution unique $x = a^{-1}\Delta b$ $(x = b^{-1}\Delta a)$ (égales si Δ est commutative).*

Remarque 28.8. Un groupe est un monoïde donc il possède les mêmes règles de calcul (pour la règle (2) m et $n \in \mathbb{Z}$)

Démonstration.

1.
2. $(a*b)^{-1}*(a*b) = e \rightarrow (a*b)^{-1}*a*b*b^{-1} = e*b^{-1} \rightarrow (a*b)^{-1}*a = b^{-1}$
   $(a*b)^{-1}*a*a^{-1} = b^{-1}*a^{-1} \rightarrow (a*b)^{-1} = b^{-1}*a^{-1}$.
3.
4. □

28.1.6 Table de Cayley d'un groupe fini

Définition 28.9. *Soit (G, Δ) un groupe fini.*
*On appelle **table de Cayley** de (G, Δ), la table de Pythagore de la loi de composition interne sur G.*

Proposition 28.10.

1. *Les tables de Cayley sont des carrés latins. (i.e. tableaux carrés à n^2 cases où sont répartis n nombres ou symboles qui n'apparaissent qu'une seule fois par ligne ou colonne).*
2. *L'inverse est faux.*

28.2 Structure de sous-groupe

28.2.1 Définition d'un sous-groupe

Définition 28.11. *Soit F un sous-ensemble de E, (F, Δ) est un **sous-groupe** de (E, Δ) ssi (F, Δ) est un groupe.*

Remarque 28.12. Dans un but de simplification, on note de manière identique la loi Δ de E et $\Delta_{|F}$ sa restriction à F.

Proposition 28.13. *Soit un sous-ensemble de E, (F, Δ) est un sous-groupe de (E, Δ) ssi l'une des trois conditions suivantes est réalisée :*

1.
   - *F est stable pour la loi Δ*
   - *tout élément de F doit avoir son symétrique pour la loi Δ dans F.*
2. *$e \in F, \forall x, y \in F, x\Delta y^{-1} \in F$.*
3. *$F \neq \varnothing, \forall x, y \in F, x\Delta y^{-1} \in F$. Idem (2) sauf que $e \in F$ est remplacé par $F \neq \varnothing$.*

Notation : On écrit : $F \leqslant G$ pour exprimer que F est un sous-groupe de G.

Remarque 28.14. Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des sous-groupes de G. Dans $\mathcal{H}$, $\leqslant$ est une relation d'ordre partiel.

Proposition 28.15. *Si de plus (E, Δ) est un groupe commutatif alors (F, Δ) est un sous-groupe commutatif de (E, Δ).*

28.2.2 Intersection de sous-groupes

Proposition 28.16. *L'intersection d'une famille de sous-groupe de G est un sous-groupe de G.*

28.2.3 Sous-groupe propre

Définition 28.17. *F est un sous-groupe propre de G ssi $F \neq G$.*

Notation : On écrit $F < G$ pour exprimer que F est un sous-groupe propre de G.

28.2.4 Sous-groupe maximal

Vérifer cette définition, pourquoi imposer que $\mathcal{H}$ soit l'ensemble des sous-groupes ?

Définition 28.18. *Soit G un groupe et $\mathcal{H}$ l'ensemble des sous-groupes propres de G. Soit $\leqslant$ la relation d'ordre partiel « est un sous-groupe propre de G».*

Un ***sous-groupe*** *M de G est dit* ***maximal*** *ssi*

1. *M est maximal dans $\mathcal{H}$*
2. *i.e. $\forall L \in \mathcal{H}; (M \leqslant L) \Rightarrow (L = M)$*

Remarque 28.19.

1. Autrement dit, il n'existe pas d'élément strictement supérieur à M dans $\mathcal{H}$.
2. Rien de nouveau dans cette définition, qui reprend la définition d'un élément maximal d'un ensemble quelconque et qui l'applique à l'ensemble $\mathcal{H}$ des sous-groupes propres de G.
3. Attention : M est un sous-groupe propre de G ? (Pourquoi cet avertissement ? : rien n'empêche d'avoir $M = G$).
4. Un groupe de + d'1 élément n'a pas nécessairement de sous-groupe maximal.
   Cependant ...

Proposition 28.20. *Si G est un groupe fini d'ordre > 1, alors tout sous-groupe propre de G est contenu dans un sous-groupe maximal de G.*

Attention : Dire que le sous-groupe propre de M de G n'est pas maximal $\Rightarrow \exists L \in \mathcal{H}; M < L$.

28.2.5 Sous-groupe de Frattini

Définition 28.21. *Soit G un groupe de plus d'1 élément, $\mathcal{M}$ l'ensemble vide ou non des sous-groupe maximaux de G.*

L'ensemble $\begin{cases} \left(\Phi(G) = \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M\right) \Leftrightarrow \mathcal{M} \neq \varnothing \\ (\Phi(G) = G) \Leftrightarrow \mathcal{M} = \varnothing \end{cases}$ *est appelé* ***sous-groupe de Frattini****.*

En d'autres termes : c'est l'intersection des sous-groupes maximaux de G.

Remarque 28.22. Si $\begin{cases} M \neq \varnothing \\ G \neq \{e\} \end{cases}$, $\varphi(G)$ est un sous-groupe propre de G.

Proposition 28.23. *L'ensemble* $\begin{cases} \left(\Phi(G) = \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M\right) \Leftrightarrow \mathcal{M} \neq \varnothing \\ (\Phi(G) = G) \Leftrightarrow \mathcal{M} = \varnothing \end{cases}$ *est un sous-groupe de G.*

28.2.6 Sous-groupe G engendré par A

28.2.6.1 Cas Général

Note 28.24. Posons pour la suite A Sous-ensemble de G. G Groupe d'élément neutre e.

Proposition 28.25. *Les propositions suivantes sont équivalentes ($A \neq \varnothing$) :*

1. *H l'intersection de tous les sous-groupes de G contenant A.*
2. *H est le plus petit sous-groupe contenant A.*
3. *H est l'ensemble des éléments de G qui peuvent s'écrire :*
$$\begin{cases} a_1^{\varepsilon 1} * a_2^{\varepsilon 2} * ... * a_n^{\varepsilon n} \\ a_i \in A; \varepsilon_i \in \{-1; +1\}; a_i^{+1} = a_i; a_i^{-1} = a_i ??? \end{cases}.$$

Par convention si $A = \varnothing$ alors les 3 propositions sont équivalentes.

Démonstration. CTES envoi 4 th. 2.8. Principe :

1. Montrer que H contient A.
2. Montrer que H est un sous-groupe de G.
3. Montrer que tout sous-groupe de G contenant A contient H. □

Définition 28.26. *L'ensemble H vérifiant l'une des 3 propositions (ou seulement la CNS(2) précédente, dans ce cas les autres CNS sont à mettre en propriété) précédentes est appelé* ***sous-groupe engendré*** *par A. On le note $< A >$.*

28.2.6.2 Parties génératrices, générateurs (cas particulier)

Définition 28.27. *Si et seulement si G est un sous-groupe engendré par A ($< A > = G$), on dit que : A est un partie génératrice de G. Les éléments de A sont des générateurs de G.*

Remarque 28.28.

- si $A = \{x\}$ le sous-groupe de G engendré $\{x\}$ par est noté $< x >$ et $< x > = \{x^n; n \in \mathbb{Z}\}$, c'est nous le verrons plus loin un groupe monogène.
- si $A = \bigcup_{i \in I} H_i$ où H_i est une famille de sous-groupe de G. $< A > = \{x_1 x_2 ... x_n; n \in \mathbb{N}^*; x_\alpha \in H_\alpha, \forall \alpha, 1 \leqslant \alpha \leqslant n\}$.

Remarque 28.29. En résumé pour construire le sous-groupe de G engendré par A, on prend : les éléments de A + leurs inverses (pas nécessairement dans A) + les produits possibles de 2 éléments précédents.

Cas particuliers : (Rappel) Etant données 2 parties non vides d'un groupe $(G, *)$: X, Y, notons $X * Y = \{x * y; (x; y) \in X \times Y\}$ extension de la loi de groupe à $\mathcal{P}(G)$ voir page 184.

Proposition 28.30. *Soit $(G, *)$ un groupe H et K 2 sous-groupes de $(G, *)$ alors ($H * K$ est un sous-groupe de G) ssi $(H * K = K * H)$*

28.2.6.3 Ordre d'un élément dans un groupe

Définition 28.31. *Soit G un groupe quelconque x un élément de G*

1. *Si le sous-groupe de G engendré par x est de cardinal infini, on dit que x est d'***ordre infini** *dans G.*
2. *Si le sous-groupe de G engendré par x est fini, on dit que x est d'***ordre fini** *dans G.*

Le cardinal de $< x >$ est appelé ***ordre*** *de x dans G, on le note $o(x)$.*

28.2.7 Groupes Monogènes

Définition 28.32. *On appellera* ***groupe monogène*** *tout groupe G pouvant être engendré par un singleton $\{x\}$. On le note $\langle \{x\} \rangle$ ou plus simplement $\langle x \rangle$. $G = \langle x \rangle$.*

Remarque 28.33. L'ordre du groupe monogène engendré par x est l'ordre de x. C'est la définition donnée précédement.

Exemple 28.34.

1. $(\mathbb{Z},+)=\langle 1\rangle$ on a aussi $(\mathbb{Z},+)=\langle -1\rangle$
2.
3. $(\mathbb{Z}^n,+)$ n'est pas monogène.

rajouter les propriétés des groupes monogènes page 90.

Proposition 28.35. *L'ordre de $<x>$ est :*

i. s'il existe le plus petit entier positif tel que $x^n=e$,

ii. sinon l'ordre est infini.

Proposition 28.36. *a engendre G d'ordre n, ssi* $\begin{cases} a^n\equiv 1 \\ a^k\not\equiv 1 \\ k<n \end{cases}$ *... ? à compléter*

Proposition 28.37. *Soit $(G;.)=<x>$. C'est à dire un groupe monogène engendré par x alors $(G;\cdot)$ est isomorphisme à $(\mathbb{Z},+)$ ou $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z};+)$, pour n fixé.*

28.2.8 Groupes Cycliques

28.2.8.1 Définition

Définition 28.38. *On appellera **groupe cyclique**, tout groupe fini pouvant être engendré par un singleton $\{x\}$ (i.e. tout groupe monogène fini).*

28.2.8.2 Propriétés

Proposition 28.39. *Soit $(G,\cdot)$ un groupe, l'ordre de x est le plus petit entier positif tel que $x^n=e$.*

Proposition 28.40. *Soit G un groupe et x un élément de G d'ordre n, alors tout entier k tel que $x^k=e$ est un multiple de n, autrement dit n divise k, $n|k$.*

Note 28.41. Les 2 propriétés précédentes sont-elles à leur place. S'appliquent-elle à tous les groupes ou seulement aux groupes cycliques. Dans le premier livre, je proposais de transférer 28.31 avec 28.2.4.3.

Proposition 28.42. *Soit G un groupe cyclique d'ordre n et $G=<a>$, pour tout $k\in\mathbb{Z}$, l'ordre de a^k est $\frac{n}{n\wedge k}$ (i.e. $\frac{n}{\mathrm{pgcd}(n;k)}$). En particulier :*

- *a^k est un générateur de G ssi $n\wedge k=1, \mathrm{pgcd}(n;k)=1$, autrement dit n et k sont premiers entre eux.*
- *il existe $\varphi(n)$ générateurs distincts de G.*

Corollaire 28.43. *Soit G un groupe cyclique d'ordre n et $G=<a>$.*
Soient $x\in G$ et d un diviseur de n alors il existe $y\in G$ tel que $y^d=x$ ssi $x^{\frac{n}{d}}=e$.

Proposition 28.44. *Soit G un groupe cyclique d'ordre n et $G=<a>$.*

i. Tout sous-groupe de G est cyclique

ii. et pour tout diviseur d de n, il existe un unique sous-groupe H_d de G d'ordre d,

iii. en posant $\delta=\frac{n}{d}$ ce groupe est caractérisé par : $H_d=\{x\in G; x^d=e\}=\{x\in G;\exists y\in G, y^\delta=x\}=<a^\delta>$. ??????????????????????????

Exemple 28.45.

1.
2.

28.2.9 Sous-groupes particuliers

28.2.9.1 Centre d'un groupe

Définition 28.46. *On appelle* ***centre*** *d'un groupe G et l'on note $Z(G)$ le sous-ensemble de G défini par : $Z(G) = \{x \in G; \forall a \in G, a * x = x * a\}$. C'est l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de G.*

Exemple 28.47. $Z(G)$ contient au moins l'élément neutre du groupe G : e.

Proposition 28.48.

1. *$Z(G)$ est un sous-groupe abélien de G.*
2. *Si G est abélien alors $Z(G) = G$.*

28.2.9.2 Centralisateur de A dans G

Définition 28.49. *Soit A une partie non vide d'un groupe G.*
On appelle ***centralisateur*** *de A dans G et on note $Z_G(A)$ le sous-ensemble de G défini par :*
$Z_G(A) = \{x \in G; a \in A, a * x = x * a\}$, c'est l'ensemble de éléments de G qui commutent avec tous les éléments de A.

Proposition 28.50. *$Z_G(A)$ est un sous-groupe de G.*

28.2.9.3 Normalisateur de A dans G

Définition 28.51. *Soit A un partie non vide d'un groupe G.*
On appellera ***normalisateur*** *de A dans G et on note $N_G(A)$ le sous-ensemble de G défini par :*
$N_G(A) = \{x \in G; x * A = A * x\}$

Remarque 28.52. Cette notion sera utile pour caractériser les sous-groupes normaux.

Proposition 28.53. *$N_G(A)$ est un sous-groupe de G.*

28.3 Morphisme de groupe

Attention les notions de morphisme, d'endomorphisme, d'isomorphisme, d'épimorphisme et de monomorphisme, ne sont pas propre aux groupes. Elle concerne un domaine plus général que celui qui est développé ici (Voir chapitre sur les catégorie). Intéressons-nous à la catégorie des groupes. Rappelons toutefois les définitions et déterminons quelles sont les propriétés qui caractérisent les morphismes de groupe ?

28.3.1 Définitions générales et propriétés

Définition 28.54. *Soient (G, Δ) et $(G', *)$ 2 groupes.*
On appelle ***morphisme de groupe****, toute application f de G dans G' telle que $f(x \Delta y) = f(x) * f(y)$.*
On dit aussi que f est ***compatible*** *avec le couple $\Delta, *$.*

Remarque 28.55. On définit également :

- Un morphisme de groupe est un morphisme de Magma.
- Un endomorphisme si $G = G'$
- Un isomorphisme si f est bijective
- Un automorphisme si f est bijective et $G = G'$
- Un endomorphisme involutif si $f \circ f = \mathrm{Id}_G$

Définition 28.56. *Soit (G, Δ) et $(G', *)$ deux groupes. On appelle* ***image du morphisme de groupe*** *$f: G \to G'$ l'ensemble des images des points de G par f. On le note* $\mathrm{Im}(f)$.
$\mathrm{Im}(f) = \{f(a); a \in G\}$.

Définition 28.57. *Soit (G, Δ), $(G', *)$ deux groupes et e' l'élément neutre de $(G', *)$. On appelle* ***noyau du morphisme de groupe*** *$f: G \to G'$ l'ensemble des points de G qui ont pour image par f l'élément neutre de G'. On le note* $\mathrm{Ker}(f)$.
$\mathrm{Ker}(f) = \{a \in G; f(a) = e'\}$.

Proposition 28.58. *Soient $(M, \#)$ un magma (G, Δ) et $(G', *)$ 2 groupes homomorphes.*

1. *s'il existe un épimorphisme de magma φ de (G, Δ) sur $(M, \#)$ alors $(M, \#)$ est un groupe.*
2. *si e est un élément neutre de G, alors $f(e)$ est égal à l'élément neutre e' de G'.*
3. *si a et a' sont symétriques dans G, $f(a)$ et $f(a')$ le sont dans G' et $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$.*
4. *L'ensemble* $\mathrm{Ker}(f)$ *est un sous-groupe de G.*
5. *L'ensemble* $\mathrm{Im}(f)$ *est un sous-groupe de G'.*
6. *f est injective [surjective] ssi soit un morphisme de groupe. ?????????*

Exemple 28.59.

1. $\varphi: \left| \begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}; +) & \to & (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}; \bar{+}) \\ a & \mapsto & \bar{a} \end{array} \right. ; \bar{a} = a + n\,\mathbb{Z}$
   $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\mathrm{Ker}(\varphi) = n\mathbb{Z}$.
2.

Remarque 28.60. Soit f un morphisme de groupe alors :

- si H est un sous-groupe de G alors $f(H)$ est un sous-groupe de G'
- si H' est un sous-groupe de G' alors $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G.

28.3.2 Epimorphisme et Monomophisme de groupes

Définition 28.61. *Soit G et G' 2 groupes.*
On dit que f est un ***monomorphisme de groupe*** *ssi :*

- $f \in \mathrm{Hom}(G; G')$
- $\forall$ *le groupe de T, on a :* $(u, \nu \in \mathrm{Hom}(T, G); f \circ u = f \circ \nu) \Rightarrow (u = \nu)$

Définition 28.62. *Soit G et G' deux groupes.*
On dit que f est un ***épimorphisme de groupe*** *ssi :*

- $f \in \mathrm{Hom}(G; G')$
- $\forall$ *le groupe de T, on a :* $(u, \nu \in \mathrm{Hom}(T, G); u \circ f = \nu \circ f) \Rightarrow (u = \nu)$

Proposition 28.63. *On montre la propriété suivante :*
Soit f une application de G dans G'

1. *f est un homomorphisme injectif ssi f est un monomophisme.*
2. *f est un homomorphisme surjectif ssi f est un épimorphisme.*

C'est pour cette raison que dans le cas des groupes, on est autorisé à dire qu'un : monomorphisme est un homomorphisme injectif. épimorphisme est un homomorphisme surjectif.

Quel est le rôle de u et v ? S'agit-il de fonctions quelconques ou construites pour. ?

Proposition 28.64. *Soit $(G, \cdot)$ un groupe monogène tel que $G = < x >$ (i.e. engendré par x) alors G est soit isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$ soit isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ pour n fixé.*

28.3.3 Groupe des automorphismes, automorphisme intérieur

Rajouter le passage sur les automorphismes page 20 et 21 du cours de licence.

Proposition 28.65. *L'ensemble des automorphismes de G, muni de la loi de composition des applications est un groupe. On le note* $\mathrm{Aut}(G)$.

Définition 28.66. *On note* $\mathrm{Aut}(G)$ *le groupe des automorphismes de G.*

Proposition 28.67. *L'application* i_g: $\left|\begin{array}{ccc} G & \to & G \\ x & \mapsto & g\,x\,g^{-1} \end{array}\right.$ *est un automorphisme.*

Définition 28.68.

- *L'application* i_g: $\left|\begin{array}{ccc} G & \to & G \\ x & \mapsto & g\,x\,g^{-1} \end{array}\right.$ *est appelée* ***automorphisme intérieur*** *de G.*
- *L'ensemble des automorphismes intérieurs est noté* $\mathrm{int}(G)$.

Proposition 28.69. *L'application* Φ: $\left|\begin{array}{ccc} (G;*) & \to & (\mathrm{Aut}(G);\circ) \\ x & \mapsto & i_x \end{array}\right.$ *est un morphisme de groupe,*

- $\mathrm{Im}(\Phi) = \mathrm{int}(G)$,
- $\ker(\Phi) = Z(G)$.

28.3.4 Eléments et ensembles conjugés

Définition 28.70. *Soit $(G,\cdot\,)$ un groupe. Deux éléments x, y de G sont* ***conjugés*** *dans G ssi $\exists g \in G; g\cdot x\cdot g^{-1} = y$. autrement dit $g\cdot x = y\cdot g$.*

Remarque 28.71. x et y sont conjugés si et seulement s'il existe un automorphisme intérieur i_g tel que $i_g(x) = g$.

Définition 28.72. *Soit $(G,\cdot\,)$ un groupe, deux H, K* ***parties*** *de G sont dit* ***conjugés*** *dans $\mathcal{P}(G)$ si et seulement si $\exists x \in G; K = x\cdot H\cdot x^{-1}$.*

Définition 28.73. *L'ensemble des éléments conjugés à $x \in G$ s'appelle (la classe de)* ***conjugaison*** *notée $\mathcal{C}_x$: $\mathcal{C}_x = \{g\cdot x\cdot g^{-1}; g\in G\}$.*

Proposition 28.74. *La relation de conjugaison dans un groupe G est une relation d'équivalence de G (ce qui justifie l'appellation « classe de conjugaison » vu ci-dessus.*

28.4 Sous-groupe normaux (ou distingués)

Note 28.75. Mettre l'introduction (Elément de théorie des groupes page 136) Josette Calais.

Définition 28.76. *On appelle* ***sous-groupe normal*** *(ou* ***distingué****) de G tout sous-groupe H de G tel que $x\,h\,x^{-1} \in H\,, \forall (h;x) \in H\times G$ i.e. $x\,H\,x^{-1} \subset H$. On écrit $H \lhd G$ pour dire que H est un sous-groupe distingué de G.*

Note 28.77.

1. Rajouter théorie des groupes page 137, voir aussi page 28 ?
2. Les ensembles (pour $a \in G$) $H_a = \{x\,a\,x^{-1}; x\in G\}$ (c'est à dire les classes de conjugaison suivant x, voir livre I volume 2 page 192 bis) sont-ils des sous-groupes distingués ? $H_a \subset G$ or $a^{-1} = x\,a\,x^{-1}; a^{-1}\,x = x\,a; y\in H_a \Rightarrow \exists x\in G; y = x\cdot a\cdot x^{-1}$. Non je ne crois pas, cela pose un problème de construction $a \in H_a$ mais a^{-1} ?

Proposition 28.78. *Tout sous-groupe H de G est distingué si et seulement s'il satisfait l'une des conditions équivalentes suivantes :*

1. $Hx = xH, \forall x \in G$
2. $xHx^{-1} = H, \forall (x \in G$
3. $x^{-1}Hx = H, \forall x \in G$
4. $x^{-1}hx \in H, \forall (h,x) \in H \times G$ *i.e.* $x^{-1}Hx \subset H$

Proposition 28.79. *Dans un groupe G, on a $H \lhd G$ ssi il existe un groupe G' et un homomorphisme $f: G \to G'$ tel que $H = \ker(f)$.*

Note 28.80. Voir application cours de géométrie car c'est un cas particulier + à insérer entre 7 et 8 de (7) ?

Remarque 28.81.

1. Dans tout groupe G, $\{e\}$ et G sont des sous-groupes normaux.
2. Dans un groupe abélien, tout sous-groupe est normal.

Proposition 28.82.

1. *Si H et K sont 2 sous-groupes d'un groupe G tels que $H \subseteq K$ alors $H \lhd K \Rightarrow H \lhd K$.*
2. *Pour un groupe G de centre $Z(G)$ on a : $G/Z(G)$ monogène $\Rightarrow$ G abélien.*
3. *Soit G un groupe et une famille de sous-groupe de G alors*
4. *$Z(G) \lhd G$.*
5. *soit H et K deux sous-groupes d'un groupe G alors*
   - $H \lhd G \Rightarrow (H \cap K) \lhd K$
   - $H \lhd G \Rightarrow H.K \leqslant G$ *et* $K \lhd H.K$
6. *Soit A une partie non vide d'un groupe $C_G(A) \lhd N_G(A)$.*
7. *soit H un sous-groupe de G alors $H \lhd G \Rightarrow N_G(H) = G$.*
8. *Soient G, G' deux groupes et $f: G \to G'$ un homomorphisme alors*
   i. $H \lhd G \Rightarrow f(H) \lhd f(G)$
   ii. $H' \lhd G' \Rightarrow f^{-1}(H') \lhd G$
9. *Soit G un groupe.*
   i. *Si H est un sous-groupe de G alors $([G:H] = 2) \Rightarrow (H \lhd G)$.*
   ii. *Pour tout sous-groupe H de G, on a $1 \in N_H$ et $H \lhd N_G(H)$.*
   iii. *Si H et K sont deux sous-groupes de G tel que $H \leqslant K$, alors $(H \lhd K) \Rightarrow (K \leqslant N_G(H))$.*
   iv. $K \leqslant N_G(H) \Rightarrow \left\{ \begin{smallmatrix} H.K \leqslant G \\ H \lhd H.K \end{smallmatrix} \right.$.
10. *Dans une groupe fini, tout sous-groupe normal propre de G est contenu dans un sous-groupe normal maximal de G.*

Proposition 28.83. *(Caractérisation du produit direct) Soient G un groupe, H, K deux sous-groupes si : $H \lhd G, K \lhd G, HK = G, H \cap K = \{1\}$ alors :*
$\varphi: (h,k) \mapsto hk$ *est un isomorphisme de groupe $HK \to G$.*

Proposition 28.84. *(Théorème de Nother) Soit G un groupe, H, K deux sous-groupes de G tels que $K \subset N_H$, alors :*

i. *On a* $\mathrm{HK} = \mathrm{KH}$ *et c'est le sous-groupe engendré par H et K.*

ii. $H \cap K \lhd K$ *et* $H \lhd \mathrm{HK}$.

iii. Les groupes HK/H *et* K/HK *sont canoniquement isomorphes.*

Proposition 28.85. *Soient* H *et* K *deux sous-groupes finis de* G *alors* $|\mathrm{HK}| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$.

28.5 Groupes simples

Définition 28.86. *Un* ***groupe*** G *est dit* ***simple*** *si et seulement si :*

i. $G \neq \{e\}$

ii. il n'y a pas d'autre sous-groupe normal que G *et* $\{e\}$.

Proposition 28.87. *Les seules groupes simples abéliens sont les groupes cycliques d'ordre premier.*

Proposition 28.88. *Soit* $G \neq \{e\}$ *un groupe alors* G *n'a pas d'autre sous-groupe que* G *et* $\{e\}$ *si et seulement si* G *est cyclique d'ordre premier.*

Proposition 28.89. *Si* G *est un groupe fini d'ordre* $n > 1$ *contenant un sous-groupe propre* H *tel que :* $[G:H] = k > 1$ *et* n *ne divise pas* $k!$ *alors* G *n'est pas simple.*

28.6 Groupe quotient

Soit $(G, .)$ un groupe d'élément neutre e, nous sommes amenés à nous poser les questions suivantes :

1. Quelles sont les relations d'équivalence R compatible avec la *l.c.i.* de G qui permettent de définir une loi quotient sur l'ensemble $(G/\mathcal{R})$?
2. Cette loi confère-t-elle à $(G/\mathcal{R})$ une structure de groupe ?

Nous allons montrer que ces relations sont des bijections, avec une classe de sous-groupes particuliers, les sous-groupes distingués.

28.6.1 Relation d'équivalence modulo un sous-groupe

Soit H un sous-groupe de G. On peut définir sur G deux relations $\mathcal{R}_H$ et ${}_H\mathcal{R}$ telles que :

$$\forall (x,y) \in G^2 \begin{cases} x \mathcal{R}_H y \Leftrightarrow x y^{-1} \in H \\ x {}_H\mathcal{R} y \Leftrightarrow x^{-1} y \in H \end{cases}$$

28.6.1.1 Propriété

Proposition 28.90. $\mathcal{R}_H$ *et* ${}_H\mathcal{R}$ *sont des relations d'équivalence.*

28.6.1.2 Définitions

Définition 28.91. *Soit* H *un sous-groupe de* G, $\mathcal{R}_H$ *et* ${}_H\mathcal{R}$ *2 relations telles que :*

$$\forall (x,y) \in G^2 \begin{cases} x \mathcal{R}_H y \Leftrightarrow x y^{-1} \in H \\ x {}_H\mathcal{R} y \Leftrightarrow x^{-1} y \in H \end{cases}$$

- $\mathcal{R}_H$ *est appelé* ***relation d'équivalence ou congruence à droite*** *modulo* H.
- ${}_H\mathcal{R}$ *est appelé* ***relation d'équivalence ou congruence à gauche*** *modulo* H.

Remarque 28.92.

1. Rappel : On note $H \cdot \{x\}$ ou $H \cdot x$ ou encore $H\,x$ l'ensemble $\{h\,x; h \in H\}$, c'est l'extension de la loi du groupe à G à $\mathcal{P}(G)$. De même pour $\{x\} \cdot H$,$x \cdot H$ et $x\,H$.

2. Puisque $\mathcal{R}_H$ et ${}_H\mathcal{R}$ sont appelées congruences modulo H, par analogie avec la congruence modulo n dans $\mathbb{Z}$, on écrit :
   - $y \equiv x(\mathcal{R}_H) \Leftrightarrow y \in H\,x$ où $H\,x = \{h\,x; h \in H\}$
   - $y \equiv x({}_H\mathcal{R}) \Leftrightarrow y \in x\,H$ où $x\,H = \{x\,h; h \in H\}$
3. Les ensembles quotients $(G/\mathcal{R}_H)$ et $(G/\ {}_H\mathcal{R})$ sont notés $(G/H)_d$ et $(G/H)_g$ autrement dit : $(G/H)_d = \{H_x; x \in G\}$ et $(G/H) = \{{}_xH; x \in G\}_g$ ce sont les ensembles des classes à droite et à gauche.
4. Si G est abélien alors $\mathcal{R}_H = {}_H\mathcal{R}$, $(G/H)_d = (G/H)_g$ on le note alors (G/H).
5. En notation additive $x \equiv y(\mathcal{R}_H)$ s'écrit $x - y \in H$
6. Notation $\bar{x}^{\,\mathcal{R}_H}$ et $\bar{x}^{\,{}_H\mathcal{R}}$ sont les classes à droites et à gauche de x modulo H
7. En notation additive $\bar{x}^{\,\mathcal{R}_H} = H + x$
8. Les $H\,x$ sont des classes d'équivalence donc
   si $H\,x \neq H\,y$ alors $H\,x \cap H\,y = \varnothing$ (elles sont distinctes)
   $\{H\,x; x \in G\}$ est une partition de G.
   Ces remarques sont aussi valables pour les $x\,H$ (Classe à gauche de x modulo H).
9. Si $H = G$ alors $\forall x \in G, G\,x = x\,G$ or $(G\,x = X$ et $x\,G = G)$ d'où $G\,x = x\,G$ et $\mathcal{R}_G = {}_G\mathcal{R}$
10. Si $H = \{e\} \Rightarrow \forall x \in G, \bar{x} = \{x\}$ donc $\bar{x}$ est à la fois classe à droite et à gauche $(\mathcal{R}_H = {}_H\mathcal{R})$. On en déduit également que $\mathcal{R}_H$ est l'égalité dans G.
11. $\forall h' \in H, \left\{ \begin{smallmatrix} h'H = H \\ H\,h' = H \end{smallmatrix} \right.$ (puisque . est une *l.c.i.*), donc H est à la fois classe à gauche/droite de h' modulo H et on écrira $x \equiv y \bmod (H)$.

Exemple 28.93. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

28.6.2 Théorème de Lagrange

Lemme 28.94. *Soit G un groupe et H un sous-groupe de G, alors toute classe à droite Hx (respectivement à gauche xH) est équipotente à H.*

Remarque 28.95. Autrement dit, il y autant d'éléments dans $x \cdot H$ que dans H. C'est à dire $\mathrm{card}(x \cdot H) = \mathrm{card}(H)$ ou $\#(x \cdot H) = \#(H)$. Attention, ces propriétés n'imposent pas à H ou à G d'être finis.

Corollaire 28.96. *Dans un groupe deux classes à droite ou à gauche modulo un sous-groupe H sont équipotentes.*

Ces deux propriétés permettent d'établir le théorème de Lagrange :

28.6.2.1 Enoncé

Théorème 28.97. *(Théorème de Lagrange) Si G est un groupe fini, alors l'ordre de tout sous-groupe H de G divise l'ordre de G.*

Corollaire 28.98.

1. *Si G est un groupe fini, $\forall x \in G$, l'ordre de x divise l'ordre de G.*
2. *Si G est un groupe fini, pour tout sous-groupe H de G, le nombre de classe à droite modulo H est égal au nombre de classe à gauche modulo H.*

28.6.2.2 Equipotence de $(G/H)_d$ et $(G/H)_g$

Théorème 28.99. *Pour tout sous-groupe H de G, les ensembles $(G/H)_d$ et $(G/H)_g$ sont équipotents.*

Remarque 28.100. en langage ensembliste on a : $\text{card}((G/H)_d) = \text{card}((G/H)_g)$.

28.6.2.3 Indice d'un sous-groupe

Définition 28.101. *Soit H un sous-groupe de G.*
On appelle ***indice*** *de H dans G le cardinal de $(G/H)_d$ ou $(G/H)_g$. On le note $[G:H]$.*

$$[G:H] = \text{card}((G/H)_d) = \text{card}((G/H)_g).$$

c'est à dire, le nombre de classe à gauche ou à droite modulo H.

Remarque 28.102. On ne peut pas utiliser la notation $\text{o}((\text{G/H})_\text{d})$ car G/H n'est pas automatiquement un groupe !

Proposition 28.103. *Si G est un groupe fini, alors pour tout sous-groupe H de G on a :*
$o(G) = o(H) \times [G:H]$ *ou* $[G:H] = \frac{o(G)}{o(H)}$

28.6.2.4 Formule des indices

Théorème 28.104. *Si H est un sous-groupe d'indice fini dans un groupe G et si K est un sous-groupe de G contenant H alors,*

1. *K est d'indice fini*
2. $[G:H] = [G:K] \times [K:H]$

28.6.3 Compatibilité de $\mathcal{R}_H$ et de ${}_H\mathcal{R}$ avec la loi de composition interne de G et premier théorème d'isomorphisme

Note 28.105. (Voir loi quotient Formulaire). Rappel : On dit que la relation $\mathcal{R}$ est compatible à gauche avec la l.c.i. $\cdot$ si et seulement si : $\forall a, a' \in G; \forall x \in G; a\mathcal{R}a' \Rightarrow (x \cdot a)\mathcal{R}(x \cdot a')$. Pourquoi étudier la compatibilité ? C'est la compatibilité avec la loi qui assure l'existence de la loi quotient. On va plus loin (CTES envoi 4 2.18). Les seules relations d'équivalence compatible avec la loi d'un groupe G sont les relations modulo un sous-groupe H de G distingué dans G.

28.6.3.1 Cas général

Théorème 28.106.

- *Pour tout sous-groupe H de G, la relation d'équivalence ${}_H\mathcal{R}$ est compatible à droite (respectivement à gauche) avec la l.c.i. de G : $a_H\mathcal{R}a' \Rightarrow (a \cdot b)_H\mathcal{R}(a' \cdot b)$ (resp. $a_H\mathcal{R}a' \Rightarrow (b \cdot a)_H\mathcal{R}(b \cdot a')$). Même chose avec $\mathcal{R}_H$.*
- *Réciproquement : Soit $\mathcal{R}$ un relation d'équivalence définie sur un groupe G, compatible à droite (resp. à gauche) avec la l.c.i. de G alors il existe un unique sous-groupe H de G tel que $\mathcal{R} = \mathcal{R}_H$ (resp. ${}_H\mathcal{R}$).*

Remarque 28.107.

1. Si la loi est compatible avec la l.c.i. (c'est à dire compatible simultanément à droite et à gauche), on en déduit immédiatement que $\mathcal{R} = \mathcal{R}_H = {}_H\mathcal{R}$.
2. Il serait donc intéressant d'étudier tous les groupes pour lesquels ${}_H\mathcal{R} = \mathcal{R}_H$, c'est le chapitre sur les groupes distingués.

28.6.3.2 Cas où le groupe G est abélien

Corollaire 28.108. *Soit G un groupe abélien et H un sous-goupe de G, alors :*

1. *$\mathcal{R}_H = {}_H\mathcal{R}$. Notons $\mathcal{R}$ cette relation.*
2. *$\mathcal{R}$ est compatible avec la l.c.i. de G.*
3. *(G/H) muni de la loi quotient $\overline{l.c.i.}$ a une structure de groupe abélien.*

4. $p:\left|\begin{array}{ccc} G & \to & (G/H) \\ x & \mapsto & \bar{x} \end{array}\right.$ *est un homomorphisme surjectif de groupe.*

28.6.3.3 Cas où $H = \ker(f)$ où f est un morphisme de groupe

Proposition 28.109. *Pour tout morphisme f d'un groupe G dans un groupe G',*

- *L'ensemble quotient $\frac{G}{\ker(f)}$ est un groupe par rapport à la loi de composition quotient définie par : $\bar{x}\bar{y} = \overline{x\,y}, \forall \bar{x}, \bar{y} \in \frac{G}{\ker(f)}$,*
- *La surjection canonique $\pi:\left|\begin{array}{ccc} G & \to & \frac{G}{\ker(f)} \\ x & \mapsto & \bar{x} \end{array}\right.$ est un épimorphisme de groupes.*

Théorème 28.110. *(1^{er} théorème d'isomorphisme) Pour tout morphisme f d'un groupe G dans un groupe G', on a : $\frac{G}{\ker(f)} \simeq \mathrm{Im}(f)$ $\psi:\left|\begin{array}{ccc} G/\ker(f) & \to & \mathrm{Im}(f) \\ \bar{x} & \mapsto & f(x) \end{array}\right.$. $G/\ker(f)$ est isomorphe à $\mathrm{Im}(f)$.*

Démonstration. Elément de théorie des groupes (josette calais, puf-p.84) □

28.6.3.4 Cas où H est sous-groupe normal (i.e. distingué)

Théorème 28.111.

1. *Soit H un sous-groupe normal d'un groupe $(G, *)$, G/H l'ensemble quotient et la loi de composition quotient $\bar{*}$ définie par $\bar{x} \bar{*} \bar{y} = \overline{x * y}$, $\forall \bar{x}$, $\bar{y} \in G/H$ alors $(G/H, \bar{*})$ est un groupe.*
2. *Sous les mêmes conditions l'application $\pi: G \to G/H$ est un épimorphisme de groupe.*

Remarque 28.112. Avec l'habitude, on peut aussi noter $*$ la loi $\bar{*}$. En gardant toujours en mémoire qu'il s'agit bien de deux lois différentes, car elles ne s'appliquent pas aux mêmes objets.

Proposition 28.113. *La l.c.i. de G est compatible avec les relations ${}_H\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_H \Leftrightarrow H \lhd G$.*

Remarque 28.114. si $H \lhd G$ alors on notera $x \equiv y \pmod H$ x équivalent à y modulo H au lieu de $x\mathcal{R}_H y$ ou $x\,{}_H\mathcal{R} y$.

28.6.4 Définition

Note 28.115. Donnons un nom au groupe défini précédement et étudions ses propriétés.

Définition 28.116. *Soit $(G, *)$ un groupe, $H \lhd G$ et $\bar{*}$ la loi de composition interne définie par $\bar{x} \bar{*} \bar{y} = \overline{x * y}$, où $\bar{x} = \{y;\, x\mathcal{R}_H y\}$. On appelle* ***groupe quotient*** *de G par le sous-groupe normal H, le groupe $(G/H, \bar{*})$.*

Remarque 28.117. Avec l'habitude, on peut aussi noter $*$ la loi $\bar{*}$. En gardant toujours en mémoire qu'il s'agit bien de deux lois différentes, car elles ne s'appliquent pas aux mêmes objets.

28.6.5 Propriété universelle du groupe quotient

Proposition 28.118. *(Universelle du groupe quotient) Soit G un groupe, H un sous-groupe normal de G, $\pi: G \to G/H$ l'épimorphisme canonique. Alors $\forall$le groupe G' et l'homomorphisme $f: G \to G'$ tel que $H \subset \ker(f)$, il existe un unique homomorphisme $\varphi: G/H \to G'$ tel que : $\varphi \circ \pi = f$ de plus :*

i. f surjectif $\Rightarrow \varphi$ surjectif.

ii. $H = \ker(f) \Rightarrow \varphi$ *injectif.*

28.6.6 Sous groupe d'un groupe quotient

Proposition 28.119. *Soit G un groupe, $H \lhd G$ et $\pi: G \to G/H$ l'épimorphisme canonique.*

i. Tout sous-groupe $\bar{K}$ de G/H est l'image par π d'un unique sous-groupe de G contenant H. Plus précisément on a : $\bar{K} = \pi(K) = K/H$ où $K = \pi^{-1}(\bar{K})$.

ii. si K_1 est un sous-groupe de G tel que $H \not\subset K_1$ alors $H \cdot K_1$ est un sous-groupe de G contenant H et : $\pi(K_1) = H \cdot K_1/H$.

Proposition 28.120. *Soit G un groupe et $H \lhd G$.*

i. Si K et K' sont 2 sous-groupes de G contenant H alors $(H \leqslant K \leqslant K') \Rightarrow (K/H \leqslant K'/H)$.

ii. $(H \leqslant K, K \lhd G) \Leftrightarrow (K/H \lhd G/H)$.

28.6.7 Théorème d'isomorphisme

Théorème 28.121. *(Théorème de factorisation des morphismes) Soit G et G' deux groupes. Pour tout homomorphisme $f: G \to G'$ on a : $G/\ker(f) \approx \mathrm{Im}(f)$ (est isomorphe à). On peut trouver un isomorphisme est tel que $\bar{f}: G/\ker(f) \to \mathrm{Im}(f) = f(G)$, $f = i \circ \bar{f} \circ s$ où $s: G \to G/\ker(f)$ est la surjection canonique et $i: f(G) \to G'$ est l'injection canonique.*

Lemme 28.122. *Soit G et G' 2 groupes, $H \lhd G$, $H' \lhd G'$ et $f: G \to G'$ un morphisme tel que $f(H) \subset H'$. Il existe un unique morphisme $\bar{f}: G/H \to G'/H'$ tel que : $\bar{f} \circ \pi = \pi' \circ f$ (où π, π' sont les épimorphismes canoniques). De plus*

i. $\pi' \circ f$ surjectif $\Rightarrow \bar{f}$ surjectif.

ii. $(f^{-1}(H') = H) \Rightarrow \bar{f}$ injectif.

Théorème 28.123. *Soit G un groupe, H et K 2 sous-groupes de G avec $H \subset K, H \lhd G, K \lhd G$ alors $G/K \approx \frac{G/H}{K/H}$.*

Théorème 28.124. *Soit G un groupe, $H \lhd G$ alors pour tout sous-groupe K de G, les groupes quotients $K/(H \cap K)$ et $H \cdot K/H$ existent et sont isomorphes : $K/(H \cap K) \approx H \cdot K/H$.*

28.7 Exemples et études de groupes finis

28.7.1 Groupes symétriques et le groupe symétrique $(S_n, \circ)$

Rappel : on appelle permutation de E toute bijection de E dans E.

Soit E un ensemble vide (fini ou non). Notons S_E l'ensemble de permutations de E.

Notation : $\mathbb{N}_n = \{1; 2; ...; n\}$.

Proposition 28.125. *$(S_E, \circ)$ est un groupe ($\circ$ est la loi de composition des applications).*

Définition 28.126. *Le groupe $(S_E, \circ)$ est appelé **groupe symétrique** de E ou **groupe des permutations** de E.*

Cas particulier : le groupe symétrique de $\mathbb{N}_n$ est appelé **groupe symétrique** de degré n, on le note $S_{\mathbb{N}_n}$ ou plus simplement S_n.

Proposition 28.127. *Soient 2 ensembles E et E' s'il existe une bijection $\varphi: E \to E'$ (i.e. E équipotent à E') alors S_E et $S_{E'}$ sont isomorphes.*

Théorème 28.128. *(Théorème de Cayley) Tout groupe G est isomorphe à un sous-groupe de son groupe symétrique S_G.*

Note 28.129. Il serait utile de donner un exemple d'isomorphisme !

Conséquence : tout sous-groupe fini d'ordre n est isomorphe à un sous-groupe symétrique S_n.

Cas particulier : Si E est fini, si $\text{card}(E)=n$ est si $E=\{x_1,x_2,...,x_n\}$

Soit φ: $\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{N}_n & \to & E\\ i & \mapsto & x_i\end{array}\right.$ alors Ψ: $\left|\begin{array}{ccc}S_n & \to & S_E\\ \sigma & \mapsto & x_{\sigma\circ\varphi^{-1}}\end{array}\right.$ $\forall x_i\in E, \Psi(\sigma)(x_i)=x_{\sigma(i)}$.

Tout ensemble des permutations (d'un ensemble de cardinal n) est isomorphe à l'ensemble des permutations de $\mathbb{N}_n$. On peut donc identifier S_E à S_n en notant σ l'élément $\Psi(\sigma)$ de E.

Conséquence : pour $n\geqslant 1$, nous considèrerons, le groupe S_n comme étant le groupe symétrique de tout ensemble de cardinal n. Etudier S_E revient à étudier S_n. Dans la suite du cours toute permutation sera par conséquent une permutation du groupe S_n.

28.7.2 Etude de S_n

Rappel : S_n est un groupe fini d'ordre n.

Notation : Soit $\sigma\in S_n$, σ: $\left|\begin{array}{ccc}[1;n] & \to & [1;n]\\ i & \mapsto & \sigma(i)\end{array}\right.$ on écrira alors que :

$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & ... & n\\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & ... & \sigma(n)\end{pmatrix}$ ou $\sigma=(\sigma(1);\sigma(2);\sigma(3);...;\sigma(n))$

Remarque 28.130. pour $n>2$, S_n n'est pas un groupe commutatif.

Contre exemple : Soient $\sigma,\tau\in S_n$ définies par :

$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & ... & n\\ 2 & 1 & 3 & ... & 4\end{pmatrix}$ et $\tau=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & ... & n\\ 3 & 1 & 2 & ... & 4\end{pmatrix}$

alors $\sigma\circ\tau=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & ... & n\\ 3 & 2 & 1 & ... & 4\end{pmatrix}$ mais $\tau\circ\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & ... & n\\ 1 & 3 & 2 & ... & 4\end{pmatrix}$

conclusion : $\sigma\circ\tau\neq\tau\circ\sigma$

Notation : Soient $\sigma\in S_n$ et $k\in\mathbb{N}$ alors on notera :

- $\sigma^k=\sigma\circ\sigma\circ...\circ\sigma$
- $\sigma^{-k}=\sigma^{-1}\circ\sigma^{-1}\circ...\circ\sigma^{-1}$
- $\sigma^0=\text{Id}_{S_n}$

Proposition 28.131. *On en déduit que $\forall\sigma\in S_n$, on a $\sigma^{n!}=\text{Id}_n$.*

Note 28.132. Pourquoi « on en déduit » ? cela est-il évident ? Je ne trouve pas de propriété des groupes permettant de répondre aussi rapidement !

28.7.2.1 Support d'une permutation

Définition 28.133. *Soit $\sigma\in S_n$, on appelle* ***support*** *de σ est l'ensemble noté* $\text{supp}(\sigma)$ *des éléments qui ne sont pas l'image d'eux même par σ.* $\text{supp}(\sigma)=\{i\in\mathbb{N}_n;\sigma(i)\neq i\}$.

Exemple : Définissons σ par $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 1 & 5 & 2 & 4 & 8 & 3 & 7 & 6\end{pmatrix}$ on a :

$\begin{cases}\sigma(2)=5\\ \sigma(3)=2\\ \sigma(5)=8\\ \sigma(6)=3\\ \sigma(8)=6\end{cases}$ et $\begin{cases}\sigma(1)=1\\ \sigma(4)=4\\ \sigma(7)=7\end{cases}$ donc $\text{supp}(\sigma)=\{2;3;5;6;8\}$.

Remarque 28.134.

- Dans S_n, $\sigma=\text{Id}$ ssi $\text{supp}(\sigma)=\varnothing$.
- Si $\sigma\neq\text{Id}$ dans S_n alors la restriction de σ à $\text{supp}(\sigma)$ est une permutation sur $\text{supp}(\sigma)$.
- $\text{supp}(\sigma^k)\subset\text{supp}(\sigma)$.

- $i \in \text{supp}(\sigma) \Leftrightarrow \sigma(i) \in \text{supp}(\sigma)$.
- $\langle\sigma\rangle$ opère sur $\text{supp}(\sigma)$.

Proposition 28.135. *Dans tout groupe S_n deux permutations σ_1 et σ_2 de supports disjoints commutent. On a alors $\sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_2 \circ \sigma_1$.*

Exemple 28.136.

1. Soit la permutation σ de S_n définie par $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 9 & 4 & 7 & 5 & 6 & 1 & 8 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
   Par définition $\text{supp}(\sigma) = \{1;2;3;4;7;9;10\}$.
   puisque $\sigma(1) \neq 1; \sigma(2) \neq 2; \sigma(3) \neq 3; \sigma(4) \neq 4; \sigma(7) \neq 7; \sigma(9) \neq 9; \sigma(10) \neq 10$.
   On vérifie également que σ est une bijection de $\text{supp}(\sigma) \to \text{supp}(\sigma)$, i.e. une permutation de $\text{supp}(\sigma)$.
2. Soit σ_1 et σ_2 deux permutations de $\mathbb{N}_n$ telles que :
   $\sigma_1 = (9;2;1;4;5;6;7;8;3;10)$ et $\sigma_2 = (1;10;3;4;8;6;7;2;9;5)$.
   $\text{supp}(\sigma_1) = \{1;3;9\}$
   $\text{supp}(\sigma_2) = \{2;8;10;5\}$
   $\text{supp}(\sigma_1)$ et $\text{supp}(\sigma_2)$ sont bien disjoints.
   Calculons $\sigma_1 \circ \sigma_2$ et $\sigma_2 \circ \sigma_1$
   $\sigma_1 \circ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 10 & 1 & 4 & 8 & 6 & 7 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$
   $\sigma_2 \circ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 10 & 1 & 4 & 8 & 6 & 7 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Conclusion : on vérifie bien que σ_1 et σ_2 commutent si leurs supports sont disjoints

28.7.2.2 σ-orbite (ou orbite d'un élément de E suivant σ)

Proposition 28.137. *Soit σ une permutation et R_σ la relation définie par $(x R_\sigma y) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}; \sigma^k(x) = y)$. R_σ est une relation d'équivalence.*

Définition 28.138. *On appelle **orbite** d'un élément a de E suivant σ la permutation (ou σ-orbite de a) la classe d'équivalence de a modulo R_σ. On la note $\Omega_\sigma(a)$. On a ainsi $\Omega_\sigma(a) = \bar{a}$.*

Proposition 28.139. *Les éléments de l'ensemble quotient $E \backslash R_\sigma$ (ensemble des σ-orbites de E) réalisent une partition de E.*

Exemple 28.140.
Si $E = \mathbb{N}_{10}$ définissons σ par $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 10 & 6 & 4 & 2 & 1 & 7 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.
On a $\sigma(1) = 3$; $\sigma(3) = 6$; $\sigma(6) = 1$ d'où $\overline{1} = \{1;3;6\}$.
De même on a $\overline{2} = \{2;5;8;9;10\}$.
puisque $3 \in \overline{1}$ on a $\overline{3} = \overline{1}$.
par contre $\sigma(4) = 4$ d'où $\overline{4} = \{4\}$.
comme précédement puisque $5 \in \overline{2}$ on a $\overline{5} = \overline{2}$ de même $\overline{6} = \overline{1}$; $\overline{7} = \overline{7}$; $\overline{8} = \overline{9} = \overline{2}$
On dénombre 4 σ-orbites $\overline{1} = \{1;3;6\}$; $\overline{2} = \{2;5;8;9;10\}$; $\overline{4} = \{4\}$; $\overline{7} = \{7\}$.
On vérifie que l'on a bien $\begin{cases} \overline{1} \cup \overline{2} \cup \overline{4} \cup \overline{7} = E \\ \forall (i;j) \in E^2, i \neq j \Rightarrow \bar{i} \cap \bar{j} = \varnothing \\ \forall i \in E; i \neq \varnothing \end{cases}$ en d'autres termes $\overline{1}; \overline{2}; \overline{4}; \overline{7}$ est une partition de E.

Proposition 28.141. *Soit $\Omega_\sigma(a)$ une σ-orbite de a.*

- *alors $\Omega_\sigma(a)$ est invariante par σ.*
- *l'application induite par σ sur $\Omega_\sigma(a)$ est une bijection.*
- *si $\Omega_\sigma(a)$ n'est pas un singleton, aucun de ses éléments n'est invariant par σ.*

Proposition 28.142. *Soit $\Omega_\sigma(a)$ une σ-orbite de a. Si $p = \text{card}(\Omega_\sigma(a))$ avec $p > 1$ alors $\Omega_\sigma(a) = \{a; \sigma(a); ...; \sigma^{p-1}(a)\}$.*

28.7.3 Cycle et longueur d'un cycle

Définition 28.143. *Une permutation σ de S_n est un* ***cycle*** *de longueur r ou* ***r-cycle****, ssi il existe un ensemble ordonné de r entiers de $\mathbb{N}_n$: $\{j_1; j_2; ...; j_r\}$ tels que :*

$$\begin{cases} \sigma(j_1) = j_2; \sigma(j_2) = j_3; ...; \sigma(j_r) = j_1 \\ \sigma(k) = k; \forall k \in \mathbb{N}_n \backslash \{j_1; j_2; ...; j_r\} \end{cases}$$

ce cycle sera noté $\sigma = (j_1; j_2; ...; j_r)$.

Remarque 28.144. Le support de σ est l'ensemble $\{j_1; j_2; ...; j_r\}$ est appelé ?.

Exemple 28.145. La permutation σ: $\left|\begin{array}{lcl} 1 & \mapsto & 3 \\ 2 & \mapsto & 2 \\ 3 & \mapsto & 5 \\ 4 & \mapsto & 4 \\ 5 & \mapsto & 1 \end{array}\right.$ est un cycle, σ s'écrit $(1; 3; 5)$. On ne note pas les valeurs invariantes. Puis on $1; \sigma(1) = 3$ et $\sigma(3) = 5$.

Exemple 28.146. ... de composition de cycles dans S_5. $c_1(1; 2)$ et $c_2(3; 4; 5)$.

On a $\begin{array}{ccccc} & c_1 & & c_2 & \\ 1 & \mapsto & 2 & \mapsto & 2 \\ 2 & \mapsto & 1 & \mapsto & 1 \\ 3 & \mapsto & 3 & \mapsto & 4 \\ 4 & \mapsto & 4 & \mapsto & 5 \\ 5 & \mapsto & 5 & \mapsto & 3 \end{array}$ $c_2 \circ c_1$: $\left|\begin{array}{lcl} 1 & \mapsto & 2 \\ 2 & \mapsto & 1 \\ 3 & \mapsto & 4 \\ 4 & \mapsto & 5 \\ 5 & \mapsto & 3 \end{array}\right.$. $(3; 4; 5) \circ (1; 2) = ?$

Proposition 28.147. *Si σ et σ' sont deux cycles de supports disjoints, on a : $\sigma \circ \sigma' = \sigma' \circ \sigma$ (les cycles de supports disjoints commutent).*

Proposition 28.148. *Soit σ un cycle de longueur p alors $\sigma^p = \mathrm{Id}_E$.*

Définition 28.149. *Dans un groupe S_n, on dira que deux* ***cycles*** *sont* ***disjoints*** *ssi leur supports sont disjoints.*

Proposition 28.150. *L'ordre d'un r-cycle est r.*

Théorème 28.151. *Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ un $k-$ cycle. $c = (c_1, ..., c_k)$ alors $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$ est aussi un k-cycle et $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1} = (\sigma(c_1); ...; \sigma(c_n))$.*

Démonstration. Cours de licence de mathématique page 47 (Zeng) □

Proposition 28.152.

1. *Le conjugué d'un k-cycle est un k-cycle.*
2. *Deux k-cycles quelconques sont conjugués.*
3. *Deux permutations ($\neq \mathrm{Id}$) sont conjuguées si et seulement si dans leur décomposition apparait le même nombre de k-cycles.*

Remarque 28.153. Appliquons les propositions précédentes : Soit $\bar{i}$, $\bar{j}$ $\in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $(\bar{i}$, $\bar{j}$ $) = c \circ (\overline{j-1}, j) \circ c^{-1}, c = (\bar{i}$, $\overline{i+1}, ..., \overline{j-1})$.

28.7.4 Transposition

Définition 28.154. *On appelle* ***transposition****, tout cycle de longueur 2.*
On notera $\tau_{a,b}$ ou (a, b) la transposition telle que $\tau_{a,b}(a) = b$ et $\tau_{a,b}(b) = a$.

Exemple 28.155. Pour $n=5$, $\tau_{2,4}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&4&3&2&5\end{pmatrix}$.

Proposition 28.156.
- $\tau_{a,b}\circ\tau_{a,b}=\mathrm{Id}_E$
- $\tau_{a,b}\circ\tau_{a,c}\circ\tau_{a,b}=\tau_{b,c}$, *pour tout* S_n *où* $n>2$.

Définition 28.157. *On appelle* ***transposition simple*** *, toute transpositions de la forme* $(i;i+1)$ *telles que* $(1\leqslant i\leqslant n-1)$.

28.7.5 Décomposition d'une permutation

28.7.5.1 Décomposition en cycle

Théorème 28.158. *Soit une permutation* σ *telle que* $\sigma\neq\mathrm{Id}_{\mathbb{N}_n}$ *et* $\sigma\in S_n$ *alors* σ *se décompose de manière unique (à l'ordre des facteurs près) en un produit de cycles disjoints, différent de* $\mathrm{Id}_{\mathbb{N}_n}$.

Remarque 28.159.
- Etant donné son unicité, la décomposition d'une permutation σ sera appelée : Décomposition canonique de σ en produit de cycles.
- Le théorème précédent entraîne que tout groupe S_n est engendré par l'ensemble de ses cycles.

Théorème 28.160. *Soit une permutation* σ *de* S_n *telle que* $\sigma\neq\mathrm{Id}_{\mathbb{N}_n}$ *avec* $n>1$.
Si $\sigma=\gamma_1\circ\gamma_2\circ...\circ\gamma_s$ *est la décomposition canonique de* σ *alors l'ordre de* σ *dans le groupe* S_n *est égal au ppcm des longueurs des cycles* $\gamma_q,(1\leqslant q\leqslant s)$.

28.7.5.2 Décomposition en transposition

Remarque 28.161. $(i_1,...,i_k)=(i_1,...,i_{k-1})\circ(i_{k-1},i_k)$.

Théorème 28.162. *Pour tout n dans* $\mathbb{N}$*, toute permutation* σ *de* S_n*, se décompose (de manière non unique), en un produit de transposition (non permutable, en général).*

Théorème 28.163. *Tout groupe symétrique* $S_n,(n\geqslant 2)$ *est engendré par l'ensemble des* $(n-1)$ *transpositions de la forme* $(1;i)$ *tel que* $(2\leqslant i\leqslant n-1)$.

28.7.5.3 Décomposition en transposition simple

Théorème 28.164. *Tout sous-groupe* S_n, $(n\geqslant 2)$ *est engendré par les* $(n-1)$ *transpositions simples.*

Exemple 28.165.

28.7.6 Inversion d'une permutation

Définition 28.166. *soit* $\sigma\in S_n$.
On dit que l'élément $\sigma(j)$ *possède une inversion avec l'élément* $\sigma(i)$ *ssi on a :*
$i<j$ *et* $\sigma(i)>\sigma(j)$

28.7.7 Signature d'une permutation

Définition 28.167. *On appelle* ***signature*** *d'une permutation* σ *le nombre noté* $\varepsilon(\sigma)$ *tel que :*

$$\varepsilon(\sigma)=(-1)^I \tag{28.1}$$

Où I est le nombre total d'inversions de la permutation σ.

Définition 28.168. *Soit une permutation σ.*

- *on dit que la* ***permutation*** *est* ***paire*** *ssi $\varepsilon(\sigma)=1$.*
- *on dit que la* ***permutation*** *est* ***impaire*** *ssi $\varepsilon(\sigma)=-1$.*

Proposition 28.169.

1. *Toute transposition est impaire : $\varepsilon(\sigma)=-1$.*
2. *Soit σ une permutation de S_n, τ une transposition alors $\varepsilon(\tau\circ\sigma)=-\varepsilon(\sigma)$.*
3. *Si la permutation σ est la composée de h transpositions, on a alors : $\varepsilon(\sigma)=(-1)^h$.*
4. *Soient σ_1 et σ_2 deux permutations de S_n. On a $\varepsilon(\sigma_1\circ\sigma_2)=\varepsilon(\sigma_1)\times\varepsilon(\sigma_2)$ autrement dit l'application : ε: $\left|\begin{array}{ccc} S_n & \to & \{-1,+1\} \\ \sigma & \mapsto & \varepsilon(\sigma) \end{array}\right.$ est un homomorphisme (plus exactement un épimorphisme) de groupe.*
5. *Soit σ une permutation de S_n, on a $\varepsilon(\sigma)=(-1)^{n-t}$ où t est le nombre des σ-orbites distinctes. $\varepsilon(\sigma)=\prod_{1\leqslant i\leqslant k\leqslant n}\frac{\sigma(k)-\sigma(i)}{k-i}$??????????????????????????????.*
6. *La signature d'un k-cycle est $(-1)^{k-1}$.*

28.7.8 Groupe alterné A_n

Définition 28.170. *Pour tout $n\in N'$, on appelle* ***Groupe μAlterné de degré n*** *et on note A_n, l'ensemble des permutations paires de S_n.*

Remarque 28.171. Il faut maintenant justifier ce nom ! que designe N' ????

Proposition 28.172. *Pour tout $n\geqslant 2$, le groupe alterné de degré n A_n*

1. *forme un sous-groupe de S_n,*
2. *d'autre part c'est un sous-groupe d'ordre $\frac{n!}{2}$.*

Remarque 28.173. A_n est le noyau de ε.

Proposition 28.174. *Pour $n\geqslant 2$, le groupe A_n est simple.*

Démonstration. Cours de licence ATN page 52 □

Note 28.175. Importante, car c'est le point de départ de la théorie de Galois.

Lemme 28.176. *Pour $n\geqslant 5$ les 3-cycles sont conjugués dans A_n.*

Lemme 28.177. *Le commutateur de s et c; $\rho=s\,c\,s^{-1}\,c^{-1}$ appartient à H. $\rho\neq \mathrm{Id}$ et ρ laisse fixe au moins $n-5$ élément de $[n]$.*

Lemme 28.178. *H contient un 3-cycle.*

Lemme 28.179. *Pour $n\geqslant 3$, les 3-cycles engendrent A_n.*

28.7.9 Groupes diédraux D_n

Soient P le plan affine et $I(2)$ le groupe des isométries du plan P (exemple (1.34)). On rappelle que $I(2)$ est un sous-groupe du groupe symétrique SP et que, dans le plans P, toute rotation, toute symétrie par rapport à une droite est un élément du groupe $I(2)$ (exercice 26, chap. I).

Pour $n\geqslant 2$ dans $\mathbb{N}$, notons P_n un polygone régulier à n sommets dans le plan P. Soit D_n l'ensemble des isométries du plan P qui conservent le polygone, autrement dit, qui conservent globalement l'ensemble de ses n sommets.

Proposition 28.180. *On vérifie facilement que D_n est un sous-groupe de $I(2)$.*

Définition 28.181. *Pour tout $n \geqslant 2$ dans $\mathbb{N}$, le groupe D_n est appelé* ***groupe diédral*** *de degré n.*

Proposition 28.182. *Pour tout $n \geqslant 2$ dans $\mathbb{N}$, le groupe diédral D_n est fini d'ordre $2n$.*

Proposition 28.183. *Les notations sont celles de la proposition précédente.*

1. *Dans tout groupe diédral $D_n, (n \geqslant 2)$, tout élément $\rho_1^k \circ \sigma (0 \leqslant k \leqslant n-1)$ est d'ordre 2.*
2. *D_n est non abélien pour $n \geqslant 3$.*

Proposition 28.184. *Tout groupe G engendré par deux éléments a et b tels que $o(a) = n, (n \geqslant 2); o(b) = 2$ et $o(a\,b) = 2$ est isomorphe au groupe diédral D_n.*

Définition 28.185. *?*

28.8 Groupe opérant sur un ensemble

Note 28.186. Deux points de vue permettent d'aborder cette notion. Le plan proposé par Zeng et repris initiallement ici me semble le plus simple. Mais il faut retenir la méthode de passage de l'un à l'autre.

28.8.1 Définitions

Définition 28.187. *On dit qu'un* ***groupe*** *$(G, *)$ d'élément neutre ε* ***opère ou agit à gauche*** *sur un ensemble E ou que G est* ***muni d'une action de groupe*** *ou encore que G est le* ***groupe opérateur à gauche*** *ssi il existe une application de $G \times E \to E$ dite* ***action à gauche*** *de G sur E et notée $\cdot$ telle que :*

i. $\forall x \in E, \forall \alpha, \beta \in G, \alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha * \beta) \cdot x$ *(associativité de l'action)*

ii. $\forall x \in E, \varepsilon \cdot x = x$. *(action de l'élément neutre)*

Définition 28.188. *Les éléments d'un groupe opérateur sont les* ***opérateurs****.*

Remarque 28.189.

1. On définit de la même manière un groupe opérant à droite. Dans la suite, nous conviendrons de dire qu'un groupe opére sur un ensemble ssi il opére à gauche sur E. Dans ce cas, E est appelé un G-ensemble.
2. Voir exemples cours Puf Théorie des groupes p.176.
3. Ces définitions ne sont pas exclusives aux groupes voir : Action d'Ensemble et Domaine Opérateur. Elles traduisent simplement l'existence d'une loi de composition externe sur un ensemble donné dont l'ensemble des opérateurs est un groupe.
4. Seconde approche : On dit que G opère sur E à l'aide d'une application bijective $\varphi : E \to E$ ou l'... On appelle action à gauche du groupe G sur un ensemble E, un homomorphisme $\varphi : G \to S_E$ (S_E étant le groupe des permutations i.e. des bijections de $E \to E$). Autrement dit $\forall \alpha, \beta \in G, \varphi(\alpha * \beta) = \varphi(\alpha) \circ \varphi(\beta)$. Dans le cours de Zeng cette approche est aussi abordée 28.153 et 28.155 ci-après. Si φ est injective alors l'action est dite fidèle c'est à dire $\forall \alpha, \beta \in G, \forall x \in E, \varphi(\alpha; x) = \varphi(\beta; x) \Rightarrow (\alpha = \beta)$. Si

Définition 28.190. *On dit que $(G, *)$* ***opère fidèlement à gauche*** *si et seulement si :*
$\forall \alpha, \beta \in G, \forall x \in E, (\alpha \cdot x = \beta \cdot x) \Rightarrow (\alpha = \beta)$

Définition 28.191. *On dit que $(G, *)$* ***opère librement à gauche*** *si et seulement si :*
$\forall \alpha \in G, \forall x, y \in E, (\alpha \cdot x = \alpha \cdot y) \Rightarrow (x = y)$ *ou* $\forall \alpha \in G, \forall x, y \in G, (x \neq y) \Rightarrow (\alpha \cdot x \neq \alpha \cdot y)$

Définition 28.192. *On dit que* $(G,*)$ ***opère transitivement à gauche*** *si et seulement si :* $\forall x,y\in E,\exists\alpha\in G, y=\alpha\cdot x$.

Remarque 28.193. L'unicité de α n'est pas imposée !

Définition 28.194. *On dit que* $(G,*)$ ***opère simplement à gauche*** *si et seulement si :* $\forall x\in E,\forall\alpha\in G,(\alpha\cdot x=x)\Rightarrow(\alpha=\varepsilon)$, ε *élément neutre de* G.

Note 28.195. Selon CTES cette définition équivaut à dire que la loi est fidèle. Pour d'autre, simplement signifie librement et transitivement. Quelle est la bonne définition ?

Remarque 28.196. Seconde approche

Proposition 28.197. *Soit* $(G,*)$ *un groupe opérant sur* E.

1. $\forall m\in G$, *l'application* $\gamma_g:\left|\begin{array}{ccc}E&\to&E\\x&\mapsto&m\cdot x\end{array}\right.$ *est une permutation de* E.
2. *Soit* $(S_E,\circ)$ *le groupe des permutations de* E, *l'application* $\gamma:\left|\begin{array}{ccc}G&\to&S_E\\g&\mapsto&\gamma_g\end{array}\right.$ *est un morphisme de groupe et* $\mathrm{Ker}(\gamma)$ *est appelé le noyau de l'action de* G *sur* E.

Remarque 28.198. Autrement dit à toute action de $G\to E$ correspond un homomorphisme de groupes, $\gamma\colon G\to S_E$ appelé représentation de G. On montre que l'existence d'un tel homomorphisme permet de définir une action de groupe d'où le corollaire suivant :

Corollaire 28.199. *Un groupe* $(G,*)$ *opère sur un ensemble* E *ssi il existe un homomorphisme* $\gamma\colon G\to S_E$ *où* $(S_E,\circ)$ *est le groupe des permutations de* E.

Proposition 28.200.

1. γ *opère fidèlement si et seulement si sont application partielle* $\gamma(\bullet;x)$ *est injective par rapport aux opérateurs c'est à dire :* $\forall\alpha,\beta\in G,\forall x\in E,\gamma(\alpha;x)=\gamma(\beta;x)\Rightarrow(\alpha=\beta)$.
2. γ *opère librement si et seulement si sont application partielle* $\gamma(\bullet;x)$ *est injective par rapport aux éléments de l'ensemble c'est à dire :* $\forall\alpha\in G,\forall x,y\in E,\gamma(\alpha;x)=\gamma(\alpha;y)\Rightarrow(x=y)$.
3. γ *opère transitivement si et seulement si sont application partielle* $\gamma(\bullet;x)$ *est surjective par rapport aux opérateurx c'est à dire :* $\forall x,y\in E,\exists\alpha\in G,y=\gamma(\alpha;x)$.
4. γ *opère simplement si et seulement si* $(\gamma(\alpha;x)=x)\Rightarrow(\alpha=\varepsilon)$.

Exemple 28.201.

1. Tout groupe opère $(G,*)$ sur lui même par translation : $\cdot:\left|\begin{array}{ccc}G\times G&\to&G\\(m,x)&\mapsto&m*x\end{array}\right.$
2. Tout groupe opère $(G,*)$ sur lui même par conjugaison : $\cdot:\left|\begin{array}{ccc}G\times G&\to&G\\(m,x)&\mapsto&m*x*m^{-1}\end{array}\right.$
3. Tout groupe opère $(G,*)$ sur $\mathcal{P}(G)$ par conjugaison : $\cdot:\left|\begin{array}{ccc}G\times\mathcal{P}(G)&\to&\mathcal{P}(G)\\(m,S)&\mapsto&m*S*m^{-1}\end{array}\right.$
4. Soit $(H,*)$ un sous-groupe de $(G,*)$ alors $(G,*)$ opère sur l'ensemble $(G/H)_g$ des classe à gauche modulo H par : $\cdot:\left|\begin{array}{ccc}G\times G/H&\to&G/H\\(m,xH)&\mapsto&{}_{m*x}H\end{array}\right.$
5. Soit E un ensemble non vide alors le groupe $(S_E,\circ)$ des permutations de E opère sur E par $\cdot:\left|\begin{array}{ccc}S_E\times E&\to&E\\(\sigma,x)&\mapsto&\sigma(x)\end{array}\right.$.

6. Soit un groupe G et $H \leqslant G$. Alors le noyau de l'action de G sur $Q_H = (G/H)_g$ est :
   i. $\bigcap_{x\in G} x\,H\,x^{-1}$.
   ii. c'est le plus grand sous-groupe de G, normal dans G et contenu dans H.

28.8.2 Fixateur

Définition 28.202. *Soit* $(G,*)$ *un groupe opérant sur* E *d'action* $\cdot : \left|\begin{array}{ccc} G\times E & \to & E \\ (m,x) & \mapsto & m\cdot x \end{array}\right.$ *et* $g \in G$.

On appelle ***fixateur*** *de* m*, l'ensemble noté* $\mathrm{fix}(m)$ *tel que* $\forall m \in E, \mathrm{fix}(g) = \{x \in E; m\cdot x = x\}$. *C'est l'ensemble des éléments de* E *qui sont fixes par l'action de l'élément* m *de* G *(du groupe d'opérateurs).*

28.8.3 Stabilisateur

Définition 28.203. *Soit* $(G,*)$ *un groupe,* E *un* G*-ensemble. L'ensemble* $\{m \in G; m\cdot x = x\}$ *de* G *associé à un élément* x *de* E *est appelé* ***sous-groupe d'isotropie*** *ou* ***stabilisateur*** *de* x*, on le note* $\mathrm{stab}(x)$ *ou* $\mathcal{S}_x$ *et* $\forall x \in E, \mathrm{stab}(x) = \{m \in G; m\cdot x = x\}$. *Autrement dit c'est l'ensemble des éléments de* G *(groupe opérateur) qui laissent fixe l'élément* x *de* E *par la loi d'action.*

Proposition 28.204. *Soit* $(G,*)$ *un groupe opérant sur* E *d'action* $\cdot : \left|\begin{array}{ccc} G\times E & \to & E \\ (m,x) & \mapsto & m\cdot x \end{array}\right.$.

L'ensemble : $\{m \in G; m\cdot x = x\}$ *(i.e. les stabilisateur de* x*) est un sous-groupe de* G.

Remarque 28.205. C'est cette proposition qui justifie le terme de sous-groupe (d'isotropie).

28.8.4 Orbite

Définition 28.206. *Soit* E *un* G*-ensemble. On appelle* ***orbite de*** x ***suivant*** G *ou* G***-orbite*** *de* x *et on note* Ω_x *l'ensemble des éléments de* E *qui sont obtenus par action d'un élément de* G *sur* x. $\Omega_x = \{m\cdot x; m \in G\}$.

Définition 28.207. *Si* E *est un* G*-ensemble, toute* G*-orbite reduite à un seul élément sera dite ponctuelle.*

Remarque 28.208. Voir cours Puf Théorie des groupes p.179.

28.8.5 Exemples classiques

Exemple	stabilisteur	Notes	Orbite	Notes
1	$\mathrm{stab}(x) = \{1_G\}$		$\Omega_x = G$	
2	$\mathrm{stab}(x) = Z(G)$	centre de G	$\Omega_x = \{g * x * g^{-1}; g \in G\}$	classe de conjugaison de x
3	$\mathrm{stab}(S) = N_G(S)$	normalisateur de S	$\Omega_x = \{g * S * g^{-1}; g \in G\}$	classe de conjugaison de S
4	$\mathrm{stab}(x\,H) = x\,H\,x^{-1}$		$\Omega_x = G/H$	
5	$\mathrm{stab}(x) = S_E$		$\Omega_x = E$	

28.8.6 Propriétés des stabilisateurs et orbites

Proposition 28.209. *Soit* E *un* G*-ensemble et* ρ_G *la relation binaire dans* E *telle que* $(x\rho_G y) \Leftrightarrow (\exists m \in G; y = m\cdot x)$ *alors*

1. ρ_G *est une relation d'équivalence dans* E.
2. *Les classes d'équivalence sont les ensembles* $\Omega_x = \{m\cdot x; m \in G\}$*, autrement dit les orbites de* x *suivant* G.

Proposition 28.210. *(Evident) Les orbites des éléments sous l'action de G forment une partition de E.*

Théorème 28.211. *Soit G un groupe, E un G-ensemble alors $\forall(x,\ y) \in E^2$, $(x\rho_G y) \Leftrightarrow y \in (\Omega_x \text{ ou } x \in \Omega_y) \Rightarrow$ ($\text{stab}(x)$ et $\text{stab}(y)$ conjugués dans $\mathcal{P}(G)$).*

Théorème 28.212. *Soit G un groupe, E un G-ensemble alors $\forall x \in E$, on a :*

1. $\text{card}(\Omega_x) = [G\colon \text{stab}(x)]$
2. *si G est d'ordre fini* $\text{card}(\text{stab}(x))$ et $\text{card}(\Omega_x)$ *divisent $o(G)$, puisque* $\text{card}(\Omega_x) = \frac{\text{card}(G)}{\text{card}(\text{stab}(x))}$ *($o(G)$ c'est ...).*

Remarque 28.213. Si G est fini $\text{card}(\Omega_x)$ et $\text{card}(\text{stab}(x))$ divisent $\text{card}(G)$. C'est le théorème précédent.

Théorème 28.214. *Soit E un ensemble fini et G un groupe opérant sur E. Si $\{x_i\}_{1\leqslant i\leqslant r}$ est une famille de représentants des G-orbites distinctes, alors :*

$$\text{card}(E) = \sum_{i=1}^{r} [G\colon \text{stab}(x_i)] \text{ i.e. } \sum_{i=1}^{r} \text{card}(\Omega_{x_i}).$$ *(Equation des classes)*

Proposition 28.215. *Soit G un groupe fini opérant sur un ensemble fini E. Soit $(\Omega_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ les orbites sous cette action.*

Le nombre d'orbite est $k = \dfrac{1}{\text{card}(G)} \displaystyle\sum_{g\in G} \text{card}(\text{fix}(g))$ *(formule de Burnside).*

Note 28.216. Pourquoi avoir introduit les orbites dans cette définition ?

Exemple 28.217. Examinons quelques cas particuliers :

1. $E = \mathcal{P}(G)$:
   Soit G un groupe opérant sur $\mathcal{P}(G)$ par conjugaison. $\forall S \in \mathcal{P}(G)$, on a : $\text{card}(\Omega_S) = [G\colon N_G(S)]$.
2. $E = G$:
   i. Soit G un groupe fini opérant sur lui-même par conjugaison si $\{x_i\}_{1\leqslant i\leqslant r}$ est une famille de représentants de classe de conjugaison distinctes dans G :
   $$o(G) = \sum_{i=1}^{r} [G\colon Z_G(x_i)] \text{ (équation aux classes (1)).}$$
   ii. Soit G un groupe fini opérant sur lui-même, de centre $Z(G)$ et $\{x_i\}_{1\leqslant i\leqslant k}$ une famille de représentants de classes de conjugaison distinctes et non ponctuelles de G, alors :
   $$o(G) = o(Z(G)) + \sum_{i=1}^{k} [G\colon Z_G(x_i)] \text{ (équation aux classes (2)).}$$
   iii. Soit G un groupe fini opérant sur un ensemble fini E. Soit $(\Omega_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ les orbites sous cette action. Le nombre d'orbite est $k = \dfrac{1}{\text{card}(G)} \displaystyle\sum_{g\in G} \text{card}(\text{fix}(g))$

Note 28.218. D'où vient cette différence de forme ! ? La formule (2) vient uniquement du fait que l'on ne considère que les classes non ponctuelles. Exercice associé : annales licence maths sujet avril 2001 ATN.

28.9 Groupes finis, p-groupe, p-sous-groupe et théorèmes de Sylow

p-torsion ?

28.9.1 p-sous-groupe d'un groupe fini

Définition 28.219. *Soit G un groupe fini. On dit que G est un p-groupe ssi $o(G) = p^n$, où p est un nombre premier, $n \in \mathbb{N}$.*

Définition 28.220. *Soit G un groupe fini et H un sous-groupe de G.*

i. H est un p-sous-groupe de G ssi H est un p-groupe.

ii. si $o(H) = p^n$ et si p^n est la plus haute puissance de p divisant l'ordre de H, on dit que H est un p-groupe de Sylow de G.

28.9.2 Premier théorème de Sylow

Théorème 28.221. *Soit G un groupe fini et p un nombre premier divisant l'ordre de G.*

Si $o(G) = s\,p^n$ avec s non divisible par p alors $\forall r \in \{1; ...; n\}$, il existe un sous-groupe de G d'ordre p^r.

Théorème 28.222. *(Théorème de Cauchy) Soit G un groupe fini. Si p est nombre premier divisant $o(G)$ alors G a au moins un élément d'ordre p.*

Démonstration. Algèbre et géométrie Bréal page 45. Cours licence ATN page 31. □

Enoncé Soit G un groupe fini d'ordre sp^n où p est premier et ne divise pas s alors G contient au moins un sous-groupe d'ordre p^n.

28.9.3 Second théorème de Sylow

Théorème 28.223. *Soit G un groupe fini et p un nombre premier divisant $o(G)$ alors*

i. Tout sous-groupe de G est contenu dans un p-sous-groupe de Sylow de G.

ii. Les p-sous-groupes de Sylow de G sont conjugés.

iii. Le nombre des p-sous-groupes de Sylow de G est congru à 1 modulo p et divise l'ordre de G.

Remarque 28.224.

1. Un groupe fini G a un unique p-sous-groupe de Sylow ssi S est normal dans G.
2. Dans un groupe fini abélien G, pour tout nombre premier p divisant l'ordre de G, il n'existe qu'un seul p-sous-groupe de Sylow.
3. Application voir Puf théorie des groupes p.212.

Définition 28.225. *Soit p un nombre premier et G un groupe abélien. Un élément $x \in G$ est dit p-torsion ssi l'ordre de x est une puissance de p. On note : $G_p = \{x \in G; x \text{ est } p-\text{torsion}\}$.*

Proposition 28.226. *Si G est abélien, G_p est un sous-groupe de G.*

Proposition 28.227. *Si un nombre premier $p \nmid |G|$ alors $G_p = \{O_G\}$.*

Théorème 28.228. *(Théorème de Cauchy) Soit G un groupe fini et p un nombre premier. Si p divise $O(G)$, alors G contient un élément d'ordre p.*

Proposition 28.229. *Le groupe produit direct $(G_1 \times G_2)$ de deux groupes cycliques G_1 et G_2 d'ordre m et n est cyclique ssi* $\text{pgcd}(m, n) = 1$.

Corollaire 28.230. *Si $n = p_1^{n_1} \times ... \times p_m^{n_m}$ est la factorisation en nombres premiers de n alors :*

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p_1^{n_1}\mathbb{Z} \times ... \times \mathbb{Z}/p_m^{n_m}\mathbb{Z}$.

Exemple 28.231.

- $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ non cyclique et $\mathbb{Z}/25\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ cyclique donc non isomorphes.
- $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ non cyclique et $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ cyclique donc non isomorphes.

28.10 Produit direct de groupes

(à déplacer)

28.10.1 Produit direct de deux groupes

Proposition 28.232. *Soient $(G_1, \cdot)$ et $(G_2, +)$ deux groupes.*
Si $*$ est la loi :

$$*: \left| \begin{array}{ccc} (G_1 \times G_2)^2 & \to & G_1 \times G_2 \\ ((x_1, x_2); (y_1, y_2)) & \mapsto & (x_1 \cdot y_1; x_2 + y_2) \end{array} \right. \quad \text{alors } (G_1 \times G_2, *) \text{ est un groupe.}$$

Définition 28.233. *Soient $(G_1, \cdot)$ et $(G_2, +)$ deux groupes.*
*On appelle **groupe produit direct** des groupes $(G_1, \cdot), (G_2, +)$ le groupe $(G_1 \times G_2, *)$ où $*$ est la loi de composition interne définie par :*

$$*: \left| \begin{array}{ccc} (G_1 \times G_2)^2 & \to & G_1 \times G_2 \\ ((x_1, x_2); (y_1, y_2)) & \mapsto & (x_1 \cdot y_1; x_2 + y_2) \end{array} \right. .$$

Proposition 28.234.

i. Les projections canoniques : p_1: $\left| \begin{array}{ccc} G_1 \times G_2 & \to & G_1 \\ (x_1, x_2) & \mapsto & x_1 \end{array} \right.$ et p_2: $\left| \begin{array}{ccc} G_1 \times G_2 & \to & G_2 \\ (x_1, x_2) & \mapsto & x_2 \end{array} \right.$ sont des épimorphismes de groupes.

ii. Les injections canoniques : q_1: $\left| \begin{array}{ccc} G_1 & \to & G_1 \times G_2 \\ x_1 & \mapsto & (x_1, 1_{G_2}) \end{array} \right.$ et q_2: $\left| \begin{array}{ccc} G_2 & \to & G_1 \times G_2 \\ x_2 & \mapsto & (1_{G_1}, x_2) \end{array} \right.$ sont des monomorphismes de groupes.

Remarque 28.235. $G_1 \cong \mathrm{Im}(q_1)$ et $G_2 \cong \mathrm{Im}(q_2)$.

Proposition 28.236. $o(G_1) \times o(G_2) = o(G_1 \times G_2)$

Proposition 28.237. *Soient deux groupes G_1 et G_2. Un groupe G est isomorphe à $G_1 \times G_2$ ssi il contient deux sous-groupes H_1 et H_2 tels que :*

i. $H_i \cong G_i, i = 1, 2$.

ii. $\forall h_i \in H_i, h_1 h_2 = h_2 h_1$.

iii. $G = H_1 H_2$.

iv. $H_1 \cap H_2 = \{1_G\}$.

Exemple 28.238.

1. $G = (\mathbb{R}^*, \cdot)$ est un groupe multiplicatif, il suffit de prendre $G_1 = \{-1, +1\}, G_1 \leqslant G, G_2 = \mathbb{R}_+^*$. $G \cong G_1 \times G_2$, $x \mapsto (\mathrm{signe}(x), |x|)$, $x \cdot y \mapsto (\mathrm{sign}(x\,y), |x\,y|) = (\mathrm{sign}(x), |x|) \cdot (\mathrm{sign}(y), |y|)$.
2. $G = (\mathbb{C}^*, \cdot)$ $G_1(\mathbb{R}_+^*, \cdot), G_1 \leqslant G, G_2 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\} \leqslant G$. $G \cong G_1 \times G_2$, $z \mapsto (|z|, \frac{z}{|z|})$.

Remarque 28.239. On peut généraliser la définition et les propositions précédentes à une famille finie de groupes, c'est l'objet de la section suivante.

28.10.2 Produit direct d'un nombre fini de groupe

Proposition 28.240. *Soient I un ensemble fini ,$((G_i,*_i))_{i\in I}$ une famille finie de groupes.*
Si $*$ est la loi définie par :

$$*:\left|\begin{array}{ccc}(\prod_{i\in I}G_i)^2 & \to & \prod_{i\in I}G_i \\ ((x_i)_{i\in I};(y_i)_{i\in I}) & \mapsto & (x_iy_i)\end{array}\right. \text{ alors } (\prod_{i\in I}G_i,*) \text{ est un groupe.}$$

Définition 28.241. *Soient I un ensemble fini ,$((G_i,*_i))_{i\in I}$ une famille finie de groupes.*
On appelle ***groupe produit direct*** *de la famille fini de groupe $((G_i,\ *_i\ ))_{i\in I}$ le groupe $(\prod_{i\in I}G_i,*)$ où $*$ est la loi de composition interne définie par :*

$$*:\left|\begin{array}{ccc}(\prod_{i\in I}G_i)^2 & \to & \prod_{i\in I}G_i\ . \\ ((x_i)_{i\in I};(y_i)_{i\in I}) & \mapsto & (x_iy_i)\end{array}\right.$$

28.11 Structure des groupes abéliens finis

Lemme 28.242. *Soit m premier avec n et $x,y\in G$ d'ordres respectifs m,n tels que $x\,y=y\,x$.*
Alors $o(x\,y)=o(x)o(y)$.

Lemme 28.243. *Soit x d'ordre m, y d'ordre n tel que $x\ y=y\ x$ alors $\exists z\in <x,\ y>$ tel que $o(z)=\text{ppcm}(m,n)$.*

Lemme 28.244. *Soit G un groupe abélien fini tel que m soit le maximum des ordres des éléments de G alors pour tout $x\in G$, on a $(x^m=1)\Leftrightarrow(o(x)|m)$*

Lemme 28.245. *Soit x_1 un élément de G(abélien) d'ordre maximum d_1 et $H_1=<x_1>$. Pour tout $\bar{y}\in G/H_1,\exists y\in G;o(\bar{y})=o(y)$.*

Lemme 28.246. *Soient $(d_1,...,d_r)$ et $(\delta_1,...,\delta_s)$ deux suites décroissantes d'entiers >0 telles que $d_{i+1}|d_i;i=1,...,r-1;d_r\geqslant 2$ et $\delta_{j+1}|\delta_i;j=1,...,r-1;d_n\geqslant 2$.*
Ces deux suites sont égales ssi $\forall m\geqslant 1,\prod_{i=1}^{r}\text{pgcd}(m,d_i)=\prod_{i=1}^{s}\text{pgcd}(m,\delta_i)$.

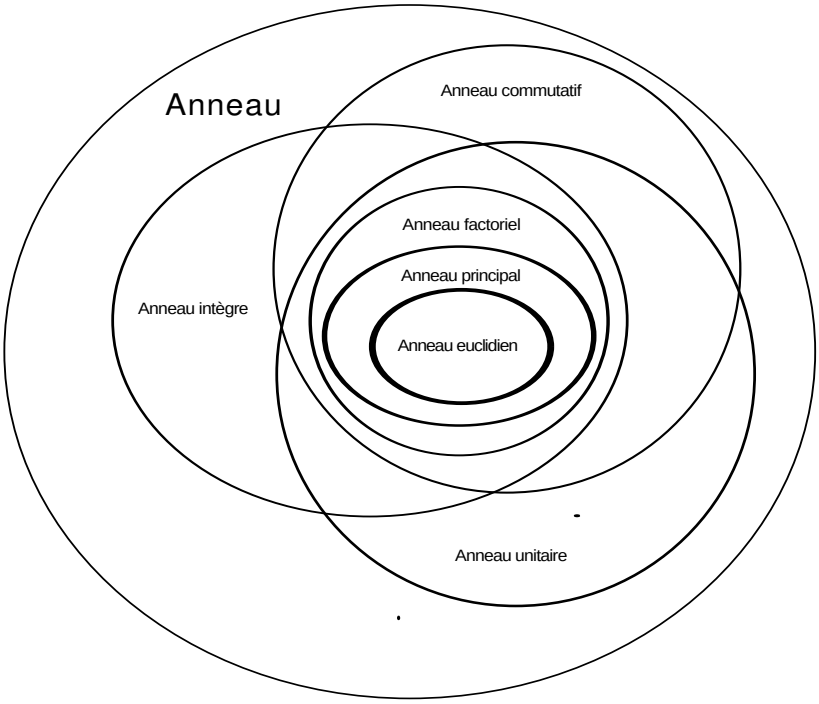
Théorème 28.247. *Soit G un groupe abélien fini d'ordre $n\geqslant 2$. Il existe une suite finie et décroissante d'entiers $(d_1,...,d_r)$ telle que :*

1. *$d_2|d_1;d_3|d_2;...;d_r|d_{r-1}$ et $d_r\geqslant 2$.*
2. *$G=\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z}\times...\times\mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z}$*
3. *La suite $(d_1,...,d_r)$ est unique et donc caractéristique de la classe d'isomorphisme de G.*

Exemple 28.248. Quel est le nombre de groupes abéliens d'ordre 100 ?
Les groupes cycliques intervenant dans la décomposition sont $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que :
$100=n_1\times...\times n_k$ et $n_k|n_{k-1},...,n_2|n_1$. Quels sont les diviseurs de 100 vérifiant cette propriété : $1,2,5,10,20,25,50,100$. Les factorisations possibles sont : $100=100\times1=50\times2=20\times5=10\times10$.

Chapitre 29
Structure d'Anneau

29.1 Généralités sur les anneaux



29.1.1 Définitions de base

Attention : La norme AFNOR a retenu une des défintions et qualifie d'ancienne la première. Certains cours désignent par anneau un anneau unitaire (exemple une partie du cours de licence CTE) voir même un anneau unitaire commutatif (par exemple une partie du cours licence UCBL). Avant toute lecture, il convient donc d'être attentif à ce point. Dans la suite, il faut toujours se demander si la condition Anneau unitaire n'a pas été oubliée.

Définition 29.1. *Soient A un ensemble, $+, \cdot$ 2 lois de composition interne. On dit que le triplet $(A, +, \cdot)$ est une structure d'anneau (ou un anneau) si et seulement s'il vérifie les propriétés suivantes :*

- $(A, +)$ *est un groupe commutatif.*
  Le couple formé par l'ensemble et la première loi est un groupe commutatif.
- $\cdot$ *est associative et distributive par rapport à* $+$*.*
  La deuxième loi est associative et distributive par rapport à la première loi.

Définition 29.2. *Un* ***anneau*** $(A, +, \cdot)$ *est dit* ***commutatif*** *si et seulement si sa deuxième loi est commutative.*

Définition 29.3. *Un* ***anneau*** $(A, +, \cdot)$ *est dit* ***unitaire ou unifère*** *si et seulement si sa deuxième loi possède un élément neutre, contenu dans A.*

Remarque 29.4.

1. Rien ne permet de dire que l'élément neutre est unique.

2. L'intéret des anneaux unitaires c'est d'assurer l'unicité des éléments inversibles (s'ils existent). C'est sans doute pour cette raison que l'on choisit dans un cours de considérer tous les anneaux comme unitaire. ??? Cette remarque a-t-elle un sens : si l'anneau n'est pas unitaire, on ne peut pas définir d'inverse ! Dans ce cas l'anneau unitaire permet de s'assurer uniquement de l'existence d'un élément neutre pour la 2ème loi.

Proposition 29.5. *Soit x un élément d'un anneau unitaire $(A, +, \cdot)$, il existe au plus un élément y tel que $x \cdot y = 1_A = y \cdot x$.*

Définition 29.6. *On appelle **inverse** d'un élément x d'un anneau unitaire $(A, +, \cdot)$ l'unique élément y (s'il existe) tel que $x \cdot y = 1_A = y \cdot x$, dans ce cas cet inverse est noté x^{-1}. Dans ce cas x est dit **élément unitaire** ou **élément unité** ou encore **élément inversible**. L'ensemble des éléments inversibles de l'anneau unitaire $(A, +, \cdot)$ sera noté A^*.*

Remarque 29.7. Attention ! Ne pas confondre avec unité d'un magma qui est l'élément neutre. Il faut donc distinguer l'unité de l'anneau (qui signifie inversible) et l'unité du magma qui signifie élément neutre.

Proposition 29.8. *Si $(A, +, \cdot)$ n'est pas réduit à $(\{0\}, +, \cdot)$ et si $(\cdot)$ n'est pas définie par : $\forall (a, b) \in A^2, a \cdot b = 0$ alors l'élément neutre de A pour l'addition n'admet pas de symétrique pour la multiplication (pas d'inverse) lorsque l'anneau est unifère (unitaire).*

Exemple 29.9. Exemples classiques d'anneaux :

1. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sont des anneaux commutatifs unitaires intègres
2. M_n l'ensemble des matrices carrées $(m,\ n)$ à coefficients dans l'un des anneaux précédents, muni de l'addition et de la multiplication des matrices est un anneau unitaire commutatif mais non intègre.
3. Soit l'ensemble $\{0\}$ et les lois $+, \cdot$ telles que $0 + 0 = 0, 0 \times 0 = 0$, dans ce cas $(\{0\}, +, \cdot)$ est un anneau commutatif unitaire où $(1_A = 0)$. C'est l'anneau nul.
4. Pour $n \geqslant 2$, $n\mathbb{Z}$ est un partie de $\mathbb{Z}$ stable pour l'addition et la multiplication, $(n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ est un anneau commutatif non unitaire.
5. $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}; \bar{+}; \bar{\cdot})$ est un anneau commutatif unitaire avec $\bar{+}; \bar{\cdot}$ définies par :
   $\bar{x} \,\bar{+}\, \bar{y} = \overline{x + y}$ et $\bar{x} \,\bar{\cdot}\, \bar{y} = \overline{x \cdot y}$.

29.1.2 Elément premier

Remarque 29.10. Cette définition est due à Guy Philippe (www.les-mathématiques.net). La structure générale dans laquelle où l'on puisse définir cette notion est celle de demi-groupe. Elle est reprise ici, mais elle devra être placée également dans le chapitre sur les demi-groupes encore appelés monoïdes. La définition ci-dessous est donc un rappel adapté aux anneaux.

Définition 29.11. *Un élément de l'anneau $(A, +, \times)$ est premier si et seulement si :*
$\forall (a, b) \in A^2, (p = a \times b) \Rightarrow (a, b) \in A^* \times (A \backslash A^*) \bigcup (A \backslash A^*) \times (A^*)$.
C'est à dire si et seulement si l'un des facteurs est inversible et pas l'autre. Autrement dit p est premier si et seulement s'il ne peut s'écrire comme produit de 2 facteurs inversibles ou de 2 facteurs non inversibles.

29.1.3 Division, divisibilité, diviseur et élément irréductible

Note 29.12. Ces définitions peuvent être développées dans le cadre d'un monoïde. Elles sont placées ici pour que la leçon puisse être indépendante. Voir livre I volume (2) page 213 bis.

29.1.3.1 Division

Définition 29.13. *Soit A un anneau. Effectuer la division de a par b c'est trouver $q \in A$ tel que $a = b \cdot q$ l'élément q s'appelle quotient de a par b.*

Note 29.14. Attention ! Nous sommes dans un anneau, les éléments ne sont pas nécessairement tous inversibles (si tous les éléments étaient inversibles nous serions dans un corps). La division de a par b, c'est trouver $q \in A$ tel que $a = b \cdot q$. La division est-elle l'opération inverse de la multiplication ? Non ! (Voir remarque ci-dessous, ce n'est pas une application sur $A \mapsto A$). Cependant, en définissant l'application f_b par : $(q) \mapsto b \cdot q$, on peut considérer l'image réciproque $f^{-1}(\{a\})$ (c'est à dire la multiplication inverse ou division du singleton $\{a\}$ par b). La division f^{-1} de $\{a\}$ par b c'est trouver l'ensemble des $q \in A$ tels que $a = b \times q$. La division n'est pas définie sur A mais sur $\mathcal{P}(A)$. On peut aussi définir aussi l'ensemble des paires ou couples $(a; c)$ tels que $a \cdot c = b$ et M^{-1} l'ensemble des valeurs de A telles que $\forall x \in M, \forall a \in A, x \cdot a \in M$ c'est la notion d'idéal. Arrêt

Remarque 29.15. L'unicité du quotient n'est pas assurée : Si

1. $b \cdot q_1 = b \cdot q_2 \Rightarrow q_1$ et q_2 sont associés.
2. $b \cdot q_1 - b \cdot q_2 = 0 \Rightarrow b \cdot (q_1 - q_2) = 0$. $A = \{0\}, b = q_1 = q_2 = 0$. $A \neq \{0\}$ b et $q_1 - q_2$ sont des diviseurs de 0. Enfin si b n'est pas diviseur de 0 et A intègre $a = 0$???? $\Rightarrow q = 0$, $a \neq 0$???? $\Rightarrow q_1 = q_2$ 1 seul élément ????.

29.1.3.2 Diviseur

Définition 29.16. *Soit $(M, \cdot)$ ou $(M; +; \cdot)$ resp. un monoïde ou un anneau. Soit $x; y \in M$, s'il existe un élément q de M tel que $x = q \cdot y$ (resp. $x = y \cdot q$), on dit que y est un diviseur à droite (resp. à gauche) de x.*

Remarque 29.17. Si M est commutatif les notions de diviseurs à droite et à gauche coïncident et on parle de diviseur.

29.1.3.3 Divisibilité

Définition 29.18. *On appelle divisibilité, la relation notée $|$, définie dans un anneau commutatif par $x|y$ (« x divise y») si et seulement si x est un diviseur de y.*

Remarque 29.19. C'est un pré-ordre, mais dans $\mathbb{N}$ par exemple c'est un ordre.

Remarque 29.20. 0_A ne divise aucun autre nombre sauf lui-même.

Démonstration. Si $b = 0$ $b = 0_A \cdot 0_A$ donc $0|b_A$, $0|b \Rightarrow \exists m; b = 0 \cdot m \Rightarrow b = 0$. Supposons $0|b \Leftrightarrow b = 0 \Rightarrow b = 0$. □

29.1.3.4 Divisible

Définition 29.21. *On dit qu'un élément x d'un anneau commutatif A* ***est divisible par*** *un élément y de A si et seulement si y est un diviseur de x.*

29.1.3.5 Diviseur de zéro d'un anneau

Remarque 29.22. Remplacer l'appellation de diviseur de 0 par couple (a, b) diviseur de 0 ou paire de diviseur de 0. Un couple diviseur de 0 est dit nul ssi il est égal à $(0_A; 0_A)$. Pour intègre et diviseur de 0 ne faudrait-il pas supprimer $a \neq 0_A$ et $b \neq 0_A$ de la définition des diviseurs de 0_A et rajouter dans l'intégrité : n'admet pas de couple diviseur de 0_A non nul. Réciproquement : dans un anneau A unitaire rien n'empêche $1_A = 0_A$ soit $b \in A; 1_A \cdot b = 0_A; A = \{0_A\}$. Important, conclusion pour éviter les cas triviaux (exemple : si $A = \{0\}$ on a vu que $0_A = 1_A$ donc 0_A est inversible $0_A \in A^*$, si $A \neq \{0\}$ et unitaire alors 29.4 $\Rightarrow 0_A \in A^*$), il faut supposer dans chaque définition que $A \neq \{0\} \Rightarrow 1_A = 0_A$ (à mettre avec remarque 29.7.3 ??? livre I).

Définition 29.23. *Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau, a un élément non nul de A. S'il existe $b \in A, b \neq 0$ tel que $a \cdot b = 0$ [resp. $b \cdot a = 0$] alors a est appelé diviseur de 0 à gauche [resp. à droite].*

Remarque 29.24. Pourquoi ne pas écrire : Soit $(A,+,\cdot)$ un anneau $a,b\in A; a\neq 0; b\neq 0$ tel que $a\cdot b=0$ alors a est appelé diviseur de 0 à gauche et b est appelé diviseur de 0 à droite.

Proposition 29.25. *Un élément non nul a d'un anneau est régulier à gauche [resp. à droite] ssi il n'est pas diviseur de 0 à gauche [resp. à droite].*

29.1.4 Eléments premiers entre eux

Définition 29.26. *On dit que deux éléments d'un anneau commutatif unitaire sont des éléments premiers entre eux (ou étrangers) entre eux si et seulement si leurs seuls diviseurs communs sont les unités de l'anneau.*

29.1.5 Sous-anneau

Définition 29.27. *Soient $(A,+,\cdot)$ une anneau, H une partie non vide de A, $(H,+,\cdot)$ est un* ***sous-anneau*** *de $(A,+,\cdot)$ ssi : $(H,+,\cdot)$ est un anneau (où $+,\cdot$ sont les restrictions des opérations à H des opérations définies sur A).*

Remarque 29.28. Suivant la définition, il faut rajouter le fait que 1_A appartienne à A.

Proposition 29.29. *$(H,+,\cdot)$ est un sous-anneau de $(A,+,\cdot)$ ssi :*

i. $(H,+)$ est un sous-groupe de $(A,+)$: $\forall(x,y)\in H^2, x-y\in H$,

ii. H est stable pour la multiplication : $\forall(x,y)\in H^2, x\cdot y\in H$.

Exemple 29.30.

1. $\mathbb{Z}$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$.
2. Les sous-anneaux de $\mathbb{Z}$ sont $k\,\mathbb{Z}; k\in\mathbb{N}$, car les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont les $k\mathbb{Z}; k\in\mathbb{N}$ qui sont stables par produit.

Proposition 29.31.

i. Si $(A,+,\cdot)$ est unifère et si l'élément neutre pour $(\cdot)$ appartient à H alors $(H,+,\cdot)$ est unifère.

ii. L'intersection d'une famille de sous-anneau de l'anneau $(A,+,\cdot)$ est un sous-anneau de A.

29.1.5.1 Sous-anneau engendré par une partie non vide

Proposition 29.32.

i. Soit X une partie non vide d'un anneau $(A,+,\cdot)$, il existe un plus petit sous-anneau de $(A,+,\cdot)$ contenant X,

ii. à savoir l'intersection de tous les sous-anneaux de $(A,+,\cdot)$ contenant X.

iii. Ses éléments sont les sommes finies des produits finis d'éléments de $X\cup(-X)$.

Définition 29.33. *Le plus petit sous-anneau de $(A,+,\cdot)$ contenant une partie non vide X de A est appelé* ***sous-anneau engendré*** *par X.*

29.1.6 Anneau produit

Proposition 29.34. *Soient $A_1; A_2; ...; A_n$ des anneaux et les lois $+,\cdot$ définies sur le produit cartésien $A=A_1\times A_2\times ...\times A_n$ par :*
$\forall a\in A; a=(a_i)_i$ *et* $\forall b\in A; b=(b_i)_i$ $a+b=(a_i+b_i)_i; a\cdot b=(a_i\cdot b_i)_i$
alors $(A;+;\cdot)$ est un anneau.

Définition 29.35. *L'anneau défini précédement est appelé* ***anneau produit*** *de $A_1; A_2; ...; A_n$ ou* ***produit direct*** *de $A_1; A_2; ...; A_n$.*

29.1.7 Centre d'un anneau

Définition 29.36. *Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau. On appelle* ***centre*** *de A et on note $Z(A)$ l'ensemble des éléments de A qui commutent avec tous les éléments de A : $\{x \in A; \forall y \in A, x \cdot y = y \cdot x\}$.*

Proposition 29.37. *Le centre d'un anneau $(A, +, \cdot)$ est un sous anneau de $(A, +, \cdot)$.*

29.1.8 Propriétés dans un anneau quelconque

29.1.8.1 Règles de calcul

Remarque 29.38.

- On dispose de toutes les règles valables pour les groupes abéliens.
- Mais aussi des propriétés dues au caractère associatif de la multiplication.

Proposition 29.39. *Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau :*

1. *Règle des signes $\forall x, y \in A$*
   a) $x \cdot (-y) = (-x) \cdot y = -x \cdot y$
   b) $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$
2. $x \cdot (n\,y) = (n\,x) \cdot y = n(x \cdot y), n \in \mathbb{Z}$.
3. $0_A \cdot x = x \cdot 0_A = 0_A$
4. $x(y - z) = x\,y - x\,z$

Démonstration.

1. $(-x + x) = 0_A \to (-x + x) + x = x \to ((-x + x) + x) \cdot y = x \cdot y = (-x + x) \cdot y + x \cdot y = x \cdot y$ en ajoutant $-(x \cdot y)$ à chaque membre on a : $(-x) \cdot y + x \cdot y = 0_A$ ajoutons encore $-(x \cdot y)$ à chaque membre on obtient $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$.
   $(y + (-y)) = 0_A \to y + (y + (-y)) = y \to x \cdot (y + (y + (-y))) = x \cdot y \to x \cdot y + x \cdot (y + (-y)) = x \cdot y$ en ajoutant $-(x \cdot y)$ à chaque membre on a : $x \cdot y + x \cdot (-y) = 0_A$ ajoutons encore $-(x \cdot y)$ à chaque membre on obtient $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$
2.
3. $\forall m, x \in A, 0_A + m = m \to (0_A + m) \cdot x = m \cdot x \to 0_A \cdot x + m \cdot x = m \cdot x$ ajoutons $-(m \cdot x)$ à chaque membre on a : $0_A \cdot x = 0_A$.
   $\forall m, x \in A, m + 0_A = m \to x \cdot (m + 0_A) = x \cdot m \to x \cdot m + x \cdot 0_A = x \cdot m$ ajoutons $-(x \cdot m)$ à chaque membre on a : $x \cdot 0_A = 0_A$.
4. □

Remarque 29.40. Dans un anneau non nul, 0 n'est régulier ni à droite ni à gauche. (n'est ce pas la propriété 29.4 du livre 1 volume 2) ?

Remarque 29.41.

1. Si le produit de n facteurs indentiques : $a \cdot a \cdot ... \, a = a^n$ alors : $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, $(a^n)^m = a^{n \times m}$, $(a_1 + ... + a_n) \cdot (b_1 + ... + b_n) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m} a_i \cdot b_j$.
2. Attention lorsque l'anneau n'est pas unitaire 1_A n'existe pas, par conséquent, on ne peut pas définir a^0.

29.1.8.2 Binôme de Newton dans un anneau quelconque

Théorème 29.42. *Soit A un anneau, a, b deux éléments de A permutables $(a \cdot b = b \cdot a)$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2, (a+b)^n = a^n + b^n + \sum (C_n^k \times (a^{n-k} \cdot b^k))$*

Remarque 29.43. Une autre formule sera donnée pour les anneaux unitaires.

29.1.9 Propriétés dans un anneau unitaire

29.1.9.1 Règles de calcul

Proposition 29.44.

i. $(-1_A) \cdot a = a \cdot (-1_A) = -a$,

ii. $n \cdot a = (n \cdot 1_A) \cdot a = a \cdot (1_A \cdot n)$ *???? $n \in$? dans ce cas faire attention aux signes $\cdot$ et $\times$.*

iii. $\forall a \in A$, *on peut définir* a^0 *par* $a^0 = 1_A$.

iv. Si a est un élément inversible de $(A, \cdot)$, on peut définir a^{-m}, $(m \in \mathbb{N})$.

a) $a^{1+(-1)} = a^1 \cdot a^{-1} = a^0 = 1_A$, a^{-1} *est l'inverse de a.*

b) $a^{m+(-m)} = a^0 = 1_A = a^m \cdot a^{-m}$, a^{-m} *est l'inverse de a^m.*

c) $(a \cdot a^{-1})^m = 1_A = a^m \cdot (a^{-1})^m$, $a^{-m} = (a^{-1})^m$.

v. $(a^m)^p = a^{mp}$.

29.1.9.2 Formule du binôme de Newton

Proposition 29.45.

i. Soit A un anneau, a, b 2 éléments de A qui commutent $(a \cdot b = b \cdot a)$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} (C_n^p \times (a^p \cdot b^{(n-p)}))$.

ii. Conséquences :

a) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$,

b) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^p = 0$,

c) si $p = \left[\frac{n}{2}\right]$, $q = \left[\frac{n-1}{2}\right]$, $\sum_{k=0}^{p} C_n^{2k} = \sum_{k=0}^{q} C_n^{2k+1} = 2^{(n-1)}$.

d) Posons : $S_p = \sum_{l=0}^{n-1} (a + l\,r)^p$ *alors* $(a + n\,r)^{p+1} - a^{p+1} = \sum_{k=1}^{p+1} C_{p+1}^k r^k S_{(p+1-k)}$, $p \in \mathbb{N}$.

e)

iii. Généralisation : Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau et $a_1, ..., a_n$ des éléments 2 à 2 permutables pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $(a_1 + ... + a_p)^n = \sum_{|\sum_{i=1}^{p} \alpha_i| = n} \frac{n!}{\alpha_1! ... \alpha_n!} a_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot a_p^{\alpha_p}$.

29.1.9.3 Groupes des éléments inversibles, ou groupe des unités

Note 29.46. Valable uniquement pour un anneau unitaire.

Proposition 29.47. *A^*, l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau $(A, +, \cdot)$, A^* est stable pour la multiplication, $(A^*, \cdot)$ est un groupe d'élément neutre 1_A.*

Définition 29.48. *$(A^*, \cdot)$ est appelé* ***groupe des éléments inversibles*** *ou* ***groupes des unités****.*

Remarque 29.49.

1. Les éléments inversibles de $(A, +, \cdot)$ sont parfois appelés unités de A.

2. C'est aussi l'ensemble des diviseurs de (1_A) l'unité.
3. Si $A^* = A\backslash\{0_A\}$, on a un corps.
4. Les éléments unités divisent tous les éléments de A. (Preuve : Soit ε un élément unité, il existe ε' un autre élément unité tel que $\varepsilon \cdot \varepsilon' = 1_A$ ainsi $\forall x \in A, x = 1_A \cdot x = (\varepsilon \cdot \varepsilon') \cdot x = \varepsilon \cdot (\varepsilon' \cdot x)$.
5. A^* n'est définie que dans un anneau unitaire.
6. $A^* \neq \varnothing$ puisque $1_A \in A^*$.

Exemple 29.50.

- $\mathbb{Z}^* = \{-1; 1\}$.
- $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
- $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* = \{\bar{k}\,; 1 \leqslant k \leqslant n-1, \text{pgcd}(k,n) = 1\}$, $\text{card}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* = \varphi(n)$.

29.1.9.4 Caractéristique d'un anneau unitaire

Définition 29.51. *On appelle* ***caractéristique*** *d'un anneau unitaire :*

– *l'entier* 0 *si* $\forall k \in \mathbb{N}^*, k \times 1_A \neq 0_A$ *autrement dit* $\underbrace{1_A + 1_A + ... + 1_A}_{k \text{ fois}} \neq 0_A$

– *sinon le plus petit entier* k *tel que* $k \times 1_A = 0_A$ *autrement dit* $\underbrace{1_A + 1_A + ... + 1_A}_{k \text{ fois}} = 0_A$.

On le note $\text{caract}(A)$.

Remarque 29.52. Etudier le déplacement dans la partie morphisme.

1. l'application φ: $\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & A \\ n & \mapsto & n \times 1_A \end{array}\right.$ est un morphisme d'anneau ($n \times 1_A = \underbrace{1_A + 1_A + ... + 1_A}_{n \text{ fois}, n>0}$, $n \times 1_A = 0_A$, $-n \times 1_A = \underbrace{-1_A + (-1_A) + ... + (-1_A)}_{n \text{ fois}, n>0}$). Il existe donc un unique entier $m \geqslant 0$ tel que $\ker(\varphi) = (m)$ (c'est dire $\ker(\varphi) = m\mathbb{Z}$, car l'idéal principal (m) n'est autre que $m\mathbb{Z}$) m est la caractéristique de A. $\ker(\varphi)$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$, $\ker(\varphi) = \{n \in \mathbb{Z};\ n \times 1_A = 0_A\}$.
2. $\mathbb{Z}/(m)$ (autrement dit $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ même remarque que précédement) s'identifie alors à un sous-anneau de A. (C'est le plus petit sous-anneau de A c'est à dire $\ker(\varphi) = m \cdot \mathbb{Z}$ car l'idéal principal (m) n'est autre que $m \cdot \mathbb{Z}$). On a $m \cdot a = (m \cdot 1_A) \cdot a = 0 \cdot a = 0$.
3. Si A est intègre, sa caractéristique est soit 0, soit un nombre premier p (en effet $\mathbb{Z}/(m)$ est un sous-anneau de A donc aussi intègre car si q divise m $m = a\,q$, ainsi modulo m : $\bar{a}\,\bar{q} = \bar{0}$ d'où $\bar{a} = 0$ ou $\bar{q} = 0$ c'est à dire m divise q ; ainsi $q = \pm 1$ ou $q = \pm m$) Dans ce dernier cas l'application σ: $a \mapsto a^p$ est un morphisme d'anneau (injectif) de A dans A (le morphisme de Frobenius). En effet on a bien pour tout $a, b \in A$, $\sigma(a\,b) = (a\,b)^p = a^p b^p = \sigma(a)\sigma(b)$ et aussi $\sigma(1) = 1$ de plus $\sigma(a+b) = (a+b)^p = \sum_{i=1}^{p} C_i^p a^i b^{p-i}$, dans cette somme pour tout $i, 1 \leqslant i \leqslant p-1$, C_i^p est divisible par p, donc $1 \leqslant i \leqslant p-1$, $C_i^p a^i b^{p-i} = 0$, il reste donc $\sigma(a+b) = a^p + b^p = \sigma(a) + \sigma(b)$.

Exemple 29.53.

1. $\mathbb{Z}$ est un anneau de caractéristique nulle. $\text{Caract}(\mathbb{Z}) = 0$
2. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un anneau de caractéristique n, pour $n \geqslant 2$. $\text{Caract}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = n$.
3. $\mathbb{R}$ est un anneau de caractéristique nulle. $\text{Caract}(\mathbb{R}) = 0$.

29.1.9.5 Eléments associés

Définition 29.54. *Deux éléments* $x, y \in A$ *sont dits* ***associés*** *ssi il existe* $\varepsilon \in A^*$ *[groupe des éléments inversibles de A] tel que* $y = \varepsilon \cdot x$ *autrement dit* $x = \varepsilon^{-1} \cdot y$.

Proposition 29.55.

i. L'association définie précédement est une relation d'équivalence.

ii. Si l'anneau commutatif A est intègre x et y sont associés ssi $x\,A = y\,A$.

Exemple 29.56. Dans l'anneau $(\mathbb{Z}; + ; \cdot)$ a, b sont associés si et seulement si $a = \pm\, b$. Notons $\sim$ la relation d'équivalence ainsi définie. $2 \sim -2$ et $2 \sim 2$. $-3, 3$ sont associés dans $\mathbb{Z}$.

29.1.10 Anneau intègre

Dans un anneau considérons l'équation du type $a\ x = a\ y$. En général (même si $a \neq 0$), on ne peut pas simplifier par a et en déduire $x = y$. Remarquons toutefois que cette équation équivaut à : $a(x - y) = 0$.

Définition 29.57. *Un anneau $(A, +, \cdot)$ est dit intègre ssi $A \neq \{0\}$ et :*

- *il n'admet pas de diviseur de 0,*
- *Autrement dit : $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$,*
- *ou encore : $a \neq 0$ et $b \neq 0 \Rightarrow a \cdot b \neq 0$*

Avertissement 29.58.

1. Attention, que l'anneau soit intègre ou pas, on a vu que dans un anneau quelconque $a \cdot 0_A = 0_A$!
2. Conclusion dans un anneau intègre, il y a équivalence : $(a \cdot b = 0) \Leftrightarrow (a = 0 \text{ ou } b = 0)$

Proposition 29.59.

1. Si un anneau $(A, +, \cdot)$ est intègre alors tout élément de $A \neq 0$ est simplifiable : $x \neq 0$ et $x \cdot a = x \cdot b \Rightarrow a = b$, (bien que x ne soit pas forcément inversible).

2. Un sous-anneau d'un anneau intègre est intègre.

3. Si A est intègre et si caractéristique$(A) = p \neq 0$ alors p est un nombre premier.

Démonstration.

1. $(x \cdot a = x \cdot b) \Rightarrow (x \cdot a - x \cdot b = 0_A) \Rightarrow (x \cdot (a - b) = 0_A) \Rightarrow (a - b = 0_A \text{ ou } x = 0_A) \Rightarrow (a = b)$.
2.
3. si $p = q \times r$ avec $q, r \in \mathbb{N}$, q, r premiers entre eux, caract$(A) = p$.
   $0_A = p \times 1_A = (q \times r) \times 1_A = (q \times 1_A) \times (r \times 1_A)$????
   A est intègre $\Rightarrow q \times 1_A = 0_A$ ou $r \times 1_A = 0_A$
   $\Rightarrow q \in \ker(f)$ ou $r \in \ker(f) = p\,\mathbb{Z}$????
   $\Rightarrow p | q$ ou $r | q$ comme $p = q \times r$, on a $p = q$ ou $p = r$ ainsi p est premier □

Proposition 29.60. *Si A est intègre de caractéristique $p \neq 0$ alors $(x + y)^p = x^p + y^p$.*

Exemple 29.61.

- $(\mathbb{Z}; + ; \times)$ est un anneau intègre.
- $(\mathbb{R}; + ; \times)$ est un anneau intègre.
- $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est un anneau intègre si et seulement si n est premier.
  exemple : $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$ n'est pas intègre puisque 6 n'est pas premier. Contre-exemple : $\bar{2} \times \bar{3} = \bar{6}$
  donc $\bar{2} \times \bar{3} = \bar{0}$, $\bar{2}$ et $\bar{3}$ sont des diviseurs de $\bar{0}$.
- L'anneau $\mathcal{M}_n$ des matrices carrées n'est pas intègre : contre-exemple
  $\begin{pmatrix} -a & a \\ a & -a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- Tout corps est un anneau intègre, mais la réciproque n'est pas vraie. Voir remarque CTES page 16, envoi 1. Par contre tout anneau intègre peut se « plonger » dans un corps. Exemple : la construction du corps des fractions.

29.1.11 Idéal d'un anneau

Note 29.62. Idéal=division d'une partie M d'un anneau A par A ??? On ne peut pas définir de division directement sur les éléments donc on le fait sur des parties de A : $\frac{M}{A} = \{a \in A; \forall m \in M;\ a\ m \in M\}$. Utilité ? Trouver un ensemble I tel que pour l'anneau A; A/I soit aussi un anneau. Rappel : $A/I = \{\bar{x}\,;\, x \in A\}$, $\bar{x} = \{y \in A;\, x \cdot y \in I\}$. L'idéal c'est la seule manière de s'assurer que le produit $\bar{x} \cdot \bar{y}$ soit toujours dans A. On veut reproduire l'effet de $n\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}$ où $n\mathbb{Z}$ agit comme un idéal et permet à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ d'être aussi un anneau.

Idéal inverse de la multiplication inverse d'une partie Q d'un anneau A par l'anneau (A). On a montrer que la multiplication n'admet pas d'opération inverse, toutefois l'idéal est là pour représenter cette notion; les remarques précédentes 213 bis (livre I volume 2), on montrées que certains cas triviaux sont à exclure, c'est pour cela que l'on définira : les anneaux intègre et principaux. On définit alors une division d'un ensemble par l'anneau A.

29.1.11.1 Idéal à gauche, à droite et bilatère

Définition 29.63. *Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau, $I \subset A$ et $I \neq \varnothing$. $(I, +, \cdot)$ est un **idéal à gauche [resp. à droite]** de $(A, +, \cdot)$ ssi :*

- $\forall x; y \in I, x - y \in I$ *(autrement dit $(I, +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$) ou $(I, +)$ stable pour $+$.*
- $\forall a \in A$ *et* $\forall x \in I, a \cdot x \in I, [x \cdot a \in I]$*, i.e. $A\,I \subset I, [I\,A \subset I]$. Il contient tous les produits d'un élément de A par un de ses éléments [ou d'un de ses éléments par un élément de A] I est absorbant à droite [à gauche] expression à vérifier.*

Définition 29.64. *Un ensemble est dit **idéal bilatère** ou simplement **idéal** de $(A, +, \cdot)$ ssi c'est un idéal à droite et à gauche.*

Remarque 29.65.

1. Attention à la définition du sous-anneau ! ici un idéal est un sous-anneau, mais dans certains cours, on impose au sous-anneau de contenir un élément neutre, dans ce cas bien que l'idéal I soit stable pour $+, \cdot$, ce n'est pas un sous-anneau de $(A, +, \cdot)$, puisqu'il ne peut contenir 1_A. Attention, si c'est le cas la réciproque est fausse : $\mathbb{Z}$ est un anneau de $\mathbb{R}$, mais $\mathbb{Z}$ n'est pas un idéal de $\mathbb{R}$.
2. Est-ce important que l'idéal ait une structure d'anneau ? Non, mais il faut simplement faire remarquer que suivant la définition d'un anneau, l'idéal peut-être un anneau.
3. Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau et B une partie de A, l'ensemble des $x \in A$, tels que $x \cdot b = 0, [b \cdot x = 0]$ pour tout $b \in B$ est un idéal à gauche [resp. à droite] de $(A, +, \cdot)$ dit annulateur à gauche [à droite] de B.
4. On peut construire une c.n.s. pour qu'un idéal soit un corps; c'est que les seuls idéaux de K soient $\{0\}$ et K.
5. Dans un anneau commutatif tous les idéaux sont bilatères.

Exemple 29.66.

1. $n\mathbb{Z}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$.
2. Dans un anneau A, il existe au moins 2 ideaux bilatères $\{0\}$ et A.

Proposition 29.67. *Soit $I \subset A$, pour que $I \neq \varnothing$ soit un idéal de A, il faut que :*

- $\forall x; y \in I \Rightarrow x + y \in I$
- $\forall a \in A, \forall x \in I \Rightarrow x \cdot a \in I; a \cdot x \in I; I\,A = I; A\,I = I$*, I est absorbant ???*

Remarque 29.68. Vérifier si on peut utiliser le terme absorbant. C'est comme I absorbant : seulement absorbant est réservé à une l.c.i..

Proposition 29.69. *Si un idéal I à gauche (resp. droite) d'un anneau $(A,+,\cdot)$ contient soit l'identité soit un élément inversible (autrement dit une unité) de $(A,+,\cdot)$, alors $I=A$.*

Démonstration.

1. Par définition $I\subset A$, montrons que $A\subset I$. $\forall a\in A, a=a\cdot 1_A \Rightarrow a\in I$.
2. $1_A=u^{-1}\cdot u$ donc $1_A\in I$ et $I=A$. □

Théorème 29.70. *Soient I et J 2 idéaux d'un anneau A tel que $I\subset J$ alors :*

- *J/I est un idéal de A/I,*
- *$A/J\approx(A/I)/(J/I)$ ($\approx$ « est isomorphe à »).*

Exemple 29.71. $A=\mathbb{Z}; I=6\mathbb{Z}=\{\dot0;\dot1;\dot2;\dot3;\dot4;\dot5\}; J=3\mathbb{Z}=\{\bar0,\bar1;\bar2\}; A/J=?$

Diagramme :
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\varphi_J} & \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \\ {\scriptstyle\varphi_I}\downarrow & \overset{\overline{\varphi_J}}{\nearrow} & \uparrow\overline{\varphi_J}=? \\ \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} & \xrightarrow{\varphi_{J/I}} & (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})/(3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})=? \end{array}$$

$$\varphi_J:\left|\begin{array}{ccc} x & \mapsto & x+3\mathbb{Z} \end{array}\right. \quad \varphi_I:\left|\begin{array}{ccc} x & \mapsto & x+6\mathbb{Z} \end{array}\right. \quad \overline{\varphi_J}:\left|\begin{array}{ccc} \dot x & \mapsto & \bar x \end{array}\right.$$

$\ker\overline{\varphi_J}=\{\dot x\in\mathbb{Z}/6\mathbb{Z};\overline{\varphi_J}(\dot x)=\bar0\}=\{0+6\mathbb{Z};3+6\mathbb{Z}\}=\{\dot0;\dot3\}=3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

d'où $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})/(3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})=\big\{\{\dot0;\dot3\};\{\dot1;\dot4\};\{\dot2;\dot5\}\big\}=\{\tilde0;\tilde1;\tilde2\}\simeq\{\bar0;\bar1;\bar2\}$.

Proposition 29.72. *(A placer !) Un élément a non et non inversible de A est irréductible si et seulement si pour toute écriture $a=u\,v$, l'un des éléments et un seul (soit u soit v) est une unité et l'autre est associé à a.*

29.1.11.2 Intersection, somme d'ideaux et idéal engendré

Proposition 29.73. *Soit $(I_k)_{k\in K}$, un famille d'idéaux à gauche de l'anneau A.*

i. $\bigcap_{i\in I}H_i$ est un idéal à gauche de A,

ii. L'ensemble $\sum_{k\in K}I_k$ des éléments $x\in A$ qui sont somme finie $x_{i_1}+...+x_{i_p}$ d'éléments de $\bigcup_{k\in K}I_k$, est un idéal à gauche de A. C'est le plus petit idéal à gauche de A contenant I_k pour tout $k\in K$. En particulier, la somme $I+J=\{x+y;x\in I,y\in J\}$ de deux idéaux à gauche I et J de A, est un idéal à gauche de A.

Note 29.74. Donner plus de cohérence, certaines définitions sont énoncées plusieurs fois. Idéa engendré par A : l'ensemble des sommes de multiplications à gauche et à droite, ou les deux, des éléments de A. (Est-ce une définition ou simplement une remarque ??)

Corollaire 29.75. *Soit A un anneau unifère. Pour toute partie non vide X de A, il existe un plus petit idéal à gauche I de A contenant X, à savoir l'intersection de tous les idéaux à gauche de A contenant X. De plus, I est l'ensemble des éléments de A de la forme $a\,x_1+...+a_px_p$ où $p\in\mathbb{N}^*$, $x_1,...,x_p\in X$ et $a_1,...,a_p\in A$.*

Définition 29.76. *Dans un anneau unifère (pourquoi unifère ?) A, ce plus petit idéal à gauche de A contenant une partie $X\neq\varnothing$ de A est appelé l'idéal à gauche engendré par X.*

Remarque 29.77. Il existe des énoncés analogues pour les idéaux à droite, d'où une notion d'idéal à droite egendré par X, dont les éléments sont de la forme $x_1a_1+...+x_pa_p$.

Il en va de même pour les idéaux bilatères. L'idéal bilatère engendré par X est l'ensemble des $a_1x_1b_1+...+a_px_pb_p$ où $p\in\mathbb{N}^*, x_1,...,x_p\in X, a_1,...,a_p,b_1,...,b_p\in A$. Si I,I' sont deux idéaux à gauche (resp. à droite, bilatères), l'idal à gauche (resp. à droite, bilatère) engendré par $I\cup I'$ est $I+I'=\{x+x';x\in I,x'\in I'\}$.

Cas où A n'est ni commutatif, ni unitaire voir CTES Exercice 2.1 page 16, les éléments sont de la forme $x = \sum_{a\in I} a + \sum_{a\in I,\alpha_1\in A} \alpha_1\cdot a + \sum_{a\in I,\alpha_2\in A} a\cdot\alpha_2 + \sum_{a\in I;\alpha_2,\alpha_3\in A} \alpha_2\cdot a\cdot\alpha_3$.

Proposition 29.78. *(Déjà comprise dans la remarque ci-dessus) L'intersection d'une famille d'idéal d'anneaux est un idéal d'anneau : Si $(H_i)_{i\in I}$ est une famille d'idéaux de $(A,+,\cdot)$ alors $\bigcap_{i\in I} H_i$ est un idéal.*

Définition 29.79. *(Déjà comprise dans la remarque ci-dessus) Soit P une partie de A, on appelle **idéal engendré** par P, le plus petit idéal (au sens de l'inclusion) de A contenant P.*

Proposition 29.80. *(Déjà comprise dans la remarque ci-dessus) Soit I_P l'idéal engendré par P alors $I_P = \bigcap_{P\subset H} H$, H idéal de A.*

Proposition 29.81. *(Déjà comprise dans la remarque ci-dessus) Plus généralement, si x_1, ..., x_n sont les (?) éléments de A, le plus petit idéal contenant A est : $\sum_{i=1}^n A\cdot x_i = \{\sum_{i=1}^n a_i\cdot x_i; \forall i, a_i\in A\}$.*

Démonstration. CTES, mais dans le cas où A est un anneau commutatif unitaire. □

Proposition 29.82. *Deux éléments associés engendrent le même idéal.*

29.1.11.3 Produit d'idéaux

Proposition 29.83. *Si I, J sont deux idéaux alors $IJ = \{\sum_{\text{finie}} x_i\cdot y_i; x_i\in I, y_i\in J\}$ est un idéal de A contenu dans $I\cap J$.*

29.1.11.4 Idéal principal d'un anneau commutatif

Définition 29.84. *Un **idéal** I d'un anneau commutatif A est dit **principal** ssi il peut être engendré par un seul élément $x\in A$, on le note (x).*

Proposition 29.85.

1. *Si I est un idéal principal, $\exists\alpha\in A$ tel que $I=\alpha A$.*
2. *Réciproquemet soit $x\in A$, $Ax = \{a\cdot x; a\in A\}$ est un idéal de A noté (x), c'est l'idéal principal engendré par x.*

Remarque 29.86. Important ! On vient de montrer que les idéaux principaux sont exactement les ensembles mA avec $m\in A$.

Exemple 29.87.

1. (0) et (1) sont des idéaux, avec en particulier $(1)=A$.
2. Les idéaux de $(\mathbb{Z};+;\times)$ sont donc les ensembles $n\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{Z}$, i.e. tous les sous-groupes de $\mathbb{Z}$.
3. Tous les idéaux de l'anneau $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ sont principaux.

29.1.11.5 Idéal maximal

Note 29.88. La définition d'un ensemble maximal n'est pas propre aux idéaux, c'est donc un rappel.

Définition 29.89. *Un **idéal** M d'un anneau A est **maximal** ssi :*
$M\subset I\subset A$, I idéal de $A\Rightarrow I=M$ ou $I=A$ ou si I est un idéal $M\subset I, M\neq I\Rightarrow I=A$.

Proposition 29.90. *(Condition nécessaire et suffisante)*
I maximal $\Leftrightarrow\forall x\in A\backslash I, \begin{cases}\exists a\in A\\ \exists i\in I\end{cases}; i+ax=1$.

Démonstration. Voir fiche 7 exercice 8, pour la démonstration. □

Proposition 29.91. *Un idéal I d'un anneau commutatif unitaire A est maximal si et seulement si l'anneau quotient A/I est également un corps.*

Démonstration. CTES M51M page 2 envoi (2). □

Exemple 29.92. Soit p premier alors $I = p\,\mathbb{Z}$ est un idéal maximal de $\mathbb{Z}$. Réciproquement : $n\mathbb{Z}$ est maximal dans $\mathbb{Z}$ si n est premier, on a donc équivalence.

29.1.11.6 Idéal premier d'un anneau commutatif

Définition 29.93. *Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau commutatif, On appelle **idéal premier** de l'anneau $(A, +, \cdot)$, tout idéal I tel que $\forall x, y \in A, x \cdot y \in I \Rightarrow x \in I$ ou $y \in I$.*

Remarque 29.94. (Ce qui revient à dire :) I est premier si et seulement si A/I est un anneau intègre.

Corollaire 29.95. *Tout idéal maximal est un idéal premier.*

Remarque 29.96. La réciproque est fausse. Par exemple : $\{0\}$ est un idéal premier de $\mathbb{Z}$, mais il n'est pas maximal, $\{0\} \subset 2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/\{0\} = \mathbb{Z}$ $(a \equiv b[0] \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow a - b \in \{0\})$ qui n'est pas un corps (tout élément $\neq 0$ n'est pas inversible).

29.1.11.7 Idéaux étrangers ou comaximaux

Définition 29.97. *On dira que 2 idéaux I et J d'un anneau A sont **étrangers** ou **comaximaux** si et seulement si $I + J = A$.*

Exemple 29.98.

1. Pour $A = \mathbb{Z}$, (a) et (b) sont étrangers si et seulement si a et b sont premiers entre eux par le théorème de Bézout puisque dans ce cas, on peut trouver α, β tels que $\alpha \times a + \beta \times b = 1 \Rightarrow 1 \in (a) + (b)$. Donc $(a) + (b) = A$. $8\mathbb{Z}$ et $15\mathbb{Z}$.
2. Dans $K[X; Y]$, les idéaux (X) et (Y) ne le sont pas.

29.2 Anneau factoriel

Section à mettre avant anneau principal et divisibilité.

C'est difficile de montrer qu'un anneau est factoriel. On définit donc des classes d'anneaux qui seront factoriels : Anneaux principaux, anneaux euclidiens.

Définition 29.99. *Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau intègre, On dit que $(A, +, \cdot)$ est un **anneau factoriel** ssi :*

- *Tout élément $a \neq 0$ de A et non inversible admet une factorisation de la forme $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_m, m \geqslant 0$ et p_j irréductibles.*
- *Si a admet une autre factorisation $a = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n, n \geqslant 0$ alors $m = n$ et il existe une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que q_j et $p_{\sigma(j)}$ soient associés : $q_j = \varepsilon_j \cdot p_{\sigma(j)}$ où $1 \leqslant i \leqslant n$ et $\varepsilon_j \in A^*$.*

Remarque 29.100. Dans un anneau factoriel A, on a : $a = \varepsilon \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r$ où $\varepsilon \in A^*$ et p_i est irréductible. Si l'on choisit un représentant dans chaque classe « association » des éléments irréductibles, la factorisation est unique. Exemple : Dans $\mathbb{Z}$ $\bar{p} = \{-p; p\}$ $6 = 2 \times 3 = (-1) \times 2 \times (-3)$.

Exemple 29.101.

1. $\mathbb{Z}$ est factoriel (par le théorème fondamental de l'arithmétique)

2. $A = \mathbb{Z}[i\sqrt{5}] = \mathbb{Z} + i\sqrt{5}\mathbb{Z}$, $(i^2 = -1)$ n'est pas factoriel : Montrer que $(1 + i\sqrt{5})(1 - i\sqrt{5})$, montrer que 2, 3, $1 + i\sqrt{5}$, $1 - i\sqrt{5}$ sont irréductibles dans A, mais que par exemple $1 + i\sqrt{5}$ n'est associé ni à 2, ni à 3 (utiliser pour cela que $\forall a = \lambda + \mu i\sqrt{5} \in A$, le carré du module $|a|^2 = \lambda^2 + \mu^2 5 \in \mathbb{N}$.

Proposition 29.102. *Dans un anneau factoriel A, un élément p non nul est irréductible ssi l'idéal $p \cdot A$ est premier.*

Proposition 29.103. *Les diviseurs d de $a \in A$ sont donnés (à association près) par $d|a \Leftrightarrow d \sim p_1^{d_1} \cdot p_2^{d_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{d_r}$ où $0 \leqslant d_i \leqslant a_i, \forall i$??????????????*

29.3 Anneau principal et théorème de Bezout

Définition 29.104. *Un **anneau commutatif** est dit **principal** ssi :*

- *il est intègre,*
- *tous ses idéaux sont principaux.*

Exemple 29.105.

1. $\mathbb{Z}$ est principal. Tout idéal est de la forme $I = m\,\mathbb{Z}; m \in \mathbb{N}$. (preuve CTES Structure algébrique envoi 2 page 3).
2. Soit $\mathbb{K}$ un corps, l'anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est principal.

Proposition 29.106. *Si A est principal, toute suite croissante d'idéaux $I_0 \subset I_1 \subset I_2 \subset \ldots$ est stationnaire : $\exists k \in \mathbb{N}; I_n = I_k, \forall n \geqslant k$.*

Théorème 29.107. *(... de Bezout)*
Si a et b sont 2 éléments d'un anneau principal A, les conditions suivantes (i) et (ii) sont équivalentes :

i. a et b sont premiers entre eux,

ii. il existe $x, y \in A$ tels que $a\,x + b\,y = 1_A$ (Relation de Bezout).

Démonstration. LM3-M51M CTE page 9 2ème envoi. □

Note 29.108. Je ne trouve pas la définition d'éléments premiers entre eux dans mon résumé. Dans le cours CTE LM3-M51M page 9 il les définisse ainsi : Si deux éléments ont un pgcd égal à 1_A ou n'importe quel inversible, on dit qu'ils sont premiers entre eux.

Remarque 29.109. Plus généralement, dans un anneau principal A si un pgcd de n éléments a_1, a_2, ..., a_n est inversible, on dit que a_1, a_2, ..., a_n sont premiers entre eux. Le théorème de Bezout se généralise alors sous la forme :
a_1, a_2, ..., a_n sont premiers entre eux si et seulement si il existe n éléments $x_1; \ldots; x_n \in A$ tels que $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 1_A$. Démonstration similaire au cas n=2.

Lemme 29.110. *(... de Gauss)*
Dans un anneau principal, si a et b sont premiers entre eux et si a divise le produit $b \cdot c$ alors a divise c.

Proposition 29.111. *Tout anneau principal est factoriel, (principal) $\Rightarrow$ (factoriel).*

29.3.1 Divisibilité dans les anneaux intègres

Remarque 29.112.

1. Dans un anneau intègre, le quotient lorsqu'il existe est unique.

2. Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau intègre, si $a \in A$, on note $(a) = A \cdot a = \{x \cdot a; x \in A\}$ l'idéal principal engendré par a. Soit $b \in A$, remarquons que $(a) \subseteq (b) \Leftrightarrow a \in (b) \Leftrightarrow \exists x \in A, a = x \cdot b$ autrement dit que b divise a dans A ou que a est un multiple de b dans A.

Exemple 29.113. b divise 1 ssi $b \in A^*$.

Définition 29.114. *On dit que a divise strictement b ssi a non unitaire et a n'est pas associé à b.*

Proposition 29.115. *Dans un anneau intègre. Si a divise b et b divise a, c'est à dire $(a) = (b)$, il existe $u \in A^*$ tel que $a = u \cdot b$, autrement dit a et b sont associés dans A.*

Exemple 29.116. ?

29.3.2 Éléments irréductibles

Définition 29.117. *Un élément a de A est dit* ***irréductible*** *(dans A) ssi $a \notin A^*$ et $\forall b, c \in A$; $a = b \cdot c$ avec $b, c \in A \Rightarrow b \in A^*$ ou $c \in A^*$. Autrement dit c'est un élément non inversible (unitaire) qui ne possède pas de diviseur stricts, i.e qui ne possède comme diviseur que des éléments inversibles (unitaires) et ses éléments associés, ou encore ssi dans sa décomposition en produit de deux facteurs au moins un des facteurs est inversible (unitaire).*

Exemple 29.118. Dans $\mathbb{Z}$, les éléments irréductibles sont les $\pm p$, avec p premier, 0 n'est pas irréductible.

Définition 29.119. *On dit qu'un élément est réductible ssi il est non unitaire et non irréductible.*

Exemple 29.120.

1. 5 est irréductible car il ne possède comme diviseurs que les éléments unitaires 1 et -1.
2. 12 est réductible car $12 = 3 \times 4$ et $3, 4$ ne sont pas unitaires.

29.3.3 PGCD (DMTD) et PPCM (MDTM)

Note 29.121. Il vaut mieux parler de DMTD «Diviseur Multiple de Tout Diviseur». De même, ne faudrait-il pas remplacer PPCM par MDTM «Multiple Diviseur de Tout Multiple».

Avertissement 29.122. Dans ce qui suit l'anneau peut ne pas être principal. Peut-être que le fait d'imposer à A d'être principal apporte de nouvelles possibilités comme :

- l'intégrité,
- l'énoncé du théorème de Bezout page 215 bis (livre I),
- le PGCD et le PPCM ne sont pas nécessairement uniques. Dans un anneau principal, il sont définis à un facteur inversible près. CTES page 7 envoi 2. Structure algébrique. Résultat obtenu pour un anneau principal.

Définition 29.123. *On appelle PGCD de deux éléments a et b d'un anneau A, s'il existe ! Un diviseur de a et b, multiple de tout autre diviseur commun à a et b.*

Remarque 29.124. On définit le PGCD de n éléments a_1, a_2, ..., a_n d'un anneau par récurrence. PGCD(a_1; ...; a_n) = PGCD(PGCD(a_1; ...; a_{n-1}); a_n). Il vaut mieux parler de DMTD «Diviseur Multiple de Tout Diviseur».

Définition 29.125. *On appelle PPCM de deux éléments a et b d'un anneau A, s'il existe ! Un multiple m de a et b, diviseur de tout autre multiple commun à a et b.*

Remarque 29.126. On définit le PPCM de n éléments a_1, a_2, ..., a_n d'un anneau par récurrence. PPCM(a_1; ...; a_n) = PPCM(PPCM(a_1; ...; a_{n-1}); a_n). Il vaut mieux parler de MDTM « Multiple Diviseur de Tout Multiple».

Avertissement 29.127. Voir CTE page 8 envoi 2. La relation « est multiple de » n'est pas une relation d'ordre sur A, mais sur $A/\mathcal{R}$ (où $\mathcal{R}$: $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow (a) = (b)$. Dans le cas d'un anneau principal ??? relire livre I page 218 bis pour comprendre !

29.3.4 Morphisme d'anneaux

Sous quelles conditions peut-on identifier deux anneaux ?

Définition 29.128. *Soit $(A, +, \cdot)$ et $(A', \oplus, \odot)$ deux anneaux. Une application $A \to A'$ est un morphisme d'anneau ssi $\forall a, b \in A$, $f(a+b) = f(a) \oplus f(b)$, $f(a \cdot b) = f(a) \odot f(b)$.*

Exemple 29.129. π: $\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ x & \mapsto & \bar{x} \end{array}\right.$ est un homéomorphisme de groupe, puisque $\pi(x + y) = \pi(x) \oplus \pi(y)$ et $\pi(x \cdot y) = \pi(x) \odot \pi(y)$.

Proposition 29.130. *Soit $(A, +, \cdot)$ et $(A', \oplus, \odot)$ deux anneaux. Une application $A \to A'$ est un morphisme d'anneau ssi f est un morphisme du groupe $(A, +)$ sur le groupe $(A, \oplus)$ et si $\forall a$, $b \in A$, $f(a \cdot b) = f(a) \odot f(b)$.*

Remarque 29.131. Dans le cas d'un anneau unitaire, si f est un morphisme d'anneau $f(1_A) = 1_{A'}$, $f(a \times 1) = f(a) \times f(1)$, $f(a) = f(a) \times f(1)$

Définition 29.132. *Un **isomorphisme d'anneau** est un morphisme d'anneau bijectif.*

Définition 29.133. *Endomorphisme $A = A'$.*

Définition 29.134. *Deux anneaux A et A' sont isomorphes ssi il existe au moins un isomorphisme $f: A \to A'$.*

Remarque 29.135. Dans ce cas, on ne peut plus distinguer de part les propriétés de leurs lois : toute propriété vraie sur l'un sera vraie pour l'autre ssi on ne prend en compte que ces deux lois. On peut donc essayer de classer les anneaux modulo un isomorphisme.

Proposition 29.136. *Soit $f: A \to B$ un homomorphisme d'anneaux*

i. *Si A, B sont unifères et si $f(1_A) = 1_B$ alors $f(A^*) \subset f(B^*)$*

ii. *Si A_1 sous-anneau de A, alors $f(A_1)$ est un sous-anneau de B*

iii. *Si B_1 sous-anneau de B, alors $f^{-1}(B_1)$ est un sous-anneau de A*

iv. *En particulier $\ker(f) = f^{-1}(\{0\})$ est un sous-anneau de A et*

v. $\mathrm{Im}(f) = \{f(x); x \in A\}$ *est un sous-anneau de B.*

vi. *$f(0_A) = 0_{A'}$, $f(-x) = -f(x)$, $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$.*

vii.

viii. *Soit $f: A \to A'$ un morphisme d'anneau, I' un idéal bilatère (resp. à gauche ou à droite) de A' [I un idéal bilatère (resp. à gauche ou à droite) de A] alors :*

- *$f^{-1}(I')$ est un idéal bilatère (resp. à gauche ou à droite) de A contenant $\mathcal{N}(f)$ qui est un idéal bilatère (resp. à gauche ou à droite) de A.*
- *$f(I)$ est un idéal bilatère du sous-anneau $f(A)$ de A' et par conséquent un idéal bilatère de A' si f est surjectif.*

ix. *Si $f: A \to A'$ est un morphisme d'anneaux.* $\mathrm{Ker}(f) = \{a \in A; f(a) = 0\}$ *est un idéal bilatère de A.*

Exemple 29.137. (Est-ce bien sa place ?) $A=\{a+i\,b; a,b\in\mathbb{Z}\}=\mathbb{Z}+i\,\mathbb{Z}$ alors A est un sous-anneau de $\mathbb{C}$. On l'appelle l'anneau des entiers de Gauss. Quels sont les éléments inversibles de A ? Quelles sont les unités de A : $z=a+i\,b\in A$ est inversible $\leftrightarrow A^*=\{1;-1;i;-i\}$.

29.3.4.1 Prolongement isomorphe d'un anneau dans un anneau unitaire

Proposition 29.138. *Etant donné un anneau $(A,+,\cdot)$, il existe un anneau unitaire $(A_u,\oplus,\odot)$ tel que A soit isomorphe à une partie B de A_u.*

Note 29.139. Morphisme de Frobenius $\sigma: x\mapsto x^p$.

29.3.5 Anneau quotient

Proposition 29.140. *Soit $(A,+,\cdot)$ un anneau, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence dans A, I la classe de 0 et si $\mathcal{R}$ est compatible avec les lois de A :*

i. alors I est un idéal bilatère de $(A,+,\cdot)$.

ii. La relation $x\mathcal{R}y$ (autrement dit $\bar{x}=\bar{y}$) équivaut à $x-y\in I$. Rappel : en utilisant la terminologie des ensembles quotients, on dit que x et y sont congrus modulo I.

iii. La classe de tout élément x de A est notée $x+I$ (i.e. $\bar{x}$), c'est l'ensemble des éléments de la forme $x+y$ où $y\in I$.

Réciproquement

Proposition 29.141. *Soit $(A,+,\cdot)$ un anneau, I un idéal bilatère de A et la relation binaire $\mathcal{R}$ définie par $\forall x,y\in A, x\mathcal{R}y\Leftrightarrow x-y\in I$,*

1. *est une relation d'équivalence dans A compatible avec les lois de A,*
2. *d'autre par $I=\overline{0_A}$.*

Remarque 29.142. On vient de montrer que les seuls ensembles quotients définis par une loi compatibles avec les lois de l'anneau sont les ensembles quotients A/I.

Définition 29.143. *Soient $(A,+,\cdot)$ un anneau, I un idéal bilatère de A et $\mathcal{R}$ une relation compatible avec les lois $+$ et $\cdot$ telle que $x\mathcal{R}y\Leftrightarrow x-y\in I$. On note A/I l'ensemble quotient $A/\mathcal{R}$.*

Remarque 29.144. On peut donc définir les lois quotients $\bar{+}$ et $\bar{\cdot}$ à partir de celle de A :

$\bar{+}:\left|\begin{array}{ccc} A/I\times A/I & \to & A/I \\ (\bar{x}\,,\bar{y}) & \mapsto & \overline{x+y}\end{array}\right.$, $\bar{\cdot}:\left|\begin{array}{ccc} A/I\times A/I & \to & A/I \\ (\bar{x}\,,\bar{y}) & \mapsto & \overline{x\cdot y}\end{array}\right.$. Lois qui vont permettre de définir sur A/I une structure d'anneau.

Proposition 29.145. *Soit I un idéal d'un anneau A. Sur le groupe additif quotient A/I, il existe une unique multiplication qui fait de A/I un anneau. A combiner avec 29.79 (livre I). Enoncé à revoir ! Peut-être faut-il préciser unitaire ?*

Proposition 29.146. *L'ensemble quotient $(A/I,\bar{+},\bar{\cdot})$ est un anneau unitaire. $\bar{1}$ est l'élément neutre de A/I.*

Définition 29.147. *Soit $(A,+,\cdot)$ un anneau, I un idéal bilatère de A. L'anneau $(A/I,\bar{+},\bar{\cdot})$ est appelé **anneau quotient**.*

Remarque 29.148. Soit A un anneau, on sait qu'il existe au moins 2 idéaux A et $\{0_A\}$.

- $A/A=\{\bar{x}=x+A\}=\{A\};\forall x\in A,\bar{x}=A$. ????
- $A/\{0_A\}=\{\bar{x}=x+\{0_A\}\}=;\forall x\in A,\bar{x}=\{x\}$. ????

Proposition 29.149. *Soit $(A,+,\cdot)$ un anneau, I un idéal bilatère de A.*

i. La surjection canonique $\varphi:\left|\begin{array}{ccc} A & \to & A/I \\ a & \mapsto & \bar{a}\end{array}\right.$ *est un morphisme d'anneau, tel que* $I=\ker(\varphi)$

ii. Si de plus A est commutatif alors A/I est commutatif.

Exemple 29.150. Si $A=\mathbb{Z}$, $I=(n)$, $(n\in\mathbb{Z})$, l'anneau quotient A/I est l'anneau des entiers modulo n. La notion d'anneau quotient généralise bien les proprités des anneaux quotients des entiers.

Remarque 29.151. Si A est un anneau intégre alors A/I l'anneau quotient défini par l'idéal I n'est pas nécessairement intègre.

Exemple 29.152.

- $\mathbb{Z}$ est un anneau intègre.
- $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z};\mathbb{Z}/3\mathbb{Z};...;\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier sont intègres (évident puisque p n'est pas le produit de 2 autres nombres autre que 1 et lui-même).

  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$: | $\times$ | $\bar{1}$ | / | $\bar{1}$ | $\bar{1}$ | / | $\bar{1}$ | $\bar{1}$ | ; $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ | $\times$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | / | $\bar{1}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | / | $\bar{2}$ | $\bar{1}$ | $\bar{1}$ |.
- mais $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ n'est pas intègre puisque $6=3\times 2$.

29.3.6 Factorisation canonique d'un morphisme d'anneaux commutatifs

Remarque 29.153. Le noyau d'un morphisme d'anneau φ est un ideal de l'ensemble de définition de φ. On peut donc construire l'anneau quotient $(A/\ker(\varphi),\bar{+},\bar{\cdot})$

Proposition 29.154. *Soit $(A,+,\cdot)$ et $(A',\oplus,\odot)$ deux anneaux commutatifs et f un morphisme de $A\to A'$. La relation dans A définie par $\forall x,y\in A, x\mathcal{R}y\Leftrightarrow f(x)=f(y)$ est une relation d'équivalence compatible avec $+$ et $\cdot$, puisque f est un morphisme d'anneaux. Soit B le noyau de f, B est un idéal de A et $A/\mathcal{R}=A/B$. $(A,\bar{+},\bar{\cdot})$ est un anneau commutatif. On a donc le schéma suivant :*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & A' \\ g\downarrow & & \uparrow j \\ A/B & \xrightarrow{\bar{f}} & f<A> \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & f(x) \\ g\downarrow & & \uparrow j \\ \bar{x} & \xrightarrow{\bar{f}} & \bar{f}(x)=f(x) \end{array}$$

avec $j=\mathrm{Id}_{f(A)}$ homomorphisme injectif, où $\bar{f}$ est un isomorphisme d'anneau de $A/B\to f<A>$. Tout morphisme se décompose de la manière suivante : $f=j\circ\bar{f}\circ g$.

Proposition 29.155. *Soit $(A,+,\cdot)$ et $(A',\oplus,\odot)$ deux anneaux commutatifs, f un morphisme de $A\to A'$, φ la surjection canonique de $A\to A/\mathrm{Ker}(f)$, j l'injection canonique de $\mathrm{Im}(f)\to A'$ alors : Il existe un et un seul morphisme d'anneau $\bar{f}:A/\mathrm{Ker}(f)\to\mathrm{Im}(f)$ tel que : $f=j\circ\bar{f}\circ\varphi$ et $\bar{f}$ est un isomophisme.*

Proposition 29.156. *Soit I un Idéal, I est premier $\Leftrightarrow$ A/I est intègre.*

Démonstration. Cours CTES licence de mathématiques exercice 3 chapitre 8. Propriété déjà notée page 214 en remarque 29.53 (livre 1). □

29.4 Théorème chinois

Note 29.157. Soit A un anneau, $I_1;I_2;...;I_n$ des idéaux de A et $\pi_i:A\to A/I_i$ la surjection canonique. On définit un morphisme d'anneaux surjectif :

$$\varphi: \left| \begin{array}{ccc} A/(\bigcap_{i=1}^{n} I_i) & \to & A/I_1 \times ... \times A/I_n \\ \bar{a} & \mapsto & (\pi_i(a)) \end{array} \right.$$

On peut alors généraliser le théorème des restes chinois dans $\mathbb{Z}$.

Théorème 29.158. *(théorème chinois) Soit A un anneau $I_1; ...; I_n$ des idéaux étrangers deux à deux alors le morphisme φ est un isomorphisme, de plus : $\bigcap_{i=1}^{n} I_i = I_1....I_n$.*

Note 29.159. En d'autres termes un système de congruences $x \equiv a_i (\text{mod } I_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, a une solution unique dans A modulo $(I_1; ...; I_n)$

Corollaire 29.160. *(Version classique) si $(m, n) = 1$ alors $\mathbb{Z}/m\,n\mathbb{Z} \approx \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.*

Démonstration. $A = \mathbb{Z}; I = m\mathbb{Z}; J = n\mathbb{Z}, I + J = m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = \text{pgcd}(m, n)\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \Rightarrow I \cap J = m\,n\mathbb{Z} = \text{ppcm}(m,\ n)\mathbb{Z}$. Remarque si (m,n)=1, le système $\left\{ \begin{array}{l} x \equiv a[m] \\ x \equiv b[n] \end{array} \right.$ admet une solution dans $\mathbb{Z}/m\,n\mathbb{Z}$. □

29.5 Anneau euclidien et division euclidienne

Note 29.161. C'est tout simplement un anneau sur lequel, on va pouvoir définir la division euclidienne ! À mettre juste après anneau principal et surtout avec section divisibilité et division.

Définition 29.162. *Soit $(A, +, \cdot)$ un **anneau** commutatif intègre, il est dit **euclidien** ssi il existe une fonction φ: $A\backslash\{0\} \to \mathbb{N}$ (appelée algorithme ou stathme euclidien ou encore norme)telle que $\forall a \in A$ et $\forall b \in A\backslash\{0\}, \exists q, r \in A$ avec $a = b\,q + r$ et $r = 0$ et $\varphi(a) \leqslant \varphi(b)$ ou $\varphi(r) < \varphi(b)$ et $r \neq 0$. Définition à revoir Bréal page 238, Dico puf page 276.*

Remarque 29.163. Pour qu'il y ait une division euclidienne sur l'anneau, il faudrait l'existence d'une relation d'ordre or ce n'est pas généralement le cas. φ est censé jouer ce rôle (commentaire personnel). Inutile après le rajout de la définition (1 livre I) ci-contre ou à modifier pour faire le lien avec la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$.

Proposition 29.164. *Tout anneau euclidien est principal, euclidien $\Rightarrow$ principal $\Rightarrow$ factoriel.*

Exemple 29.165.

1. $\mathbb{Z}$ est euclidien, on prend $\varphi(x) = |x|$.
2. Soit K un corps, l'anneau des polynômes $K[X]$ est euclidien, on prend $\varphi(P) = \deg(P)$.
3. $\mathbb{Z}[i]$ est euclidien : Considérons, $\mathbb{Z}[i] = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$, $(i^2 = -1)$ (anneau des entiers de Gauss),$\forall a \in \mathbb{Z}[i]; a = \lambda + \mu i$, $\mu, \lambda \in \mathbb{Z}$, posons $\varphi(a) = |a|^2 = \lambda^2 + \mu^2 \in \mathbb{N}$. C'est à dire on prend $\varphi(\lambda + i\,\mu) = \lambda^2 + \mu^2$. Soient $a, b \in \mathbb{Z}[i]; b \neq 0$ alors $a\,b^{-1} = a\,\bar{b}\varphi^{-1}(b) \in \mathbb{Q}[i] = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}i$ $a\,b^{-1} = x + i\,y$ avec $x, y \in \mathbb{Q}$. Choisissons $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ avec $|x - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}$ et $|y - \beta| \leqslant \frac{1}{2}$. Notons $q = \alpha + i\beta \in \mathbb{Z}[i]$. On obtient $\varphi(a\,b^{-1} - q) = |(x - \alpha) + i(y - \beta)|^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 \leqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{2} < 1$ donc $\varphi(a - b\,q) = \varphi(a\,b^{-1} - q)\varphi(b) < \varphi(b)$. Ainsi $\mathbb{Z}[i]$ est euclidien.
4. Il existe des anneaux principaux qui ne sont pas euclidiens exemple : $\theta = \frac{1 + i\sqrt{19}}{2}$, $A = \mathbb{Z}|\theta]$ est principal mais non euclidien.

29.5.1 Division euclidienne dans un anneau euclidien A

Définition 29.166. *Soient a et b deux éléments de A, avec b non nul et φ le stathme euclidien de A.*

– *Effectuer la division eculidienne de a par b c'est déterminer l'unique couple (q, r) d'élément de A tels que $a = b\,q + r$ avec $r = 0$ et $\varphi(a) \leqslant \varphi(b)$ ou $\varphi(r) \leqslant \varphi(b)$.*

– *q s'appelle le quotient euclidien de la division, r s'appelle le reste euclidien.*

Remarque 29.167. CTES LM3 page 5 envoi 2. «q et r ne sont pas nécessairement uniques, par contre dans $\mathbb{K}[X]$ il y a unicité. Dans l'anneau euclidien $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, la division euclidienne est encore appelée division suivant les puissances décroissantes.

29.6 Propriétés des éléments premiers, des éléments premiers entre eux, des PPCM et PGCD

Définition 29.168. *Soit A un anneau intègre, un élément p de A est dit premier dans A ssi l'anneau quotient $A/(p)$ est intègre. Autrement dit $\forall a, b \in A, p$ divise $a\,b \Rightarrow p$ divise a ou b.*

Définition 29.169. *Soit A un anneau commutatif unitaire. On appelle élément premier tout élément p non inversible engendrant un idéal premier (nécessairement principal) de A. (A vérifier Puf (p) premier $\Leftrightarrow \forall x; y \in A; x \cdot y \in (p) \Leftrightarrow x \in (p)$ ou $y \in (p)$.*

Note 29.170. Pourquoi ne pas définir un élément premier p sur un anneau comme dans $(\mathbb{Z}; +; \times)$? C'est à dire card({diviseur de p}) = 2. Cela n'a pas de sens puisque la décomposition dépend du nombre d'éléments inversibles. Voir définition guy.philippe@les-mathématiques.net ou les imprimés ci-joints et éventuellement Quadrature décembre 2002. Les définitions en cour sont exposées et comparées à celle qu'il propose. La définition est placée juste après la notion d'inversibilité.

Remarque 29.171. Soit A un anneau intègre. Si p est premier et $p \neq 0$, alors p est irréductible. La réciproque sera vraie que pour un anneau factoriel.

Proposition 29.172. *(Lemme d'Euclide) Si A est un anneau factoriel tout élément irréductible de A est premier dans A. (Il y a équivalence).*

Proposition 29.173. *Soit A un anneau factoriel $a, b \in A\backslash\{0\}$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

i. a, b *n'ont pas de facteurs irréductibles commun dans A.*

ii. $\forall c \in A$, *si a divise bc alors a divise c. (lemme d'Euclide)*

iii. $\forall c \in A$, *si a, b divise c alors $a\,b$ divise c.*

Proposition 29.174. *Soit A un anneau factoriel, deux éléments non nuls $a, b \in A$ ont un ppcm et un pgcd (unique à un facteur inversible près). On a : $d = \text{pgcd}(a, b) = \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{\inf(V_p(a), V_p(b))}$ et $m = \text{ppcm}(a, b) = \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{\sup(V_p(a), V_p(b))}$. En terme d'idéaux $(m) = (a) \cap (b)$, (d) est le plus petit idéal principal de A contenant (a) et (b), $(a, b) = (d\,m)$.*

Exemple 29.175. $\mathbb{Z}$.

Remarque 29.176. Attention ! On n'a pas ppcp $\times$ ppcm $= a \times b$. Plus généralement, on voit que dans un anneau factoriel A, une famille finie d'élément a_1, a_2, ..., a_n possède un pgcd et un ppcm. On dit que les $(a_i)_i$ sont premiers entre eux (dans leurs ensembles) si les a_i n'ont aucun facteur irréductible commun.

Théorème 29.177. *Soit A un anneau principal et soit $d \sim ?\,\text{pgcd}(a_1; ...; a_n)$ où $0 \neq a_i \in A$. Il existe alors $r_i \in A$ tel que $d = r_1a_1 + ... + r_na_n$.*

29.6.1 Elément nilpotent

Définition 29.178. *Un élément a d'un anneau $(A, +, \cdot)$ est dit **nilpotent** ssi il existe $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $a^n = 0$.*

Exemple 29.179. Dans $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$, 3 est nilpotent puisque $3^2 = 0$.

29.7 Eléments algébriques, transcendants

Définition 29.180.

- *On dit qu'un élément $x \in B$ est **algébrique sur A** ssi il vérifie (i.e. est solution d') une équation non triviale du type $\sum_{i=0}^{p} a_i x^i = 0$, $p \in \mathbb{N}$ (les a_i, $a_i \in A$ non tous nuls). Il est solution d'un polynôme non nul.*
- *Dans le cas contraire (i.e. $\sum_{i=0}^{p} a_i \cdot x^i = 0, p \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall i, a_i = 0$), on dit que x est **transcendants sur A**. (i.e. Il n'est pas solution d'un polynôme non nul, autrement dit le seul polynôme dont il est solution est le polynôme nul).*

Note 29.181. Voir CTE page 10 envoi 3 structure algébrique (remarque).

Exemple 29.182.

1. $\mathbb{Z}$ sous-anneau de $\mathbb{C}$, soit $a \in \mathbb{Z}$, $\sqrt{a} \in \mathbb{C}$ a est algébrique sur $\mathbb{Z}$ puisque $(\sqrt{a})^2 - a = 0$ et $\mathbb{Z}[\sqrt{a}] = \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot \sqrt{a}$.
2. $\mathbb{Z}$ sous-anneau de $\mathbb{Q}$, soit $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, $a^{-1} \in \mathbb{Q}$ a est algébrique sur $\mathbb{Z}$ puisque $(a \cdot a^{-1}) - 1 = 0$ et $\mathbb{Z}[a^{-1}] = \{b \cdot a^{-1}; b \in \mathbb{Z}, n \geqslant 0\}$, pour $a = 10$, on obtient l'anneau des nombres décimaux.
3. π est transcendant sur $\mathbb{Q}$. J.C. Carréga Théorie des corps-La règle et le compas.

Remarque 29.183. L'ensemble des nombres algébriques (nombres racines d'un polynôme à coefficients entiers) est dénombrable, il y a plus de nombres transcendants que de nombres algébriques.

Définition 29.184. *On appelle fonction polynomiale toute fonction $x \mapsto \sum a_i x^i, a_i \in A$.*

Définition 29.185. *On appelle polynôme minimal d'un élément algébrique α d'un corps K, tout polynôme irréductible et unitaire de $K[X]$ admettant α pour racine.*

29.8 Anneau des fractions d'un anneau commutatif unitaire A

Note 29.186. Note voit Puf (Dictionnaire) page 321 ou Algèbre et géométrie (Bréal) page 202.

Définition 29.187. *A trouver.*

Définition 29.188. *Un élément d'un anneau de fraction est appelé fraction.*

Exemple 29.189. Exemples fondamentaux

1. Si A est intègre et si $S = A^*$ alors B est le corps de fraction de A.
2. Si $A = \mathbb{Z}$ et si $S = \{2\}$; $\{3\}$ ou $\{10\}$ alors $B = \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$; $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{3}\right]$ ou $D = \left[\frac{1}{10}\right]$ i.e l'anneau de nombre rationnels dyadiques, triadiques ou décimaux.
3. Si S est le complémentaire de (p) i.e. $p\mathbb{Z}$ avec $p > 0$ entier premier alors $B = \mathbb{Z}_{(p)}$ est le localisé de $\mathbb{Z}$ en p ??????

Définition 29.190. *Polynôme unitaire, polynôme dont le coefficient du monôme non nul de plus haut degré est égal à 1.*

Définition 29.191. *Degré d'un nombre algébrique (Voir CTE M51M page 2 envoi 3). Dic. Puf degré de son polynôme minimal. Les nombres algébriques de degré 1 sont les nombres rationnel.*

29.9 Construction d'anneau par ajout d'élément (Extension algébrique). Extension par adjonction d'un élément

Proposition 29.192. *Soit un anneau $(B,+,\cdot)$, $(A,+,\cdot)$ un sous-anneau de $(B,+,\cdot)$ et $x \in B$, notons $A[x]=\{\sum_{i=0}^{p} a_i x^i, a_i \in A, p \in \mathbb{N}\}$ est le plus petit sous-anneau de B contenant A et x.*

Note 29.193. Définir les opérations sur cet anneau.

Remarque 29.194. En général, l'écriture d'un élément de $A[x]$ sous le forme $\sum_{i=0}^{p} a_i x^i, p \in \mathbb{N}$ n'est pas unique. Autrement dit, x peut vérifier une équation non triviale du type $\sum_{i=0}^{p} a_i x^i = 0, p \in \mathbb{N}$ (les a_i non tous nuls). Attention, il s'agit de sommes finies.

29.9.1 Extension algébrique

Voir encyclopédie p.u.f. ou cours d'algèbre pour l'agrégation.

Définition 29.195. *Extension d'un anneau : si A est un sous-anneau de A'. On dit que A' est une extension de l'anneau A.*

Définition 29.196. *Extension algébrique d'un anneau A : Extension d'un anneau A dont tous les éléments sont algébriques sur A.*

29.9.2 Extension transcendante (Anneau des polynômes sur un anneau commutatif)

Note 29.197. On Monday 13 May 2002 21:44, you wrote:

Question :

Monsieur,

Dans votre cours sur les anneaux vous définissez un anneau de polynômes A[x] comme le plus petit anneau contenant un anneau A (sous anneau d'un anneau B) et un élément transcendant x dans A. Puis l'anneau des polynômes A[X] par identification par un isomorphisme.

- je remarque que cette définition est différente de celle couramment utilisée dans la littérature, où l'on utilise les suites, pourquoi avez vous choisi cette approche.
- cette démarche peut-elle se généraliser à un anneau non commutatif ?

Dans l'attente de votre réponse veuillez agréer, Monsieur, mes salutations distinguées.

Réponse :

J'ai volontairement choisi cette approche pour essayer de faire comprendre que ce qui était important dans un anneau de polynômes était la propriété universelle sur les prolongements de morphismes que j'ai énoncée. Vous remarquerez cependant que pour prouver l'existence d'un tel anneau de polynomes, j'ai utilisé la construction classique avec les suites. Cette demarche peut se généraliser pour des anneaux A et B non commutatifs, mais à condition de prendre pour x , par exemple un élément qui commute avec tous les éléments de A.

Meilleures salutations.

Marc Chamarie.

Commentaire personnel : il existe plusieurs voies pour obtenir des anneaux de polynôme. Étendre un anneau existant en définissant des propriétés pour cet élément par rapport aux éléments natifs ou alors repérer un élément possédant déjà ces propriétés dans l'anneau choisi.

29.9.2.1 Définition

Définition 29.198. *Soit un anneau A possédant un élément transcendant les autres éléments de A sont appelés coefficients de x. $A\backslash\{x\}$ est l'ensemble des coefficients.*

Définition 29.199. *Un anneau M est dit anneau de polynôme, s'il possède un élément transcendant noté x dont les coefficients forment un sous-anneau A de M.*

Proposition 29.200. *Soit A un anneau,*

i. Tout anneau de polynôme $A[x]$ vérifie la propriété suivante : pour tout morphisme d'anneau $f: A \to A'$, f se prolonge d'une manière unique en un morphisme d'anneaux : $\tilde{f}$: $A[x] \to A'$ qui vérifie $\tilde{f}(x) = x'$. Il suffit de poser $\tilde{f}(x) = x'$ où x' est un point quelconque de A'.

ii. Il existe au moins un anneau de polynôme à coefficient dans A.

Remarque 29.201.

Si $A[x], A[x']$ sont deux anneaux de polynômes, d'après la propriété (i) de la proposition précédente, on voit qu'il existe un unique isomorphisme d'anneau : $\left| \begin{array}{ccc} A[x] & \to & A[x'] \\ a & \mapsto & a, \forall a \in A \\ x & \mapsto & x' \end{array} \right.$.

Proposition 29.202. *Tous les anneaux de polynôme $A[x]$; $A[x']$ sont isomorphes. Donc, si on montre que $M = A[x] = A[x']$, on peut étudier M indépendamment de x. ??? Cela n'a pas de sens !*

Définition 29.203. *On note $A[X]$ tout anneau de polynôme $M[x]$ dont l'anneau des coefficients de l'éléments transcendant x est isomorphe à A. On parle donc de l'anneau de polynôme $A[X]$ à une indéterminée X et à coefficients dans A.*

Note 29.204. Peut-on définir une relation d'équivalence entre anneaux de polynôme ?

Remarque 29.205.

1. Attention : $A[X^2] \subset A[X], A[X^2] \neq A[X]$ mais $A[X^2] \approx A[X]$.
2. On définit par récurrence sur $n \geqslant 1$, l'anneau des polynômes à n indéterminées $X_1, X_2, ..., X_n$ et à coefficients dans A comme étant $(A[X_1, ..., X_{n-1}])[X_n]$ on le note $A[X_1, ..., X_n]$. tout élément de $A[X_1, ..., X_n]$ s'écrit de manière unique $f = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} a_\nu X^\nu$ ou $a_\nu \in A, \forall \nu = (\nu_1, ..., \nu_n)$ on a noté $X^\nu = X^{\nu_1} \cdot X^{\nu_2} \cdot ... \cdot X^{\nu_3}$.

29.9.2.2 Construction d'un anneau de polynôme utilisant les suites

Proposition 29.206. *Soit $(A; +; \cdot)$ un anneau; M l'ensembles des suites de A nulles à partir d'un certain rang et les opérations $\oplus$ et $\odot$ définies sur M par :*
$(a_0; a_1; a_2; ...) \oplus (b_0; b_1; b_2; ...) = (a_0 + b_0; a_1 + b_1; a_2 + b_2; ...)$
$(a_0; a_1; a_2; ...) \odot (b_0; b_1; b_2; ...) = (a_0 \cdot b_0; a_1 \cdot b_0 + a_0 \cdot b_1; a_2 \cdot b_0 + a_1 \cdot b_1 + a_0 \cdot b_2; ...)$
alors $(M, \oplus, \odot)$ est un anneau. $m, m' \in A; m \cdot m' = m' \cdot m$.
Si A est unitaire posons $X = (0; 1; 0; 0; 0; ...); X^0 = (1; 0; 0; 0; 0; ...)$.

Démonstration.

- $(M, \oplus)$ est un groupe (facile à prouver).
  $\oplus$ est une lci (les suites restent nulles à part d'un certain rang par $\oplus$)
  La suite nulle $(0; 0; 0; ...)$ est l'élément neutre de $\oplus$.
  La suite $(-a_0; -a_1; -a_2; ...)$ est l'élément symétrique de $(a_0; a_1; a_2; ...)$.
- $\odot$ est une l.c.i., il existe $N; \forall n \geqslant A, a_n = 0$ donc la suite produit est encore nulle.
  $A \odot B = (a_0 \cdot b_0; a_1 \cdot b_0 + a_0 \cdot b_1; a_2 \cdot b_0 + a_1 \cdot b_1 + a_0 \cdot b_2; a_3 \cdot b_0 + a_2 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_2 + a_0 \cdot b_3; ...)$
  $C = (c_0; c_1; c_2; c_3; ...)$
  $(A \odot B) \odot C = (a_0\ b_0\ c_0;\ a_1 b_0 c_1 + a_0 b_1 c_0 + a_0 b_0 c_1;\ a_2 b_0 c_0 + a_1 b_1 c_0 + a_0 b_2 c_0 + a_1 b_0 c_1 + a_0 b_1 c_1 + a_0 b_1 c_1 + a_0 b_0 c_2; ...)$
  Soit les produits $(A \odot B) \odot C$ $A \odot (B \odot C)$, par permutation de $a_i; b_i; c_i$ on montre que : $(A \odot B) \odot C = A \odot (B \odot C)$.
  Montrons qu'elle aussi distributive :
  $A \oplus B = (a_0 + b_0; a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3; ...)$
  $C = (c_0; c_1; c_2; c_3; ...)$

$(A \oplus B)\odot C = ((a_0+b_0)\cdot c_0; (a_1+b_1)\cdot c_0 + (a_0+b_0)\cdot c_1; (a_2+b_2)\cdot c_0 + (a_1+b_1)\cdot c_1 + (a_0+b_0)\cdot c_2; ...)$

$(A \oplus B)\odot C = (a_0\cdot c_0 + b_0\cdot c_0; (a_1\cdot c_0 + a_0\cdot c_1) + (b_1\cdot c_0 + b_0\cdot c_1); (a_2\cdot c_0 + a_1\cdot c_1 + a_0\cdot c_2) + (b_2\cdot c_0 + b_1\cdot c_1 + b_0\cdot c_2); ...)$

Ainsi $(A \oplus B)\odot C = A\odot C \oplus B\odot C$, elle est bien distributive.

Si A est unitaire posons $X = (0;1;0;0;0;...)$ ainsi :

$X^2 = (0\cdot 0; 0\cdot 1 + 1\cdot 0; 0\cdot 0 + 1\cdot 1 + 0\cdot 0; 0; 0; ...) = (0;0;1;0;0;...)$

$X^3 = (0;0;0;1;0;...)$

Par convention $X^0 = (1;0;0;0;0;...)$ et l'on note 0_X l'élément $(0;0;0;0;0;...)$.

$(m;0;0;0;0;...)\odot X^0 = (m;0;0;0;0;...)$ notons le $m\,X^0$.

Soit l'ensemble des $m\cdot X^0$, il est isomorphe canoniquement à A par :

$$f:\left|\begin{array}{ccc} A & \to & (f(A);\oplus;\odot) \\ m & \mapsto & m\,X^0 \end{array}\right.$$

. $(f(A);\oplus;\odot)$ est un sous-anneau de M.

$(m;0;0;0;0;...)\odot(0;1;0;0;0;...) = (0;1;0;0;0;...)\odot(0;m;0;0;0;...)??? = f(m)\odot X^1$ n'est-ce pas plutôt $(0;1;0;0;0;...)\odot(m;0;0;0;0;...)$? notons le $m\,X^1$.

Ainsi de suite. Donc toute suite $(a_0;a_1;a_2;a_3;...)$ nulle à partir du rang n s'écrit sous la forme $\bigoplus_{i=1}^{n} f(a_i)\odot X^i$ ou $\bigoplus_{i=1}^{n} a_i\,X^i$ en adoptant les notations introduites précédemment.

Supposons que $\bigoplus_{i=1}^{n} a_i\,X^i = 0_X$, $\forall n \Rightarrow (a_1;a_2;a_3;a_4;...) = (0;0;0;0;...) \Rightarrow a_1 = a_2 = ... = 0$ donc X est transcendant sur M. □

Note 29.207. Pour tout anneau A unitaire, on peut construire un anneau M également unitaire, possédant un élément transcendant noté X, un élément unité 1_M noté aussi X^0 et tel qu'il existe un sous-anneau de M isomorphe à A.

29.9.2.3 Degré d'un polynôme

Définition 29.208. *Soit $P \in A[X], P \neq 0, P = \sum_{i=0}^{n} a_i\cdot X^i, a_i \in A, \forall i$.*

- *Le **degré** de P est le plus grand entier n tel que $a_n \neq 0$, on le note* $\deg(P)$
- *a_n est appelé **coefficient dominant**.*
- *Si $a_n = 1$, le polynôme P est dit unitaire.*

Remarque 29.209. Par convention, on pose $\deg(0) = -\infty$.

Proposition 29.210. *Soit A un anneau intègre,*

i. $\forall P, \varphi \in A[X], \deg(P\varphi) = \deg(P) + \deg(\varphi)$,

ii. l'anneau $A[X]$ est intègre et $(A[X])^* = A^*$. Si $K = \mathrm{Frac}(A)$, noté $K(X)$, c'est le corps des fractions rationnelles à une indéterminée X.

29.9.2.4 Division euclidienne

Proposition 29.211. *(Division euclidienne) Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau. Soit $P \in A[X]$ dont le coefficient dominant est inversible dans A, alors $\forall Q \in A[X]$, il existe un couple unique de polynôme $R, S \in A[X]$ tel que $Q = PS + R$ et $\deg(R) < \deg(P)$. De plus, on a $\deg(S) = \deg(Q) - \deg(P)$.*

29.9.2.5 Polynôme irréductible

Proposition 29.212. *Soit $P \in K[X]$ tel que $\deg(P) \geqslant 1$. P est irréductible si et seulement si ses seuls diviseurs sont les constantes et les polynômes associés à P.*

29.9.2.6 Polynôme scindé

Définition 29.213. *Soit $P \in K[X]$ un polynôme. P est scindé sur K ou pour $K[X]$ si et seulement s'il est un produit de polynôme de $K[X]$ de degré 1.*

Proposition 29.214. *Dans $K[X]$, il y a équivalence entre :*

1. *Les seuls polynômes irréductibles de $K[X]$ sont ceux de degré 1.*
2. *Tout polynôme non constant a une racine dans K.*
3. *Tout polynôme non constant est scindé.*

29.9.2.7 Evaluation ou fonction d'évaluation

p.u.f. dictionnaire page 284.

Définition 29.215. *Soit $\mathcal{E}$ un ensemble de fonctions toute définie sur E et à valeur dans un ensemble F. L'application :* $\left|\begin{array}{ccc} \mathcal{E}\times E & \to & F \\ (f,x) & \mapsto & f(x) \end{array}\right.$ *s'appelle la fonction d'évaluation relative à $\mathcal{E}$ et E.*

Proposition 29.216. *Soit $(A,+,\cdot)$ un sous-anneau B et $x\in B$. Soit $P\in A[X]$, $P=\sum a_iX^i$, on note $P(x)=\sum a_ix^i$, l'application* e_x: $\left|\begin{array}{ccc} A[X] & \to & B \\ P & \mapsto & P(x) \end{array}\right.$ *est un morphisme d'anneau.*

Avertissement 29.217. Examinons les écritures suivantes $P=\sum a_iX^i$ et de $P(x)=\sum a_i\cdot x^i$. Dans le première écriture a_iX^i est une convention d'écriture : par définition de $A[X]$, il existe un isomorphisme f entre $(A[X];\oplus\,;\odot)$ et $(A;+\,;\cdot\,)$, la convention est alors $a_iX^i=f(a_i)\odot X^i$. En résumé tout se passe comme si on identifiait a_i et $f(a_i)$.

Définition 29.218. *On appelle évaluation ou fonction d'évaluation de x le morphisme d'anneau* e_x: $\left|\begin{array}{ccc} A[X] & \to & B \\ P & \mapsto & P(x) \end{array}\right.$.

Proposition 29.219.

i. $\mathrm{Ker}(e_x)=\{P\in A[X];P(x)=0\}$ *est un idéal de $A[X]$.*

ii. et par la propriété universelle du quotient : $A[X]/\mathrm{Ker}(e_x)$ *est isomorphe à $A[x]$, $f(A[X])=A[x]$.*

Définition 29.220. *Si $P(x)=0$, on dit que x est une racine dans B du polynôme P.*

Exemple 29.221.

1. Soit $a\in A$, alors $\mathrm{Ker}(e_a)=(X-a)$ et $A[X]/(X-a)\simeq A$ (en effet par division euclidienne) $\forall P\in A[X],\exists S\in A[X],b\in A;P=(X-a)S+b,(b\in A)$ en fait $b=P(a)$ donc a est racine de P ssi $P\in(X-a)$. $P\in\ker(e_a)\Leftrightarrow P(a)=0\Leftrightarrow(a-a)S+b=0\Leftrightarrow b=0\Leftrightarrow P=(X-a)S$ autrement dit $P\in(X-a)A[X]$ ou encore $P\in(X-A)$, où $(X-A)$ est l'idéal engendré par $X-a$
2. $a\in\mathbb{Z}$, considérons $\sqrt{a}\in\mathbb{C}$ et $\sqrt{a}\notin\mathbb{Z}$ alors $\mathrm{Ker}(e_{\sqrt{a}})=(X^2-a)$ et $\mathbb{Z}[X]/(X^2-a)=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\cdot\sqrt{a}$ (en effet, par division euclidienne, $\forall P\in\mathbb{Z}[X],P=(X^2-a)S+\lambda X+\mu$ avec $\lambda,\mu\in\mathbb{Z}$ donc $P(\sqrt{a})=\lambda\sqrt{a}+\mu$ ainsi $\sqrt{a}$ est racine de P ssi $\lambda\sqrt{a}+\mu=0$, c'est à dire $\lambda=\mu=0$.
3. $\mathbb{R}[X]/(X^2-1)=\mathbb{R}+\mathbb{R}\cdot i\simeq\mathbb{C}$.

Proposition 29.222. *Soit A un anneau intègre, $P\in A[X]$, $p\neq 0$. Supposons que P ait n racines distinctes $a_1,a_2,...,a_n$ dans A. Alors $\prod_{i=1}^{n}(X-a_i)$ divise P dans $A[X]$. En particulier des $(P)\geqslant n$???.*

Remarque 29.223.

1. Ce résultat prouve que dans un anneau intègre, un polynôme $P\neq 0$ a au plus $n=\deg(P)$ racines distinctes.

2. C'est faux en général, par exemple l'anneau $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ n'est pas intègre ($\bar{2}$, $\bar{4}$ sont des diviseurs de $\bar{0}$: $\bar{2}\cdot\bar{4}=\bar{0}$) $X^2=1$ à 4 racines distinctes dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, voir tableau ci-dessous ou les solutions sont : $\bar{1},\bar{3},\bar{5},\bar{7}$).

	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{7}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{7}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Définition 29.224. *Soit $(A,+,\cdot)$ un anneau, $P\in A[X]$, a une racine de P dans A, le plus grand entier $k\geqslant 1$ tel que $(X-a)^k$ divise P dans $A[X]$ s'appelle la multiplicité de a dans P. Si $k=1$, a est une racine simple de P.*

Proposition 29.225. *Soit un corps K de caractéristique nulle, $a\in K[X]$ et $\lambda\in K$, pour que λ soit racine d'un polynôme a, avec au moins la multiplicité $k\in\mathbb{N}^*$, il faut et il suffit que $a(\lambda)=a'(\lambda)=...=a^{(k-1)}(\lambda)=0$.*

Corollaire 29.226. *Pour que $\lambda\in\mathbb{K}$ soit une racine simple (multiplicité égale à 1) de $a\in K[X]$, il faut et il suffit que $a(\lambda)=0$et $a'(\lambda)\neq 0$.*

Corollaire 29.227. *Pour qu'une racine $\lambda\in K$ de a soit exactement de multiplicité k, il faut et il suffit que $0=a(\lambda)=a'(\lambda)=...=a^{(k-1)}(\lambda)$ et $a^{(k)}(\lambda)\neq 0$.*

29.9.2.8 Dérivée formelle d'un polynôme

Définition 29.228. *On définit le polynôme dérivé de $P=\sum_i a_iX^i$ par $P'=\sum_i i\times a_i\times X^{i-1}$.*

On vérifie facilement la propriété suivante

Proposition 29.229. *(Formule Leibniz) $(p\cdot q)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\times p^k\times q^{(n-k)}$.*

Proposition 29.230. $\forall P,Q\in A[X],\forall\lambda\in A,(\lambda P+Q)'=\lambda P'+Q'$ *et* $(PQ)'=P'Q+PQ'$.

Proposition 29.231. *Soit $P\in A[X]$ et $a\in A$, une racine de P, alors a est racine simple de P ssi $P'(a)\neq 0$.*

Proposition 29.232. *(Formule de Taylor) Soit K un corps de caractéristique nulle et $p\in K[X]$ de degré n. Alors $p(X)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}p_{(0)}^{(k)}\times k$, $P(a+Y)=\sum_{k=0}^{k}\frac{1}{k!}p_{(a)}^{(k)}\times Y^k$.*

29.9.2.9 Interpolation de Lagrange

Proposition 29.233. *Soit $(A,+,\cdot)$ un anneau $a_1,a_2,...,a_n$ des éléments de A tels que $\forall i\neq j$, a_i-a_j est inversible dans A, alors $\forall b_1,b_2,...,b_n\in A$, il existe un unique polynôme $P\in A[X]$ de degré $<n$ avec $P(a_i)=b_i,\forall i,1\leqslant i\leqslant n$.*

Remarque 29.234.

1. Explicitement, on peut prendre pour P : $P=\sum_j b_j\prod_{h\neq j}(a_j-a_k)\Big/\prod_{h\neq j}(X-a_k)$ ou bien n'est-ce pas plutôt $P=\sum_j b_j\prod_{h\neq j}(X-a_k)\Big/\prod_{h\neq j}(a_j-a_k)$???? .
2. L'interpolation de Lagrange est valable en particulier si A est un corps et si les a_i sont tous distincts.

3. Soit K un corps (ex: $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, p premier, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) si K est infini alors l'égalité formelle des polunômes de $K[X]$ est équivalente à l'égalité des fonctions polynômes associées ??? dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$)

29.9.2.10 Contenu d'un polynôme

Définition 29.235. *Soit A un anneau factoriel. $P \in A[X]$, $P \neq 0$, on note $c(P)$ et on appelle **contenu** de P le* pcgd *(dans A) des coefficients de P (défini à un facteur inversible près).*

29.9.2.11 Polynôme primitif

Définition 29.236. *On dit qu'un **polynôme** est **primitif** ssi $c(P) \in A^*$ autrement dit les coefficients de P sont premiers entre eux.*

Remarque 29.237. $\forall p, c(P)^{-1}P \in A[X]$ et est primitif.

Lemme 29.238. *(Gauss) Soit A un anneau factoriel, $p, q \in A[X]\backslash\{0\}$,*

i. P, Q sont primitifs $\Rightarrow$ PQ primitifs.

ii. $c(PQ)$ et $c(P)c(Q)$ sont associés dans A.

Théorème 29.239. *Soit A un anneau factoriel de corps des fractions K alors :*

i. L'anneau des polynômes $A[X]$ est factoriel.

ii. Les éléments irréductibles de $A[X]$ sont d'une part les éléments irréductibles de A et d'autre part les polynômes primitifs de $A[X]$ qui sont irréductibles dans $K[X]$.

Corollaire 29.240.

i. Pour tout corps K et pour tout entier $n \geqslant 1$, $K[X_1, X_2, ..., X_n]$ est factoriel (non principal dès que $n \geqslant 2$).

ii. $\mathbb{Z}[X_1, X_2, ..., X_n]$ est factoriel (non principal).

$X^4 + 4 = (X^2 - 2X + 2)(X^2 + 2X + 2)$

29.9.2.12 Critères d'irréductibilité

Théorème 29.241. *(Critère d'Eisenstein) Soit A un anneau factoriel, K son corps de fractions. Soit $P \in A[X]$, $P = \sum_{i=1}^{n} a_i X^i$, $a_n \neq 0$. Supposons qu'il existe un élément irréductible $p \in A$ avec p ne divise pas a_n (dans A), p divise $a_i, \forall i, 0 \leqslant i \leqslant n-1$ et p^2 ne divise pas a_0. Alors P est irréductible dans $K[X]$.*

Exemple 29.242.

1. $P = X^5 - 16$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$, en effet posons $Y = X - 1$ alors $P = Y^5 + 5Y^4 + 10Y^3 + 10Y^2 + 5Y - 15$, on peut appliquer les critères d'Einsenstein avec $p = 5 \in A$.
2. $\forall p$ nombre premier $X^{p-1} + X^{p-2} + ... + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$ (même méthode).

Proposition 29.243. *(Réduction modulo p) Soit A un anneau principal, K son corps des fractions. Soit $P \in A[X]$; $P = \sum_i a_i X^i$ avec $a_n \neq 0$. On suppose qu'il existe un élément irréductible $p \in A$ avec p ne divise pas a_n. $T = \sum_i \overline{a_n} X^{-1} \in (A/p)[X]$ est irréductible alors P est irréductible dans $K[X]$.*

Exemple 29.244.

1. $4X^3 - 10X^2 + 6X + 1 = P$ irréductible sur $\mathbb{Q}$, on prend $A = \mathbb{Z}$ et $p = 3$, $p \nmid 4$ et modulo S. $\bar{P} = X^3 - X^2 + 1$ est irréductible car il n'a pas de racine dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
2. $X^2 + Y^2 + X\,Y + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X, Y]$ (on prend $A = \mathbb{R}[Y]$ et $P = Y$ alors si $P = X^2 + YX + (Y^2 + 1)$ et modulo Y, $\bar{P} = X^2 + 1$ est irréductible sur $A/Y = \mathbb{R}$ donc P est irréductible dans $\mathbb{R}(Y)$ donc aussi sur $\mathbb{R}[Y]$ (car P est primitif).

29.9.2.13 Polynôme symétrique

Définition 29.245. *Soit A un anneau, $B = A[X_1, X_2, ..., X_n]$ l'anneau des polynômes à n éléments à n indéterminées et à coefficients dans A. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ agit sur B par permutations verticales : $\forall p \in B$, $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$, on pose $\sigma(P) = P[X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(n)}]$. On dit que P est symétrique ssi $\sigma(P) = P$.*

Exemple 29.246. $X_1X_2 + X_1X_3 + X_2X_3$.

$\forall P \in B$, on peut écire $P = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} a_\nu X^\nu$ où $X^\nu = X_1^{\nu_1} \times ... \times X_n^{\nu_n}$ pour $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n)$ et $a_\nu \in A$. Chaque terme $a_\nu X^\nu$ est un monôme. Si $P \neq 0$, on définit le degré (total) de P par $\deg(P) = \max_{a_\nu \neq 0} (|\nu|)$ avec $|\nu \vDash \nu_1 + ... + \nu_n$. On dira qu'un polynôme P est homogène ssi tous ses monômes ont le même degré d. Il est claire que $\forall P \neq 0$, P s'écrit de manière unique comme somme de polynômes homogènes.

Soit T une autre indéterminée et considérons dans l'anneau des polynômes $B[T]$ le polynôme suivant : $\prod_{i=1}^n (T - X) = T^n + \sum_{k=1}^n (-1)^k \sigma_k T^{n-k}$ avec $\forall k, 1 \leqslant k \leqslant n, \sigma_k \in B$. Un calcul facile (récurrence sur n par exemple) montre que $\sigma_1 = X_1 + ... + X_n$, $\sigma_2 = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} X_iX_j$, ..., $\sigma_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < ... < i_k \leqslant n} X_{i_1}...X_{i_k}$, ..., $\sigma_n = X_1...X_n$. Chaque σ_k est symétrique, homogène de degré k, les $(\sigma_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ sont les polynômes symétriques élémentaires. En particulier, si K est un corps et$P \in K[T]$ un polynôme de degré n : $P = \sum_{i=0}^n \lambda_i T^i$. Supposons que P a tous ses facteurs irréductibles de degré 1. $P = \lambda_n \prod_{i=1}^n (T - a_i)$ avec $\forall i, 1 \leqslant i \leqslant n, a_i \in K$. Alors $\forall i 0 \leqslant i \leqslant n-1$, on obtient $\lambda_i = \lambda_n (-1)^{n-i} \sigma_{n-1}(a_1, a_2, ..., a_n)$. (Relation entre les coefficients et les racines).

Définition 29.247. *Soit $M(X_1, X_2, ..., X_n) = \mathrm{aX}_1^{u_1}X_2^{u_2}...X_n^{u_n}$ un monôme remarqu'on que $M(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) = a \in \sigma_1^{u_1}\sigma_2^{u}...\sigma_n^{u_n}$ et homogène de degré total $1u_1 + 2u_2 + ... + n\,u_n$ ce nombre s'appelle le* ***poids du monôme*** *M.*

Définition 29.248. *Le* ***poids d'un polynôme*** *sera le maximum des poids de ses monômes.*

Remarque 29.249. L'ensemble de tous les polynômes symétriques est un sous-anneau B_{sym} de $B = A[X_1, X_2, ..., X_n]$.

Théorème 29.250. *Soit $P \in A[X_1, ..., X_n]$ un polynôme symétrique de degré total d, il existe un unique polynôme $Q \in B$ de poids d tel que $P(X_1, ..., X_n) = Q(\sigma, ..., \sigma_d)$.*

Exemple 29.251. $\sum_{i=1}^n X_i^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$.

29.9.3 Cours d'Émilie

Cette partie est à associer au cours sur les anneaux de polynômes. Ce dernier n'est pas organisé correctement. Doit-il être séparé du cours sur les anneaux ou pas ?

29.9.3.1 Factorisation dans $A[X]$

Note 29.252. $A = K$ est un corps.

Définition 29.253. *$P \in K[X]$; P est irréductible sur K si :*

1. $\deg(P) \geqslant 1$.
2. *si $p = f \times g$ dans $\mathbb{K}[X]$ alors $\deg(f) = 0$ ou $\deg(g) = 0$.*

Les seuls diviseurs de P sont des constantes et des polynômes associés.

Théorème 29.254. *Soit $P \in K[X]$ de $\deg \geqslant 2$. Si P a une racine dans K alors il n'est pas irréductible sur K.*

1. *Si P a une racine dans K alors il n'est pas irréductible sur K.*

2. *Si P est irréductible sur K alors P n'a pas de racine dans K.*
3. *Si $\deg(P) = 2$ ou 3 alors P est irréductible sur K si et seulement si P n'a pas de racines dans K. Réciproque partielle de (1)*

Exemple 29.255.

1. X^2+1 est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, car il n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$ et de degré est égale à 2.
2. $f(X) = X^4+3X^3+2 = (X^2+1)(X^2+2)$ n'a pas de racines dans $\mathbb{R}$ mais il n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.
3. $(X^2+X+1)^2$ n'a pas de racine dans $\mathbb{R}[X]$ et pourtant X^2+X+1 qui n'est ni constant, ni associé à $(X^2+X+1)^2$ divise ce polynôme !

29.9.3.2 Irréductibilité sur $\mathbb{Q}[X]$

Lemme 29.256. *(Lemme de Gauss) Soit $f(X) = g(X)h(X)$ dans $\mathbb{Z}[X]$ si un nombre premier p divise tout coefficient de $f(x)$ alors p divise tout coefficient de $g(x)$ ou bien p divise tout coefficient de $h(x)$.*

Théorème 29.257. *Soit f un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ de degré $\geqslant 1$*

1. *si $f(X) = g(X)h(X)$ dans $\mathbb{Q}[X]$ alors $f(X) = g_0(X)h_0(X)$ dans $\mathbb{Z}[X]$ et $d^0g_0 = d^0g$;*
2. *$f(x)$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ si et seulement si il n'y a pas de factorisation propre (i.e. $f = gh$ avec $\deg(h) < \deg(f)$ et $\deg(h) < \deg(f)$.*

Théorème 29.258. *(Critère d'irrecductibilité modulo p) Soit $f \in \mathbb{Z}[X]$ et p un nombre premier tel que :*

1. *p ne divise pas le coefficient dominant de $f(X)$.*
2. *La réduction $\overline{f(X)}$ modulo p est irréductible dans $\mathbb{Z}_p[X]$, alors f est irréductile dans $\mathbb{Q}[x]$).*

Exemple 29.259.

1. $f(X) = X^3+4X^2+6X+2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$, $p=3$, $\overline{f(X)} = X^3+X^2+2$ n'a pas de racine dans $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0};\bar{1};\bar{2}\}$, $4 \equiv 1[3]$ donc est irréductible

Théorème 29.260. *(Critère d'Eisentein) Soit $f(X) = a_0+a_1X+...+a_nX^n \in \mathbb{Z}[X] (n \geqslant 1)$. S'il existe un nombre premier p tel que :*

1. *p divise $a_0; a_1; ...; a_{n-1}$,*
2. *p ne divise pas a_n,*
3. *p^2 ne divise pas a_0*

Alors f est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Exemple 29.261. $f(x) = 2X^5+27X^3-18X+12 \in \mathbb{Q}[X]$ est irréductible. $p=3$ ne divise pas 2, $p^2=9$ ne divise pas 12, mais $p=3$ divise $27, 18$ et 12

Remarque 29.262. $\mathbb{Q}$ est le corps des fractions de $\mathbb{Z}$.

Soit A un anneau factoriel et K son corps de fractions. La factorisation dans $K[X]$ équivaut à la factorisation dans $A[X]$ (la factorisation dans $\mathbb{Q}[X]$ équivaut à la factorisation dans $\mathbb{Z}[X]$) car $\mathbb{Q}$ corps de fraction de $\mathbb{Z}$ car $\mathbb{Z}$ est factoriel.

Chapitre 30
Corps

30.1 Corps

Définition 30.1. *Soient A un ensemble, $+, \cdot$ 2 lois de composition interne. On dit que le triplet $(A, +, \cdot)$ est une structure de corps (ou un corps) si et seulement s'il vérifie les propriétés suivantes :*

- *$(A, +)$ est un groupe commutatif (notons 0 son élément neutre).*
  Le couple formé par l'ensemble et la première loi est un groupe commutatif.
- *$(A\backslash\{0\}, \cdot)$ est un groupe.*
  Le couple formé par l'ensemble privé de 0 et la deuxième loi est un groupe.
- *$\cdot$ est distributive par rapport à $+$.*

Exemple 30.2. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ et $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour p premier ou p ? voir CTES page 13 envoi 2 2004-2005. $\mathbb{Q}$ est le plus petit corps contenant $\mathbb{Z}$.

Remarque 30.3.

1. le triplet $(A, +, \cdot)$ est un corps si et seulement si :
   - $(A, +, \cdot)$ est un anneau unitaire (notons 0 l'élément neutre pour la loi $+$)
   - $(A\backslash\{0\}, \cdot)$ est une groupe.
2. Autrement dit c'est un anneau unitaire dont le groupe des unités est $(A\backslash\{0\}; .\}$
3. le triplet $(A, +, \cdot)$ est un corps si et seulement si :
   - $(A, +, \cdot)$ est un anneau non nul.
   - Tout élément non nul de A est inversible $A^* = A\backslash\{0\}$.
4. le triplet $(A, +, \cdot)$ est un corps si et seulement si : l'anneau $(A, +, \cdot)$ n'a que deux idéaux (0) et A (à gauche ou a droite).

Démonstration.

1.
2.
3.
4. $(\Leftarrow)$ Si A n'est pas un corps, il existe $x \neq 0 \in A; \forall y \in A, x\,y \neq 1$. Posons $I_x = \{x\,y_1 + y_2\,x;$ $y_1 \in A; y_2 \in A\}$, I_x est un idéal. Or $1 \notin I_x \Rightarrow I \neq E$ et $x \in I_x; x = 0 \Rightarrow I_x \neq \{0\}$. □

Définition 30.4. *Un corps $(A, +, \cdot)$ est dit commutatif si et seulement si sa deuxième loi est commutative.*

Proposition 30.5. *Soit A un anneau et I un idéal de A alors A/I est un corps si et seulement si I est un idéal maximal.*

Théorème 30.6. *(Théorème de Wedderburn) Tout corps fini est commutatif.*

Corollaire 30.7. *Soit A un anneau intègre alors $A[X]$ est principal ssi A est un corps.*

Remarque 30.8. $\mathbb{R}[X], \mathbb{Q}[X], \mathbb{C}[X]$ sont donc principaux.

Proposition 30.9. *Si A n'est pas un corps, p irréductible $\Leftrightarrow (p)$ maximal.*

Définition 30.10. *Un anneau est intègre si et seulement si :* $(x \cdot y = 0; x \neq 0) \Rightarrow (y = 0)$.

Remarque 30.11. En particulier un corps est un anneau intègre ! Attention l'inverse n'est pas vrai. Exemple : $\mathbb{Z}$.

Proposition 30.12. *Si* $(A; +; \cdot)$ *est un corps alors* $(A; +; \cdot)$ *est un anneau intègre. Autrement dit* $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$.

Proposition 30.13. *page 200 Algèbre et géométrie Bréal ou CTES page 16 envoi 1 structures algébriques.*

Proposition 30.14. *Soit K un corps. L'anneau $K[X]$ des polynômes à coefficient dans K est euclidien.*

Démonstration. CTES page 4 M51M 2004-2005. □

Proposition 30.15. *Soit $K[X]$ un corps. L'anneau $K[X]$ est principal.*

Démonstration. CTES page 5 M51M 2004-2005. □

30.2 Sous-corps engendré par une partie

Proposition 30.16.

1. *L'intersection d'une famille de sous-corps d'un corps A est un sous-corps de A.*
2. *L'intersection de sous-corps contenant une partie X non vide de A est le plus petit sous-corps de A contenant X.*

Définition 30.17. *Le plus petit sous-corps de A contenant une partie non vide de A est appelé sous-corps engendré par X.*

Proposition 30.18. *Soit K_0 un corps et A un sous-anneau de K_0. Si A engendre K_0, alors K_0 est isomorphe au corps des fractions de A.*

30.3 Corps des fractions d'un anneau intègre A

Remarque 30.19. Soit A un anneau, comment construire un corps K tel que $K \supset A$? On propose une solution qui abouti au plus petit corps contenant A. Que l'on appelle corps des fractions de l'anneau A. Construction sans doute à l'origine de la définition de l'anneau des fractions (sans nécessité d'intégrité de A).

Proposition 30.20. *Si A est un anneau intègre et $A^* = A \setminus \{0\}$.*

i. La relation binaire $\mathcal{R}$ définie par $(a; s)\mathcal{R}(a'; s') \Leftrightarrow a \cdot s' = a' \cdot s$ est une relation d'équivalence sur $A \times A'$. $\left(\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'} \Leftrightarrow a \cdot s' = a' \cdot s\right)$,

ii. Les opérations $(a_1; s_1) + (a_2; s_2) = (a_1 \cdot s_2 + a_2 \cdot s_1; s_1 \cdot s_2)$ puis $(a_1; s_1) \cdot (a_2; s_2) = (a_1 \cdot a_2; s_1 \cdot s_2)$ sont compatibles avec $\mathcal{R}$ et définissent des opérations sur $K = (A \times A^*)/\mathcal{R}$. $\left(\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2} = \frac{a_1 s_2 + a_2 s_1}{s_1 s_2}\right)$.

iii. Muni de ces opérations K est un corps.

iv. L'application φ: $\left|\begin{array}{ccc} A & \to & K \\ a & \mapsto & (a; 1) \end{array}\right.$ *est un morphisme injectif respectant l'unité de A dans K tel que $\varphi(A^*) \subset K$. $(a; 1)$ peut être également noté $\frac{a}{1}$.*

v. Le couple $(K;\varphi)$ possède la propriété universelle suivante (P) : si $f \in \mathrm{Hom}(A;B)$ tel que $f(1_A)=1_B$ et $f(A^*)\subset B^*$, il existe un morphisme unique f de K dans B tel que $\bar{f}\circ\varphi = f$ de plus si f est injective alors $\bar{f}$ est injective.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & \overset{\varphi}{\searrow} & \downarrow \bar{f} \\ & & K \end{array}$$

Remarque 30.21. K est le plus petit corps contenant A.

La proposition précédente vient du cours d'Emilie et peut être utilisée pour définir un anneau de fraction. La différence entre anneau de fraction et corps de fraction c'est l'intégrité imposée à A pour définir le corps des fractions.

Proposition 30.22. *L'anneau des fractions de A par rapport à A^* est un coprs.*

Définition 30.23. *Ce corps est appelé corps des fractions de A.*

Proposition 30.24. *Le corps des fractions de l'anneau A est le plus petit corps $\mathbb{K}$ contenant les éléments de A. Tout élément $x\in\mathbb{K}$ s'écrit $x = a\cdot b^{-1}$ avec $a,b\in A, b\neq 0$.*

Définition 30.25. *Soit $(A,+,\cdot)$ un anneau unitaire commutatif, le plus petit corps $\mathbb{K}$ contenant les éléments de A est appelé* ***corps des fractions*** *de A.*

Exemple 30.26.

1. Soit $a\in\mathbb{Z}$ fixé. $A=\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\cdot\sqrt{a}=\{\lambda+\mu\cdot\sqrt{a};\lambda,\mu\in\mathbb{Z}\}$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$. Le corps des fractions de A est : $\mathbb{K}=\mathbb{Q}+\mathbb{Q}\cdot\sqrt{a}$.
2. Le corps des fractions de $\mathbb{Z}$ est $\mathbb{Q}$.

Remarque 30.27. Rajouter la remarque page 203 Algèbre et Géométrie Bréal.

Lire également Atlas de mathématiques page 81. Corps de fraction et des quotients.

30.4 Extension algébriques

30.4.1 Extension

Définition 30.28. *Soit L un corps et K un sous-corps de L. On dit que L est une extension de K.*

Remarque 30.29. On peut voir en particulier L comme un K-espace vectoriel (l'addition est celle du corps et la multipliaction externe est donnée par $\forall\lambda\in L,\forall k\in L,\lambda\cdot x=\lambda x$. La dimension du K-ev L est appelée degré de L sur K et notée $[L:K]$.

Théorème 30.30. *Soit $K\subseteq L\subseteq M$ deux extensions du corps. Alors $[M:K]$ est fini ssi $[M:L]$ et $[L:K]$ sont finis, dans ce cas on a $[M:K]=[M:L][L:K]$.*

Théorème 30.31. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i. x est algébrique sur K,

ii. $K[x]$ est un corps (i.e. K[X]=K(x)),

iii. $\dim(K[x])<+\infty$.

Exemple 30.32. $\sqrt[3]{43}$ et $\sqrt[5]{39}$ sont algébriques sur $\mathbb{Q}$; $\sqrt[3]{43}+\sqrt[5]{39}$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$.

Remarque 30.33. Soit $X \in L$ algébrique sur K le noyau du morphisme (surjectif) d'anneaux : $\left| \begin{array}{ccc} K[X] & \to & K[X] \\ P & \mapsto & P(x) \end{array} \right.$ est un idéal principal engendré par un unique polynôme unitaire sur K, appelé, le polynôme minimal de x sur K et noté P_x. On a donc un isomorphisme d'anneaux $K[X]/(P_x) \simeq K[x]$. comme $K[x]$ est un corps, on voit que P_x est irréductible sur K. De plus par division euclidienne, on voit que $\deg(P_x) = [K[x]\colon K]$. En fait $\{1, x, ..., x^{n-1}\}$, $(n = \deg(P_x))$ est une base de u K-e.v. $K(x)$, on dit que x est algébrique de degré n.

Exemple 30.34.

1. X^2+1 est irréductible sur $\mathbb{R}$ et on a $\mathbb{R}[X]/(X^2+1) \simeq \mathbb{R}[i] = \mathbb{C}$.
2. $\sqrt[4]{2}$ est algébrique de degré 4 sur $\mathbb{Q}$ (car $X^4 - 2$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$ par le critère d'Eisernstein). On a $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq Q(\sqrt[4]{2})$, $\sqrt[4]{2}$ est algébrique de degré 2 sur $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, le polynome minimal $x^2 - \sqrt{2}$.

30.4.2 Extension algébrique

Définition 30.35. *Une extension $K \subseteq L$ est dite algébrique sur K ssi tout élément $x \in L$ est algébrique sur K.*

Proposition 30.36. *Soit $K \subseteq L$ une extension,*

i. Si $[L\colon K]$ est fini alors L est algébrique sur K.

ii. Soit $x_1, x_2, ..., x_n$ des éléments de L. Notons $K[x_1, ..., x_n]$ le plus petit sous-anneau (resp. $K(x_1, ..., x_n)$ le plus petit sous-corps) contenant K et les x_i. Alors les x_i sont algébriques sur K, alors $K[x_1, ..., x_n] = K(x_1, ..., x_n)$ et c'est une extension de degré fini de K.

iii. Si $x, y \in L$ sont algébriques sur K, alors $x+y, -x, xy, x^{-1}$ sont aussi algébriques sur K, autrement dit $\{x \in L, x \text{ algébrique sur } K\}$ est un sous-corps de L, extension algébrique de K.

30.4.3 Adjonction de Racines

Proposition 30.37. *Soit K un corps et $P \in K[X]$ un polynôme non constant. Il existe une extension L de K et $a \in L$ avec $L = K(a)$ et $P(a) = 0$. (On dit que L est un corps de rupture de P sur K).*

Définition 30.38. *Soit K un corps, on dit qu'un polynôme $P \in L'[X]$ non constant est scindé sur K ssi P'' a toute ses racines dans K'', c'est à dire si tous facteurs irréductibles de P dans $K[X]$ sont degré 1.*

Corollaire 30.39. *Soit K un corps, $P \in K[X]$ non constant. Il existe une extension de degré fini L telle que p soit scindé sur L.*

Proposition 30.40. *Soit K un corps. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i. $\forall P \in K[X]$ non constant P est scindé sur K.

ii. Tout (ou les seuls) polynôme(s) irréductible(s) dans $K[X]$ est (sont) de degré 1.

iii. Si L est extension algébrique de K, alors $L = K$.

iv. Tout polynôme non constant a une racine dans K.

Définition 30.41. *Si K vérifie ces conditions, on dit que K est algébriquement clos.*

Proposition 30.42. *K un corps algébriquement clos. Tout polynôme $p = a_n X^n + ... + a_0$ de degré $n \geqslant 1$ se factorise sous la forme $a_n(X - \alpha_1) \cdot ... \cdot (X - \alpha_n)$*

Démonstration. Pas mise en facteur succ ??? comme dans le corollaire 1. □

Proposition 30.43. *Soit K un corps et $p \in K[X]$. Si on a $\deg(p) \leqslant n$ et si p admet $(n+1)$ racines distinctes alors $p = 0$.*

Remarque 30.44.

1. 0 est racine de $a \Leftrightarrow \tilde{a}(0) = ? \Leftrightarrow X | a \Leftrightarrow$ le terme constant de a est nul.
2. $\forall a \in A[X]; a \neq 0, (X-\lambda)^n | a \Rightarrow n \leqslant \deg(a)$. Contraposée $\deg(a) < n$ et $(X-\lambda)^n | a \Rightarrow a = 0$.

Exemple 30.45.

1. $\mathbb{C}$ est algébriquement clos (Théorème d'Alembert).
2. Soit K un sous corps de $\mathbb{C}$ alors $\tilde{K} = \{x \in \mathbb{C}, \text{algébrique sur } K\}$ est un corps algébriquement clos, extension algébrique de K: $\tilde{K}$ est une clôture algébrique de K. Par exemple $\tilde{K} = \mathbb{C}$ mais $\tilde{\mathbb{Q}} \neq \mathbb{C}$ (Il exites des nombres réels non transcendants sur $\mathbb{Q}$.
3. (Théorème de Stenitz)(admis) : tout corps a une clôture algébrique.

30.5 Corps finis

Définition 30.46. *Soit p un nombre premier. On note $\mathbb{F}_p$ le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.*

Remarque 30.47. On sait que l'anneau quotient $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps à p éléments.

Proposition 30.48. *Soit K un corps fini : alors $\text{caract}(K)$ est un nombre premier p. En particulier $[K : \mathbb{F}_p] = f < +\infty$, donc $\text{card}(K) = p^f$.*

Démonstration. car sinon K contient Q ce qui est absurde puisque Q est infini par suite K contient $\mathbb{F}_p$. □

Réciproquement :

Théorème 30.49. *Soit p un nombre premier et $f \geqslant 1$ un entier. Il existe un corps fini à $q = p \times f$ éléments. De plus ce corps est unique à un isomorphisme près. On le note $\mathbb{F}_q$.*

Corollaire 30.50. *Soit K un corps fini alors $\forall n \geqslant 1$ il existe un polynôme $P \in K[X]$ irréductible de degré n.*

Remarque 30.51. Le résultat précédent est encore vrai pour $K = \mathbb{Q}$ (prendre par exemple $X^n - 2$) mais est faux en général par exemple $K = \mathbb{R}$, les polynômes irréductibles sont exactement les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 $a\,x^2 + b\,x + c$ avec $b^2 - 4a\,c < 0$.

Proposition 30.52. *Soit A un anneau principal :*

i. Un élément p de A est irréductible ssi l'anneau quotient de $A/(p)$ est un corps.

ii. Soient $a, b \in A/\{0\}$ de $\text{pgcd}(a,b)$ alors $(d) = (a) + (b)$.

En particulier a, b sont premier entre eux ssi $\exists \lambda, \mu \in A$ avec $\lambda a + \mu b = 1$ (Identité de Bezout).

Démonstration. Preuve page 93 cours CTES. □

30.6 Corps ordonné

Définition 30.53. *Soit $(K; +; \times)$ un corps et $\leqslant$ une relation d'ordre K. On dit que $(K; +; \times; \leqslant)$ est un corps ordonné si et seulement si :*
$\forall (x; y; z) \in K^3, x \leqslant y \Rightarrow x + z \leqslant y + z; x \leqslant y \text{ et } o \leqslant z \Rightarrow x \times z \leqslant y \times z$.

Chapitre 31
Divers

31.1 Loi de compostion externe ou loi d'action

A mettre à part.

Définition 31.1. *Soient Ω un ensemble appelé* ***domaine opérateur*** *et E un autre ensemble. On appelle* ***action, loi d'action*** *ou encore* ***loi de composition externe*** *de Ω sur E toute application $f : |\Omega \times E \to E$. Si l'on désigne par $*$ cette loi alors $\forall(\lambda, a) \in \Omega \times E$, $f(\lambda, a)$ est noté $\lambda * a$.*

31.2 Module

Définition 31.2. *On appelle module sur un anneau commutatif unitaire $(A; \oplus ; \otimes)$ (d'élément neutre 1_A), tout groupe Abélien E muni d'une action (loi de composition interne) $(\alpha; x) \mapsto \alpha \cdot x$ de A sur E telle que pour tout couple $(\alpha; \beta)$ d'élements de A et tout couple $(x; y)$ d'élément de E :*

- $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \otimes \beta) \cdot x$
- $(\alpha \oplus \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$
- $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$
- $1_A \cdot x = x$

Remarque 31.3. Un module sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Le définition entre Module et espace vectoriel sont pratiquement identiques. La seule différence étant la nature du domaine opérateur. C'est un anneau pour un module et un corps pour un espace vectoriel.

31.3 Espace vectoriel

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif. En pratique $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Déjà dans le 1er volume page 39 à 51.

Définition 31.4. *Soit $(\mathbb{K}, \oplus, \otimes)$ un corps commutatif, d'élément neutre $1_{\mathbb{K}}$, E un ensemble, une loi de composition interne notée $+$, une loi externe (action) notée $\cdot$:* $\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda \cdot x \end{array}\right.$ *telles que :*

- $(E, +)$ *est un groupe abélien*
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E, (\lambda \oplus \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$,
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E, \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$,
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \lambda(\mu \cdot x) = (\lambda \otimes \mu) \cdot x$,
- $\forall x \in E, 1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$.

On appelle $\mathbb{K}$-espace vectoriel le triplet $(E, +, \cdot)$ et on dit que E a une structure d'espace vectoriel.

Définition 31.5. *Soient $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F une partie de E ($F\in\mathcal{P}(E)$) et $\oplus$, $\odot$ les lois induites par celles de E. On dit que $(F,\oplus,\odot)$ est un* ***sous $\mathbb{K}$-espace vectoriel*** *si et seulement si $(F,\oplus,\odot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Proposition 31.6. *Soient $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F une partie de E ($F\in\mathcal{P}(E)$) et $\otimes,\odot$ les lois induites par celles de E. On dit que $(F,\oplus,\odot)$ est un* ***sous $\mathbb{K}$-espace vectoriel*** *si et seulement si :*

- *$F\neq\varnothing$, (F n'est pas vide)*
- *$\forall x,y\in F, x\oplus\lambda\odot y\in F$, (F est stable par combinaison linéaire).*

Remarque 31.7. Les lois induites peuvent être également notées $+,\cdot$.

Proposition 31.8. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F_1,F_2 deux sous $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de E. L'ensemble $\{x_1+x_2;(x_1,x_2)\in F_1\times F_2\}$ est un sous $\mathbb{K}$-espace vectoriel de E.*

Définition 31.9. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F_1,F_2 deux sous $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de E. Le sous $\mathbb{K}$-espace vectoriel de E $\{x_1+x_2;(x_1,x_2)\in F_1\times F_2\}$ est appelé* ***somme de F_1*** *et* ***F_2****. On le note F_1+F_2. Ainsi $F_1+F_2=\{x_1+x_2;(x_1,x_2)\in F_1\times F_2\}$.*

Définition 31.10. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F_1,F_2 deux sous $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de E.*

On dit que ***F_1*** *et* ***F_2*** *sont* ***en somme directe*** *si et seulement si tout élément de F_1+F_2 s'écrit comme somme unique d'un élément de F_1 et d'une élément de F_2 :*

Autrement dit $\forall x\in F_1+F_2,\exists!(x_1,x_2)\in F_1\times F_2; x=x_1+x_2$.

Dans ce cas F_1+F_2 s'écrit $F_1\oplus F_2$ et on dit que $F_1\oplus F_2$ est la ***somme directe*** *de F_1 et F_2.*

Proposition 31.11. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F_1, F_2 deux sous $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de E.*

F_1 et F_2 sont en somme directe si et seulement si $F_1\cap F_2=\{0\}$.

Définition 31.12. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F_1,F_2 deux sous $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de E.*

Deux espaces vectoriels sont dits supplémentaires si et seulement si leur somme directe est égale à E : $E=F_1\oplus F_2$ autrement dit $E=F_1+F_2$ et $F_1\cap F_2=\{0\}$.

31.4 Algèbre

Même remarque que précédement.

Définition 31.13. *Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un ensemble, une loi de composition interne notée $+$, une loi externe (action) notée $\cdot$: $\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{K}\times E&\to&E\\(\lambda,x)&\mapsto&\lambda\cdot x\end{array}\right.$ et une loi de composition interne notée $\times$ telles que :*

- *$(E,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel,*
- *$\times$ est distributive sur $+$,*
- *$\forall\lambda\in\mathbb{K},\forall x,y\in E,\lambda\cdot(x\times y)=(\lambda\cdot x)\times y=x\times(\lambda\cdot y)$.*

On appelle $\mathbb{K}$-algèbre le quadruplet $(E,+,\cdot,\times)$ et on dit que E a une structure d'algèbre.

- *Une $\mathbb{K}$-algèbre est dite associative ssi $\times$ est associative,*
- *Une $\mathbb{K}$-algèbre est dite commutative ssi $+$ est commutative,*
- *Une $\mathbb{K}$-algèbre est dite unitaire (ou unifère) ssi E contient un élément neutre pour $\times$.*

Remarque 31.14.

Définition 31.15. *Soient $(E,+,\cdot,\times)$ une $\mathbb{K}$-algèbre, F une partie de E ($F\in\mathcal{P}(E)$) et $\oplus,\odot$, $\otimes$ les lois induites par celles de E. On dit que $(F,\oplus,\odot,\otimes)$ est une* ***sous $\mathbb{K}$-algèbre*** *si et seulement si $(F,\oplus,\odot,\otimes)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.*

Proposition 31.16. *Soient* $(E, +, \cdot, \times)$ *une* $\mathbb{K}$*-algèbre,* F *une partie de* E $(F \in \mathcal{P}(E))$ *et* $\oplus$, $\odot, \otimes$ *les lois induites par celles de* E*. On dit que* $(F, \oplus, \odot, \otimes)$ *est une* ***sous*** $\mathbb{K}$***-algèbre*** *si et seulement si :*

- $(F, \oplus, \odot)$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel,*
- $\forall x, y \in F, x \otimes y \in F$*, (*$F$ *est stable pour la troisième loi).*

Autrement dit

- $F \neq \varnothing$*, (*F *n'est pas vide)*
- $\forall x, y \in F, x \oplus \lambda \odot y \in F$*, (*$F$ *est stable par combinaison linéaire).*
- $\forall x, y \in F, x \otimes y \in F$*, (*$F$ *est stable pour la troisième loi).*

Remarque 31.17. Les lois induites peuvent être également notées $+, \cdot, \times$.

Chapitre 32
Arithmétique

Note 32.1. Cette leçon doit s'intituler $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ ensembles des entiers naturels et relatifs. Définitions, propriétés et arithmétique des entiers. Ces définitions et propriétés peuvent se retrouver dans les leçons sur les groupes, les anneaux ou d'autres comme exemples.

Il manque le début du cours ! RAjouter la construction de $\mathbb{N}$ puis la notion de divisibilité.

32.1 Principe de récurrence et axiome d'ordre

Note 32.2. (Rappel) Propriété héréditaire : Soit P une propriété portant sur $n \in \mathbb{Z}$, notée $P(n)$. Soit $n_0 \in \mathbb{Z}$, P est héréditaire à partir du rang n_0 si et seulement si $\forall n \in \mathbb{Z}: n \geqslant n_0, P(n) \Rightarrow P(n+1)$. (Cours Émilie).

Théorème 32.3. *(... de récurrence) Si $P(n_0)$ est vraie et si P est héréditaire à partir du rang n_0 alors $\forall n \in \mathbb{Z}; n \geqslant n_0; P(n)$ est vraie. (Cours Émilie).*

Proposition 32.4. *Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un élément minimal (Cours Émilie).*

Proposition 32.5. *Les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

i. (1er principe de récurrence) Soit A une partie non vide de $\mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$, si $n_0 \in A$ et $\forall n \geqslant n_0; n \in A \Rightarrow n+1 \in A$ alors $A = \mathbb{N} \cap [n_0; +\infty[= \{n_0; n_0+1; ...\}$.

ii. (2ème principe de récurrence) Soit A une partie non vide de $\mathbb{N}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$, si $n_0 \in A$ et $\forall n \geqslant n_0, n_0; n_0+1; ...; n \in A \Rightarrow n+1 \in A$ alors $A = \mathbb{N} \cap [n_0; +\infty[$.

iii. (axiome du bon ordre) Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet au plus un plus petit élément.

Démonstration. Cours de licence Maths arithmétique algèbre (Zeng). □

32.2 $\mathbb{Z}$ possède une structure de groupe.

Proposition 32.6. $(\mathbb{Z}; +)$ *est un groupe.*

Proposition 32.7. $(a\,\mathbb{Z}; +)$ *est un sous-groupe de* $(\mathbb{Z}; +)$, $\forall a \in \mathbb{Z}$.

Remarque 32.8. En fait, ce sont les seuls sous-groupe de $\mathbb{Z}$ et tout sous-groupe de $(\mathbb{Z}; +)$ s'écrit sous cette forme. C'est ce qu'énonce la propriété suivante :

Théorème 32.9. *Soit A un partie non vide de $\mathbb{Z}$.*
(A sous-groupe de $\mathbb{Z}$) $\Leftrightarrow (\exists! a \in \mathbb{N}; A = a\,\mathbb{Z})$.

32.3 Division euclidienne

Théorème 32.10. *Étant donné 2 entiers a et b avec $b > 0$, il existe un unique couple $(q; r)$ tel que $a = b\,q + r$ avec $0 \leqslant r < b$.*

Définition 32.11. *On appelle division euclidienne ... voir page 217 et 218.*

32.4 $\mathbb{Z}$ possède une structure d'anneau. L'anneau $(\mathbb{Z}, +, \times)$

32.4.1 Diviseur, multiple, PPCM et PGCD

Définition 32.12. *Soit $a; b \in \mathbb{Z}$, on dit que « b divise a » si et seulement si, il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b \times q$. On dit aussi que « b est un diviseur de a » ou encore « a est un multiple de b ».*

Théorème 32.13. *(Identité de Bezout) Soit a et b 2 entiers non nuls. Il existe un diviseur commun $d > 0$, tel que tout diviseur commun à a et b divise d. De plus, il existe des entiers u et v tels que $a \times u + b \times v = d$.*

Définition 32.14. *L'entier d s'appelle le plus grand diviseur commun à a et b, noté* $\mathrm{PGCD}(a; b)$ *ou plus simplement $(a; b)$.*

Remarque 32.15. Le couple $(u; v)$ n'est pas unique !

Lemme 32.16. *(Algorithme d'Euclide) Soit $a; b; c$ 3 entiers tels que $a = b \times q + c$ avec $q \in \mathbb{Z}$ alors* $\mathrm{PGCD}(a; b) = \mathrm{PGCD}(b; c)$.

Corollaire 32.17. $(a; b) \times [a; b] = |a \times b|$ *et* $[a; b] = \frac{|a \times b|}{(a; b)}$.

Proposition 32.18. *Les seuls éléments inversibles de $\mathbb{Z}$ sont : -1 et 1.*

32.4.2 Nombres premiers entre eux

Définition 32.19. *Deux éléments sont premiers entre eux si et seulement si, leur pgcd est* 1.

Théorème 32.20. *(Théorème de Bezout) Deux éléments sont premiers entre eux si et seulement si, il existe un couple d'entiers $(u; v)$ tel que $a \times u + b \times v = 1$.*

Note 32.21. Attention : $(a \times u + b \times v = d) \nRightarrow (\mathrm{pgcd}(a; b) = d)$.

Théorème 32.22. $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \mathrm{PGCD}(a; b)\mathbb{Z}$ *et* $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = \mathrm{PPCM}(a; b)\mathbb{Z}$.

Théorème 32.23. *(Théorème de Gauss)* $(a|(b \times c), a \wedge b = 1) \Rightarrow (a|c)$.

Autrement dit, si a divise un produit et si a et premier avec un des facteurs alors a divise le second.

Théorème 32.24. *(Equation diophantienne) L'équation $a \times x + b \times y = c$ a des solutions entières si et seulement si pgcd(a,b) divise c. Si (x_0, y_0) est une solution entière, alors toute solution s'exprime comme suit :*
$\begin{cases} x = x_0 - b \times \frac{t}{d} \\ y = y_0 + a \times \frac{t}{d} \end{cases}$ *où $t \in \mathbb{Z}$.*

Théorème 32.25. *Soient a, b deux entiers non nuls. Il existe un unique multiple commun à a et b tel que tout multiple commun à a et b est un multiple de m.*

Définition 32.26. *L'entier $m > 0$ s'appelle le plus petit multiple commun à a et b. On le note* $m = \mathrm{ppcm}(a, b)$.

Proposition 32.27. *$k\mathbb{Z}; k \in \mathbb{N}$ est un sous-anneau de $\mathbb{Z}$.*

32.4.3 Nombres premiers

Définition 32.28. *Un élément $p \in \mathbb{N}$ est dit* ***premier*** *si et seulement si :*

il n'est pas factorisable en produit de 2 entiers inversibles ou de 2 entiers non inversibles.

Autrement dit, p n'est factorisable en un produit de 2 facteurs, que si l'un des facteurs est inversible et pas l'autre.

Remarque 32.29. Rappelons que 1 est l'unique élément inversible de $\mathbb{N}$.

Exemple 32.30.

Nombre	Décomposition	Premier	Raison
1	$\mathbf{1 \times 1}$	non	**Produit de 2 nombres inversibles**
2	$\mathbf{1 \times 2}$	oui	**Uniquement produit d'1 inversible et 1 non inversible**
3	$\mathbf{1 \times 3}$	oui	Idem
4	1×4 ; $\mathbf{2 \times 2}$	non	**Produit de 2 nombres non inversibles**
5	$\mathbf{1 \times 5}$	oui	Uniquement Produit d'1 inversible et 1 non inversible
6	1×6 ; $\mathbf{2 \times 3}$	non	Produit de 2 nombres non inversibles
7	$\mathbf{1 \times 7}$	oui	Uniquement Produit d'1 inversible et 1 non inversible
8	1×8 ; $\mathbf{2 \times 4}$	non	Produit de 2 nombres non inversibles
...	...	...	...

Pour caractériser un nombre premier, on préfèrera les proprositions suivantes :

Proposition 32.31. *Un entier p est premier si et seulement si il vérifie l'une des propositions suivantes :*

1. $\begin{cases} p \geqslant 2 \\ \forall a \in \mathbb{N}^*, (a|p) \Rightarrow (a = 1 \text{ ou } a = p) \end{cases}$
2. *Il n'a que deux diviseurs.*

Remarque 32.32. Dans une proposition, si la condition pour une variable est d'être un nombre premier on la notera p et n dans le cas contraire.

Lemme 32.33. *Si $p|a \times b$ et $(p;a) = 1$ alors $p|b$. (Lemme de Gauss).*

Proposition 32.34. *Soit p en entier premier, $n \in \mathbb{N}$ et $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{Z}$.*

$$On\ a\ p|\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) \Leftrightarrow (\exists j \in \mathbb{N}_n, p|x_j)$$

Autrement dit, si p divise un produit et p premier alors p divise au moins un des facteurs.

Démonstration. Monier livre Analyse 1, page 121. □

Rajouter les propostions page 121

Proposition 32.35. *Tout entier $n \geqslant 2$ admet au moins un diviseur premier. De plus si n n'est pas premier, il admet un diviseur premier $d \leqslant \sqrt{n}$.*

Théorème 32.36. *(Théorème d'Euclide) La suite des nombres premiers est illimitée.*

Théorème 32.37. *(Théorème fondamentale de l'arithmétique) Tout entier > 1 se factorise d'une manière unique comme un produit de nombres premiers.*

Proposition 32.38. *Si les décompositions en facteurs premiers de 2 entiers a et b s'écrivent :*
$a = p_1^{a_1} \times ... \times p_r^{a_r}$ *et* $b = p_1^{b_1} \times ... \times p_r^{b_r}$ *alors :*
$\text{pcgd}(a,b) = p_1^{\min(a_1,b_1)} \times ... \times p_r^{\min(a_r,b_r)}$, $\text{ppcm}(a,b) = p_1^{\max(a_1,b_1)} \times ... \times p_r^{\max(a_r,b_r)}$

Corollaire 32.39. $a \times b = \text{pgcd}(a,b) \times \text{ppcm}(a,b)$.

Remarque 32.40. $E = 2\mathbb{Z} = \{0; \pm 2; \pm 4; ...\}$.
On appelle nombre premier de E s'il n'est pas produit de deux entiers pairs :

– $840 = (2 \times 3) \times (2 \times 5) \times (2 \times 7)$

– $840 = (2\times 1)\times(2\times 7)\times(2\times 15)$

$\left\{\begin{smallmatrix} d|a \\ d|b \end{smallmatrix}\right. \Rightarrow d|\text{pgcd}(a,b)$ et $\left\{\begin{smallmatrix} a|m \\ b|m \end{smallmatrix}\right. \Rightarrow \text{ppcm}(a,b)|m$

Proposition 32.41. *Toute partie non vide majorée de $\mathbb{Z}$ a un plus grand élément. (Origine axiome de construction de $\mathbb{N}$).*

32.5 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ définition et propriétés. L'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$

Table de Pythagore par l'addition et la multiplication pour $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

$\bar{+}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

$\bar{\times}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Définir homomorphisme :

Proposition 32.42. *Application π:* $\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ x & \mapsto & \bar{x} \end{array}$ *est un homomorphisme d'anneau appelé projection canonique de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.*

Note 32.43. π est surjective et non injective. Autrement dit, on montre que :

- $\pi(x+y) = \pi(x)\bar{+}\pi(y)$
- $\pi(x\times y) = \pi(x)\bar{\times}\pi(y)$

Remarque 32.44. En particulier sa structure d'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$. Base de construction d'un anneau, d'un groupe.

Proposition 32.45. *Soit un entier n. La relation $\mathcal{R}_n$ dans $\mathbb{Z}$ définie par :*
$(a\mathcal{R}_n b) \Leftrightarrow (n|(a-b))$ ou $((a-b)\in n\mathbb{Z})$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.
On écrit alors $a \equiv b[n]$ pour exprimer que a, b sont congrus modulo n.

Définition 32.46. *L'ensemble quotient $\mathbb{Z}/\mathcal{R}_n$ est noté $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.*

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, ..., \overline{n-1}\}$

Exemple 32.47. L'heure est comptée dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$.

Remarque 32.48. La relation de congruence est plus faible que l'égalité :
En fait $(a=b) \Leftrightarrow (a\equiv b[n], \forall n \geqslant 1)$.

Proposition 32.49. *Soit un entier $n \geqslant 1$ et a, b, c, d des entiers quelconques alors :*
$\left\{\begin{smallmatrix} a\equiv b \\ c\equiv d \end{smallmatrix}\right. [n] \Rightarrow \left\{\begin{smallmatrix} a+c\equiv b+d \\ a\cdot c\equiv b\cdot d \end{smallmatrix}\right. [n]$. *À vérifier !*

Remarque 32.50.

- En particulier $\forall m, a\equiv b[n] \Rightarrow a\times m = b\times m[n]$.
- A-t-on aussi ? $\forall m$, $a \equiv b[n] \Rightarrow a^m \equiv b^m[n]$ (voir Monier) La propriété est-elle vraie pour d'autres opérations.
- Cela signifie que la relation d'équivalence est compatible avec l'addition et la multiplication de $\mathbb{Z}$.

Proposition 32.51.

1. *Les loi $+$ et $\cdot$ définies sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ par : $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$ et $\bar{a}\cdot\bar{b} = \overline{a\times b}$ sont des lois de composition interne sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.*

2. $(\mathbb{Z}/_n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *est un anneau.*

Remarque 32.52. Si dans l'anneau $(\mathbb{Z}, +, \times)$ on a : $(a\,b = 0) \Rightarrow (a = 0 \text{ ou } b = 0)$, ce n'est pas le cas dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Autrement dit, il n'est pas intègre.

Exemple 32.53. Soit $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, ..., \bar{5}\}$. $\bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{6} = \bar{0}$ or $\bar{2} \neq \bar{0}, \bar{3} \neq \bar{0}$.

Définition 32.54. *Un élément* $\bar{a}$ *d'un anneau* $(\mathbb{Z}/_n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *est dit inversible si et seulement si :* $\exists \bar{b} \in \mathbb{Z}/_n\mathbb{Z}; \bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{1}$ *autrement dit* $a \cdot b \equiv 1\ [n]$.

Définition 32.55. *Soit un entier* $n \geqslant 2$.
L'ensemble $(\mathbb{Z}/_n\mathbb{Z}, \cdot)$ *des éléments inversibles de* $\mathbb{Z}/_n\mathbb{Z}$ *est noté* $(\mathbb{Z}/_n\mathbb{Z})^*$.

Proposition 32.56. *Soit un entier* $n \geqslant 2$.
L'ensemble des éléments inversibles $(\mathbb{Z}/_n\mathbb{Z})^*$ *de l'anneau* $(\mathbb{Z}/_n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *est un groupe pour la multiplication :* $((\mathbb{Z}/_n\mathbb{Z})^*, \cdot)$ *est un groupe.*

Proposition 32.57. *Soit un entier* $n \geqslant 2$ *et* $\bar{a} \in \mathbb{Z}/_n\mathbb{Z}$ *alors :*
($\bar{a}$ *est inversible)* $\Leftrightarrow$ *(a est premier avec n).*

Corollaire 32.58. *Soit un entier p premier, alors* $\mathbb{Z}/_p\mathbb{Z}$ *est un corps (on le note* $\mathbb{F}_p$*), i.e. tous ses éléments sauf* $\bar{0}$ *sont inversibles,* $(\mathbb{Z}/_p\mathbb{Z})^* = \{\bar{1}, ..., \overline{p-1}\}$*, il y a donc* $p-1$ *éléments inversibles.*

Définition 32.59. *Soit un entier* $n \geqslant 2$,

- *On appelle* ***indicatrice d'Euler****, et on note* $\varphi(n)$ *le nombre d'élément inversible de* $\mathbb{Z}/_n\mathbb{Z}$ *:*
  $\varphi(n) = \text{card}(\{1 \leqslant k \leqslant n-1; \text{pgcd}(k, n) = 1\})$*, c'est le cardinal i.e. l'ordre de l'ensemble des nombres premiers avec n.*
- *On appelle* ***fonction indicatrice d'Euler*** *l'application :*
  $$\varphi: \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N}\backslash\{0,1\} & \to & \mathbb{N}^* \\ n & \mapsto & \varphi(n) \end{array} \right.$$

Remarque 32.60. $\varphi(p) = p - 1$ si p est premier.

Théorème 32.61. *(Théorème d'Euler) Soient* $n \geqslant 2$ *et a deux entiers premiers entre eux alors :* $a^{\varphi(n)} \equiv 1\ [n]$.

Remarque 32.62. Attention ! Cela ne signifie pas que $\varphi(n)$ soit nécessairement le plus petit entier m tel que $a^m \equiv 1[n]$, c'est à dire l'ordre de a dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Une recherche manuelle s'impose. Exemple : dans $\mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$, $\varphi(25) = 20$ et $19^{20} \equiv 1[25]$ mais aussi $19^{10} \equiv 1[25]$.

Corollaire 32.63. *(Petit théorème de Fermat) Soit p un nombre premier alors :*

1. *Sans condition supplémentaire :*
   $a^p \equiv a,\ [p]$.
2. *si de plus* $\text{pgcd}(a, p) = 1$ *(a, p premiers entre eux) :*
   on a toujours $a^p \equiv a,\ [p]$ *mais aussi* $a^{p-1} \equiv 1,\ [p]$.

Démonstration. CTES 2004-2005 envoi 2 page 12 ou cours Zeng. □

Théorème 32.64. *(Théorème de Wilson) Soit un entier p.*
p premier $\Leftrightarrow$ $(p-1)! \equiv -1,\ [p]$.

Proposition 32.65. *Soient* a, b, d *des entiers quelconques et* r, s *des entiers positifs alors :*

1. $\left\{ \begin{array}{l} a \equiv b\ [r] \\ a \equiv b\ [s] \end{array} \right. \Leftrightarrow a \equiv b, [\text{ppcm}(r, s)]$.

2. *$a\,d \equiv b\,d\ [r]$ et $d \not\equiv 0[r]$ $\Rightarrow a \equiv b\ \left[\frac{r}{\mathrm{pgcd}(r,d)}\right]$. Autrement dit, si d, r sont premiers $a \equiv b\ [r]$ et on a : $a \equiv b[r] \Rightarrow a \times d = b \times d[r]$.*

Note 32.66. $\left\{ \begin{smallmatrix} a \equiv b & [r] \\ a \equiv b & [s] \end{smallmatrix} \right. \Rightarrow ? \Leftarrow a \equiv b, [r; s]$ Quelle propriété a-t-on ? si on remplace ppcm(r,s) par $r \times s$.

Proposition 32.67. *L'équation $a\ x \equiv b\ [n]$ admet des solutions si et seulement si* $\mathrm{pgcd}(a, n)$ *divise b.*

Remarque 32.68. Si a est inversible (i.e.) a et n premiers entre eux alors $a \times x = b[n] \Leftrightarrow x \equiv a^{-1} \times b[n]$ où a^{-1} est l'inverse de a modulo n.

Théorème 32.69. *(Théorème des restes chinois) Soient le système S où m_1, ..., m_γ sont des entiers positifs deux à deux premiers entre eux :*

$$(S)\begin{cases} x \equiv b_1 & [m_1] \\ \dots & \\ x \equiv b_\gamma & [m_\gamma] \end{cases}$$

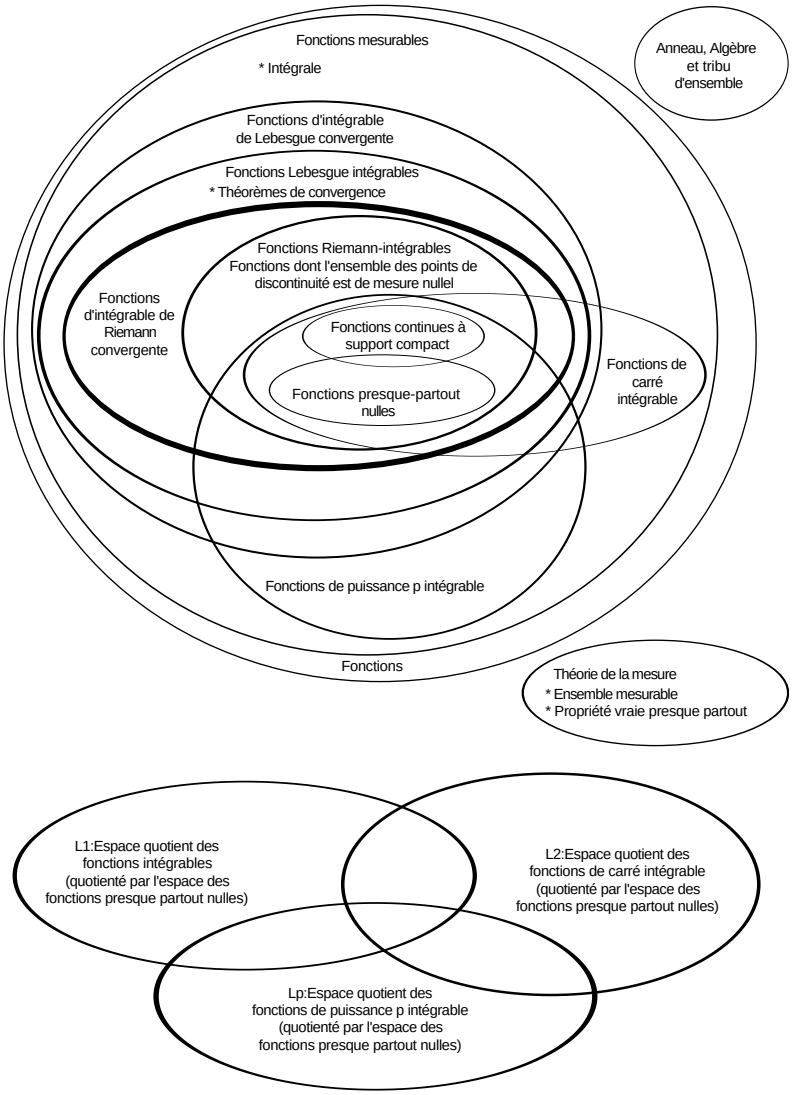
Le système (S) admet une unique solution x_0 modulo $m = m_1 \times \dots \times m_\gamma$.

Autrement dit une seule solution x_0 dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ et dans $\mathbb{Z}$ toutes les solutions sont données par $x = x_0 + k \times (m_1 \times \dots \times m_\gamma)$. Méthode pour trouver x_0 : $x_0 = \sum_{i=1}^{\gamma_i} b_i\, c_i\, m_i'$ où pour m_i donné, c_i est l'inverse de $m_i' = \frac{m}{m_i}\ [m_i]$ ou $x_0 = \sum_{i=1}^{\gamma} b_i \times \frac{m}{m_i} \times c_i$ avec c_i inverse de $\frac{m}{m_i}$ modulo $[m_i]$. $\gamma_i = \frac{b_i \times M}{m_i} \times c_i$.

Proposition 32.70. *Soient m et n deux entiers premiers entre eux alors :*
$\varphi(m\,n) = \varphi(m) \times \varphi(n)$

Proposition 32.71. *Soit p un nombre premier et un entier $n > 0$ alors :*
$\varphi(p^n) = (p-1)p^{n-1}$

Chapitre 33
Analyse Réelle



Synthèse des classes de fonctions du point de vue de l'intégration.
Deux fonctions continues égales presque partout sont égales partout ? ! !.

33.1 Objectifs

Transformée de Fourier dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{S}^1$ (cercle unité).

33.1.1 Plan d'étude

– Espace $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$: $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}; f \in \mathcal{L}^0, \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx < +\infty\}$. Ce sont des espaces vectoriels de dimension infinie, où l'on définit une semi-norme $N_p(f) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$. $N_p(f)$ sera une norme sur L^p.

- On quotiente par $\mathcal{N}$ espace des fonctions négligeables et on note : $L^p(\mathbb{R}^n) = \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)/\mathcal{N}$. Sur L^p on récolte alors une norme dite norme de L^p ou d'indice p : appelée norme de Hölder : si $[f] \in L^p$ on note $\|[f]\|_p = N_p(f)$, si $p = 1, 2$ on dit que N_p est la norme de la convergene en moyenne et en moyenne quadratique . Attention $[f]$ est une classe d'équivalence alors que f n'est qu'un représentant de cette classe.
- On obtient le résultat : Théorème de Riesz : $(L^p(\mathbb{R}^n), \|.\|_p)$ est un espace de Banach.
- On obtient des théorèmes de densité : Les espaces L^p admettent des sous-espaces denses remarquables : en désignant par $C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $C_C(\mathbb{R}^n)$ les espaces des fonctions indéfiniment dérivables et resp. continues à support compact, par $\mathcal{E}\mathrm{sc}^{\lambda_d}(\Omega, \mathbb{K})$, l'ensemble des fonctions en escalier λ_d-intégrable sur Ω et par $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}^{\mu}(\Omega, \mathbb{K})$, l'ensemble des fonctions $\mathcal{T}$-étagée μ-intégrable sur Ω. $C_C^\infty(\mathbb{R}^n), C_C(\mathbb{R}^n), \mathcal{E}\mathrm{sc}^{\lambda_d}(\Omega, \mathbb{K}), \mathcal{E}_{\mathcal{T}}^{\mu}(\Omega, \mathbb{K}), L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$ sont denses dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ au sens de la norme $\|.\|_p, p \in [1, +\infty[$ pour (? $p = +\infty$ pour $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}^{\mu}(\Omega, \mathbb{K})$?).

Remarque 33.1. Dans cette étude, on prendra la plus part du temps : $n = 1$, la généralisation ne posant pas de problème. Et p sera un réel $p \geqslant 1$ la plus part du temps on prendra $p = 1, 2$ ou ∞. Une grande partie du cours sera consacrée à $p = 1$, car les autres cas se ramènent au cas $p = 1$.

33.1.2 Le cas $p = 1$

$L^1(\mathbb{R}^n)$ est le plus intéressant Soit deux fonctions $f,\ g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f \times g \notin$ nécessairement à $L^1(\mathbb{R}^n)$, $\times$ n'est pas une loi de composition interne par contre le produit de convolution défini par $* : \left| \begin{array}{ccc} L^1(\mathbb{R}^n) \times L^1(\mathbb{R}^n) & \to & L^1(\mathbb{R}^n) \\ (f, g) & \mapsto & \int f(x-y)g(y)dy \end{array} \right.$ on note dans ce cas $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dy$. On a alors les résultats suivants :

L'uplet suivant	est
$(L^1(\mathbb{R}^n), +, \cdot)$	un Espace vectoriel
$(L^1(\mathbb{R}^n), +, *)$	un Anneau commutatif
$(L^1(\mathbb{R}^n), +, \cdot, *)$	une Algèbre commutative non unitaire

Il existe une fonction appelée transformée de Fourier qui vérifie les lois $+, \cdot, *$

$\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}^n)_{(+,\cdot,*)} \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)_{(+,\cdot,\times)}$. Qui permet le transport de la structure $(+, \cdot, *) \to (+, \cdot, \times)$ où $\mathcal{C}_0$ est l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$.

Théorème de densité :

On a le résultat de densité suivant :

Soit $\overline{C_C^\infty(\mathbb{R}^n)}$ l'adhérence pour la norme $\|.\|_p$ de l'ensemble des fonctions infiniment dérivables à support compact, $\overline{C_C^\infty(\mathbb{R}^n)} = L^p(\mathbb{R}^n)$. Autrement dit $C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ ou les fonctions de $L^p(\mathbb{R}^n)$ peuvent être approchées par une suite de fonctions de $C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Corollaire 33.2. *$C_C^\infty(\mathbb{R}^n), L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$ sont denses dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

33.1.3 Le cas $p = 2$

$L^2(\mathbb{R}^n)$ est intéressant dans le sens Hilbertien, i.e. on peut définir sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ un produit scalaire : $< f, g > = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx$. $(L^2(\mathbb{R}^n), < .|. >)$ est alors complet et on obtient un espace de Hilbert.

33.1.4 Le cas $p = \infty$

$L^\infty(\mathbb{R}^n) = L^\infty(\mathbb{R}^n)/\mathcal{N}, \|[f]\|_\infty = \inf\{\alpha \in [0, +\infty]; |f| \leqslant \alpha, p.p\} = \sup \mathrm{Ess}|f(x)|$(sup essentiel)

33.1.5 le groupe $(\mathbb{S}^1, \times)$

On va définir un autre groupe que $(\mathbb{R}^n, +)$, c'est le groupe $(\mathbb{S}^1, \times)$ où $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\} = \{e^{i\theta}; \theta \in [0, 2\pi[\}$ est le cercle trigonométrique. On passe de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{S}^1$ par un quotient, si on quotiente par z^n, on obtient un tore.

Sur $L^p(\mathbb{S}^1)$ la transformée de Fourier n'est autre que la transformée de Fourier vue en Deug :

$\mathcal{F}$: $\left|\begin{array}{ccccc} L^1(\mathbb{S}^n)_{(+,\cdot,*)} & \to & \mathcal{C}_0(\mathbb{Z})_{(+,\cdot,\times)} \\ f & \mapsto & \hat{f} \end{array}\right.$, $\mathcal{F}$ n'est pas surjective, $\mathbb{S}^1$ est compact mais pas $\mathbb{R}^n$, l'espace d'arrivée est $\mathcal{C}_0(\mathbb{Z})$ et non $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$.

33.1.6 Méthode de résolution des exercices par densité:

On veut montrer une propriété $\mathcal{P}$ pour toute fonction de $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n), p \geqslant 1$, sachant que $A \subset \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ alors :

i. On montre la propriété pour A (si c'est possible), par exemple $A = \mathcal{E}\text{sc}(\mathbb{R}^n)$ espace des fonctions escaliers sur $\mathbb{R}^n$, ou $C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ensemble des fonctions de classe C^∞ à supports compacts, ou encore $A = L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$.

ii. Puis on applique un raisonnement topologique de densité : On essaie de déduire la propriété $\mathcal{P}$ pour toute fonction en l'approchant par des fonctions de A.

33.2 Espace $\mathcal{L}^0$

... Cours de calcul intégral 1er semestre (Fonctions mesurables + définition de l'intégrale sur $\mathcal{L}^{0+}$)

Prérequis cours sur le calcul intégral :

- Théorème de convergence monotone de Beppo Levi.
- Théorème de convergence dominée de Lebesgue.
- Lemme de Fatou.
- Théorème de fubini.
- Théorème de Tonelli.
- Théorème du changement de variable.
- Théorèmes relatifs à une certaine classe de fonction définie par une intégrale : théorème de convergence, continuité et de dérivation.

Remarque 33.3.

- On notera $\mathcal{L}^0$ l'ensemble des fonctions mesurables.
- Rajouter le passage sur les majorants essentiels p.151 Intégration Hermann.

33.3 Applications mesurables et espace $\mathcal{L}_0$

(A remettre dans la partie mesure et intégrale de Lebesgue).

Les applications mesurables sont à la théorie des mesures ce que sont les fonctions continues pour la topologie, elle conserve la mesurabilité d'un ensemble, par rapport à des σ-anneaux ou tribu.

33.3.1 Définition

Définition 33.4. *Soit $(E_1, \mathcal{T}_1)$ et $(E_2, \mathcal{T}_2)$ deux espaces mesurables.*

On appelle application ***($\mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2$ mesurable) ou mesurable****, toute application $f\colon E_1 \to E_2$ telle que :*

- $\forall A \in \mathcal{T}_2, f^{-1}(A) \in \mathcal{T}_1$,
- *autrement dit, $f^{-1}(\mathcal{T}_2) \subset \mathcal{T}_1$ ou encore si A et $\mathcal{T}_2$-mesurable alors $f^{-1}(A)$ est $\mathcal{T}_1$-mesurable.*

Remarque 33.5.

1. Si E_2 est muni d'une topologie $\mathcal{O}$, on convient de dire qu'une application $f: E_1 \to E_2$ est mesurable ou $\mathcal{T}_1$-mesurable si et seulement si elle est $\mathcal{T}_1 - \sigma(\mathcal{O})$ mesurable.
2. Si $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ sont les tribus boréliennes de deux espaces topologiques E_1, E_2, on dit que l'application est borel-mesurable ou borélienne.
3. Entre deux espaces mesurables, il n'existe pas forcément d'application mesurable !
4. Si $\mathcal{T}_1 = \mathcal{P}(E)$, alors au contraire toute application $f: E_1 \to E_2$ est mesurable.
5. $f^{-1}(\mathcal{T}_2)$ est une tribu, c'est la plus petite tribu rendant f mesurable, dite tribu engendrée par f, on la note $\sigma(f)$.
6. En pratique, $\mathcal{T}_2$ sera une tribu borélienne de $\mathbb{R}$, il sera donc nécessaire de supposer $(E_1, \mathcal{T}_1)$ probabilisable.

33.3.2 Propriétés générales

33.3.2.1 "Critère de mesurabilité"

Théorème 33.6. *Soit $(E_1, \mathcal{T}_1)$ et $(E_2, \mathcal{T}_2)$ deux espaces probabilisables, Ω un sous-ensemble de $\mathcal{P}(E_2)$ engendrant $\mathcal{T}_2$.*
(l'application $f: E_1 \to E_2$ est mesurable) $\Leftrightarrow$ ($f^{-1}(\Omega) \subset \mathcal{T}_1$)

33.3.2.2 Composition d'applications mesurables

Théorème 33.7. *Soit $(E_1, \mathcal{T}_1)$, $(E_2, \mathcal{T}_2)$ et $(E_3, \mathcal{T}_3)$ trois espaces mesurables.*
Si $f: E_1 \to E_2$ et $g: E_2 \to E_3$ sont deux applications mesurables alors :
l'application $g \circ f: E_1 \to E_3$ est mesurable.

33.3.2.3 Applications continues et mesurabilité

Proposition 33.8. *Soit $(E_1, \mathcal{B}_1)$ et $(E_2, \mathcal{B}_2)$ deux espaces probabilisables, munis de leurs tribus boréliennes respectives.*
Toute application $f: E_1 \to E_2$ continue est borélienne.

33.3.2.4 Notation

Définition 33.9. *On désignera par $\mathcal{L}^0(E_1, \mathcal{T}_1, E_2, \mathcal{T}_2)$ l'ensemble des applications mesurables de $(E_1, \mathcal{T}_1)$ dans $(E_2, \mathcal{T}_2)$.*

Remarque 33.10. Les ensembles $\mathcal{L}^0(E, \mathcal{T}, \mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $\mathcal{L}^0(E, \mathcal{T}, \bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$, $\mathcal{L}^0(E, \mathcal{T}, \mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ et $\mathcal{L}^0(E, \mathcal{T}, \bar{\mathbb{R}}^+, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}^+))$ pourront être notés $\mathcal{L}^0(\mathcal{T})$, $\overline{\mathcal{L}^0}(\mathcal{T})$, $\mathcal{L}^0_+(\mathcal{T})$, $\overline{\mathcal{L}^0}_+(\mathcal{T})$ si aucune confusion n'est possible.

33.3.3 Applications mesurables à valeur dans un espace métrique

Théorème 33.11. *Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables $E \to F$ où E est un espace mesurable et F un espace métrique.*

Si (f_n) converge simplement vers f, alors f est également mesurable.

33.3.4 Application à valeurs dans un espace produit

Proposition 33.12. *Soient $(E, \mathcal{T}), (E_1, \mathcal{T}_1), ..., (E_n, \mathcal{T}_n)$ des espaces probabilisables, $\left(\prod_{i=1}^n E_i, \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{T}_i\right)$ l'espace probabilisable produit et f_i: $E \to E_i$, $i = 1, ..., n$ des applications mesurables alors l'application* $\bar{f}: \left| \begin{array}{ccc} E & \to & \prod_{i=1}^n E_i \\ x & \mapsto & (f_i(x), ... f_n(x)) \end{array} \right.$ *est mesurable.*

Où est défini la tribu produit ! ou alors définir la tribu produit auparavant. A déplacer vers intégration.

33.3.5 Applications numériques mesurables

Il s'agit d'étudier le cas particulier des applications de $E \to \mathbb{R}$ ou $\bar{\mathbb{R}}$ mesurables où $\mathbb{R}$, $\bar{\mathbb{R}}$ sont munis de leurs tribus boréliennes. On a vu que dans ce cas E doit être un espace probabilisable (dans le cas contraire, il est impossible de définir des applications de $E \to \mathbb{R}$ mesurables).

33.3.5.1 "Critère de mesurabilité"

Proposition 33.13. *Soit $\mathcal{T}$ une tribu de partie de E.*
L'application $f : E \to \bar{\mathbb{R}}^+$ est dite $\mathcal{T}$-mesurable si et seulement si :

i. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^+; f^{-1}([a,b[) \in \mathcal{T}$, *ce qui peut s'écrire* $[a \leqslant f < b] \in \mathcal{T}$,

ii. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^+; f^{-1}([a,b]) \in \mathcal{T}$,*ce qui peut s'écrire* $[a \leqslant f \leqslant b] \in \mathcal{T}$,

iii. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^+; f^{-1}([a,+\infty[) \in \mathcal{T}$,*ce qui peut s'écrire* $[a \leqslant f < +\infty] \in \mathcal{T}$,

iv. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^+; f^{-1}(]a,+\infty[) \in \mathcal{T}$,*ce qui peut s'écrire* $[a < f < +\infty] \in \mathcal{T}$,

v. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^+; f^{-1}([a,+\infty]) \in \mathcal{T}$,*ce qui peut s'écrire* $[a \leqslant f] \in \mathcal{T}$,

vi. Idem en remplaçant $\mathbb{R}^+$ par $\mathbb{Q}^+$

vii. Idem en remplaçant $\mathbb{Q}^+$ par l'ensemble des nombres dyadiques $D^+ = \{k \times 2^{-n}; k,n \in \mathbb{N}\}$.

viii. $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$ on a $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$, l'espace $\bar{\mathbb{R}}^+$ étant muni de la topologie d'alexandroff.

ix. Si $\mathcal{C}$ est une classe de partie de $\mathbb{R}^+$ vérifiant $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$ alors on a $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$ pour tout $B \in \mathcal{C}$, l'espace $\bar{\mathbb{R}}^+$ étant muni de la topologie d'alexandroff.

Démonstration. □

Remarque 33.14.

1. C'est une application directe du théorème précédent puisque $[a,b[$, ... engendrent la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.
2. Une application indicatrice $\mathbb{1}_A$ est mesurable, si et seulement si $A \in \mathcal{T}$, (à mettre dans une section précédente, lire intégrale de Lebesgue).

33.3.5.2 Opérations sur les applications numériques mesurables

Théorème 33.15.

1. *Si f et g sont des fonctions mesurables sur $(E,\mathcal{B})$ à valeur dans $\bar{\mathbb{R}}$ alors les fonctions suivantes sont mesurables :*
   - $f+g$ *(quand elle existe)* ; $c \times f$ $(c \in \mathbb{R})$; $f \times g$; f^2
   - $\sup(f;g)$; $\inf(f;g)$
   - f^+ ; f^-
   - $|f|$
2. *Pour que f soit mesurable, il faut et il suffit que f^+ et f^- le soient.*

Remarque 33.16.

1. ($|f|$ mesurable) $\nRightarrow$ (f^+ et f^- mesurables) et par conséquent : f mesurable.
2. L'expression "quand elle existe" se rapporte aux cas où $f(x) = \pm\infty$ et $g(x) = \pm\infty$ pour lequel $(f+g)(x)$ n'a pas de sens.

3. Lorsqu'il s'agit de $\mathbb{R}$ au lieu de $\bar{\mathbb{R}}$, il n'y évidement aucune restriction.
4. Le théorème précédant peut se résumer en disant que :
   "$\mathcal{M}(\mathcal{B})$ est une algèbre réticulée sur $\mathbb{R}$ pour la relation d'ordre naturelle $f \leqslant g$".

33.3.5.3 Suite d'applications numériques mesurables

Théorème 33.17. *Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables $E \to \bar{\mathbb{R}}$ où E est un espace mesurable.*

1. *Les fonctions suivantes sont mesurables :*
   - $\sup(f_n)$, $\inf(f_n)$
   - $\overline{\lim_{n\to\infty}}(f_n)$, $\underline{\lim}_{n\to\infty}(f_n)$
2. *Soient $f, g\colon (E,\mathcal{T}) \to \bar{\mathbb{R}}$ des fonctions mesurables et $h\colon \bar{\mathbb{R}} \to \bar{\mathbb{R}}$, $k\colon \bar{\mathbb{R}} \times \bar{\mathbb{R}} \to \bar{\mathbb{R}}$ des fonctions continues, alors $h \circ f$ et $k \circ (f,g)$ sont mesurables.*
3. *Si (f_n) converge simplement vers f, alors f est également mesurable.*
4. *Si $\exists A \in \mathcal{T};\ \forall x \notin A,\ f_n(x)$ converge dans $\bar{\mathbb{R}}$ alors la fonction définie par* $\begin{cases} f(x) = \lim_{n\uparrow+\infty} f_n(x), \forall x \notin A \\ f(x) = 36, \forall x \in A \end{cases}$ *est mesurable.*

Remarque 33.18.

1. On peut résumer ce théorème en écrivant que :
   "$\mathcal{M}(\mathcal{B})$ est fermé au sens de la convergence simple des suites".
2. Ce théorème reste valable pour $\lim(f_n) = f$ pour des fonctions à valeur dans un espace métrique.
3. Une application immédiate de ce théorème est le lemme suivant :

Exemple 33.19.

1. Prenons $(E, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}^p, \mathcal{B}(\mathbb{R}^p))$, les fonctions mesurables définies sur $\mathbb{R}^p$ sont alors boréliennes (ou boréliennes-mesurables).
2. La compléxité des fonctions boréliennes apparait lorsqu'on constate :
   - que toute limite simple d'une suite (f_n) de fonctions continues définies sur $\mathbb{R}^p$ est borélienne,
   - et que toute limite simple d'une suite de telles fonctions est aussi borélienne etc ...

Proposition 33.20. *Justifier l'existence des fonctions dans la définition suivante.*

i.

ii.

Définition 33.21. *Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, $p \in]0, +\infty]$.*
On définit sur $\mathcal{L}^0$ les applications N_p par :

- $N_p\colon \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{L}^0(U) & \to & [0,+\infty] \\ f & \mapsto & \left(\int_U |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \end{array} \right.$
- $N_\infty\colon \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{L}^0(U) & \to & [0,+\infty] \\ f & \mapsto & \inf\{\alpha \in [0,+\infty]; |f| \leqslant \alpha \,\mu.p.p.\} \end{array} \right.$

Définition 33.22. *(Locale) Désignons par $\mathcal{N}$ l'espace des fonctions mesurables nulles presque partout. $\mathcal{N} = \{f \in \mathcal{L}^0(U); f = 0\,\mu.p.p.\}$.*

33.3.6 Inégalité de convexité sur $\mathcal{L}^{0+}$

On utilise des valeurs absolues dans les inégalités. Véfirer si le + est nécessaire.

Proposition 33.23. *(Inégalité de Hölder) Soit $p,q\in[1,+\infty]$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ avec la convention $\frac{1}{+\infty}=0$ et $f,g\in\mathcal{L}^0(U)$ alors on a :*

- $N_1(f\times g)\leqslant N_p(f)\times N_q(g)$,
- *ce qui s'écrit également de manière explicite sous la forme*
  - $\int_U|f(x)g(x)|dx\leqslant\int_U|f(x)|^pdx\times\inf\{\alpha\in[0,+\infty];|f|\underset{\mu.p.p.}{\leqslant}\alpha\}$, *si* $p=1,q=+\infty$
  - $\int_U|f(x)g(x)|dx\leqslant\Big(\int_U|f(x)|^pdx\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_U|g(x)|^qdx\Big)^{\frac{1}{q}}$, *si* $p,q\in]1,+\infty[$.

Corollaire 33.24. *(Inégalité de Minkowski) Soient $p\in]1,+\infty[$ $f,g\in\mathcal{L}^{0+}(U)$ on a :*

- $N_p(f+g)\leqslant N_p(f)+N_p(g)$,
- *ce qui s'écrit également de manière explicite sous la forme*
  $\Big(\int_U|f(x)+g(x)|^pdx\Big)^{\frac{1}{p}}\leqslant\Big(\int_U|f(x)|^2dx\Big)^{\frac{1}{p}}+\Big(\int_U|g(x)|^2dx\Big)^{\frac{1}{p}}$.

33.4 Espaces $\mathcal{L}^1$,$\mathcal{L}^2$ et $\mathcal{L}^p$

Nous commençons cette section par une étude des deux plus importants espaces $\mathcal{L}^p$: $\mathcal{L}^1$ et $\mathcal{L}^2$. Puis nous généraliserons. On désignera par $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, si une définition ou une propriété est valable pour chacun d'entre eux ????.

33.4.1 Etude de $\mathcal{L}^1$

On rappelle des résultats vus dans le cas général en les complétant éventuellement.

33.4.1.1 Définition

... Cours de calcul intégrale 1er semestre

Définition 33.25. *On désigne par $\mathcal{L}^1(U)$ l'espace des fonctions intégrables $f:U\to\mathbb{C}$.*

33.4.1.2 Structure d'espace vectoriel, Semi-norme et inégalités convexes sur $\mathcal{L}^1$

Proposition 33.26. *$\mathcal{L}^1(U)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.*

Proposition 33.27. *$\mathcal{N}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}^1(U)$.*

Proposition 33.28. *La restriction de N_1 à $\mathcal{L}^1(U)$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^1(U)$.*

Proposition 33.29. *(Inégalité de Hölder) Soit $f,g\in\mathcal{L}^0(U)$ alors on a :*

- *$N_1(f\times g)\leqslant N_1(f)\times N_\infty(g)$, ce qui s'écrit également de manière explicite sous la forme :*
- $\int_U|f(x)g(x)|dx\leqslant\int_U|f(x)|^pdx\times\inf\{\alpha\in[0,+\infty];|f|\leqslant\alpha\,\mu.p.p.\}$.

33.4.2 Etude de $\mathcal{L}^2$

On rappelle des résultats vus dans le cas général en les complétant éventuellement.

33.4.2.1 Définition

Définition 33.30. *On désigne par* $\boldsymbol{\mathcal{L}^2(U)}$ *l'**espace des fonctions de carrés intégrables*** $f: U \to \mathbb{C}$.

33.4.2.2 Exemple de fonction de $\mathcal{L}^2$

Exemple 33.31. La fonction $f(x) = x^\alpha$ est de carré intégrable sur $]1; +\infty[$ ssi $2\alpha + 1 < 0$, i.e. $\alpha < -\frac{1}{2}$.

Remarque 33.32. Si f est $\mathcal{L}^2 \Rightarrow \int |f^2| d\mu < +\infty$ autrement dit $|f^2| \in \mathcal{L}^1$.

33.4.2.3 Structure d'espace vectoriel, Semi-norme et inégalités convexes sur $\mathcal{L}^2$

Proposition 33.33. *$\mathcal{L}^2(U)$ est un espace vectoriel complexe.*

Proposition 33.34. *La restriction de N_2 à $\mathcal{L}^2(U)$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^2(U)$.*

Proposition 33.35. *(Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soient f, $g \in \mathcal{L}^2(U)$ alors $f \times g$ est intégrable sur U i.e. $f \times g \in \mathcal{L}^1(U)$ et on a :*

- $\displaystyle\int_U f(x) \times g(x) dx \leqslant \left(\int_U |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\int_U |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$
- *autrement dit : $N_1(f \times g) \leqslant N_2(f) \times N_2(g)$.*

si $f \in \mathcal{L}^2, g \in \mathcal{L}^2$ on peut en déduire que $f \times g \in \mathcal{L}^1$.

Remarque 33.36. La proposition précédente peut donc servir de critère d'intégration pour un produit de fonctions.

Corollaire 33.37. *(Inégalité de Minkovsky) Soient $f, g \in \mathcal{L}^2(U)$ on a :*

- $\displaystyle\left(\int_U |f(x) + g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\int_U |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_U |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$
- *autrement dit : $N_2(f + g) \leqslant N_2(f) + N_2(g)$.*

33.4.2.4 Existence d'une forme hermitienne

33.4.3 Etude générale

33.4.3.1 Définitions

Définition 33.38. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $p \in]0, +\infty]$.*
*On dit qu'une **fonction** $f: U \to \mathbb{K}$ est **p-intégrable** ssi :*

i. elle est mesurable : $f \in \mathcal{L}^0$

ii. $N_p(f)$ est majorée : $\displaystyle\left(\int_U |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$

Remarque 33.39.

1. si $p = 1$, on parle de fonction μ-intégrable.
2. si $p = 2$, de fonction de carré μ-intégrable.

Définition 33.40. *L'**ensemble des fonctions p-intégrables** $f: U \to \mathbb{K}$, $p \in]0, +\infty]$ est noté $\boldsymbol{\mathcal{L}^p_\mu(U, \mathbb{K})}$, $\boldsymbol{\mathcal{L}^p(U)}$ ou simplement $\boldsymbol{\mathcal{L}^p}$ si aucune confusion n'est possible.*

Proposition 33.41. *$\mathcal{L}^p(U, \mathbb{C})$ est un espace vectoriel complexe.*

33.4.3.2 Semi-norme et inégalités convexes sur $\mathcal{L}^p$

On obtient à partir de N_p une semi-norme et comme dans $\mathcal{L}^0$ on retrouve les inégalités convexes.

Proposition 33.42. *La restriction de N_p à $\mathcal{L}^p(U)$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^p(U)$.*

Proposition 33.43. *(Inégalité de Hölder) Soit $p, q \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ avec la convention $\frac{1}{+\infty} = 0$ et $f, g \in \mathcal{L}^0(U)$ alors on a :*

$$N_1(f \times g) \leqslant N_p(f) \times N_q(g),$$

si $f \in \mathcal{L}^p, g \in \mathcal{L}^q$ on peut en déduire que $f \times g \in \mathcal{L}^1$.

Remarque 33.44. La proposition précédente peut donc servir de critère d'intégration pour un produit de fonctions.

Corollaire 33.45. *(Inégalité de Minkowski) Soient $p \in]1, +\infty[$ $f, g \in \mathcal{L}^0(U)$ on a :*
$N_p(f+g) \leqslant N_p(f) + N_p(g)$.

33.4.3.3 Relation d'équivalence sur $\mathcal{L}^p$

Proposition 33.46.

i. $\mathcal{N} = \{f \in \mathcal{L}^p(U); N_p(f) = 0 \, \mu.p.p.\}$.

ii. *$\mathcal{N}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}^p(U)$.*

Proposition 33.47. *la relation : $f \sim g \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ i.e. $f(x) - g(x) = 0$, pour presque tout $x \in U$ ou encore $f - g \in \mathcal{N}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{L}^p(U)$.*

33.5 Espace L^1, L^2 et L^p, $p \in [1, +\infty]$

Dans cette section, on désignera par $\mathbb{K}$ l'un des ensembles suivants : $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

33.5.1 Etude de L^1

Remarque 33.48.

1. $L^1(U)$ est encore un espace vectoriel complexe pour les lois quotients : $\dot{f} + \dot{g} = \dot{f+g}$; $\lambda \dot{f} = \dot{\lambda f}$.
2. Comme $\int_U f(x)dx$ ne change pas quand on remplace $f \in \mathcal{L}^1(U)$ par une fonction qui lui est égale presque partout, il y a un sens à parler de l'intégrale $\int_U \dot{f} dx$.
3. Dans tout ce qui suit, on identifiera tout élément de $L^1(U)$ à un de ses représentant $f \in \mathcal{L}^1(U)$ et on adoptera aussi la notation f pour désigner l'élément de $\mathcal{L}_1(U)$ et l'élément de $L_1(U)$, c'est le contexte qui précisera la nature de l'élément que l'on manipule (il ne peut y avoir d'ambiguité).
4. on écrira $f \in L^1(U)$ et si $x \in U$ est fixé, on ne peut pas parler de valeur de $f(x)$ de f en x, car si on change cette valeur uniquement en x, on obtient une fonction équivalente (car $\{x\}$ est négligeable de sorte que la classe $f \in L^1(U)$ est inchangée).
5. Si f est continue sa classe comporte-t-elle un seul élément ?

33.5.1.1 L^1 espace normé

Définition 33.49. *On appelle* ***norme L^1*** *ou* ***d'indice 1*** *ou* ***norme de la convergence en moyenne*** *et on note $\|.\|_1$ la norme définie par :*

$$\|.\|_1 : \left| \begin{array}{ccc} L^1(U) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_U |f(x)|dx \end{array} \right. \quad \text{ainsi } \|f\|_1 = \int_U |f(x)|dx.$$

Remarque 33.50. Ainsi $(L^1(U), \|.\|_1)$ est un espace normé, il y a donc un sens à parler de convergence d'une suite $(f_1, f_2, ...)$ de $L^1(U)$ vers $f \in L^1(U)$: cela signifie que $\lim_{x\to\infty} \|f_n - f\|_1 = \lim_{x\to\infty} \int_U |f_n(x) - f(x)|dx = 0$, on dit que la suite converge au sens de la norme $\|.\|_1$ d'indice 1 ou que la suite converge en moyenne.

Exemple 33.51. Exemples de suites convergentes ou non convergentes dans $L^1(\mathbb{R})$

33.5.1.2 L^1 espace de Banach

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue donne des conditions qui peuvent être considérées comme optimales pour que la convergence presque partout d'une suite de fonctions de $L^1(U)$ entraine sa convergence en norme L^1.

L'espace $L^1(U)$ est un espace de Banach pour la norme L^1.

Théorème 33.52. *(Théorème de Fischer-Riesz) Soit $(f_1, f_2, ...)$ une suite de Cauchy de $L^1(U)$. Alors il existe $f \in L^1(U)$ telle que $\|f_n - f\| \to 0$, $n \to \infty$. En outre, il existe une suite extraite $(f_{n_1}, f_{n_2}, ...)$ de (f_n) telle que :*

i. $f_{n_k}(x) \to f(x)$ pour presque tout $x \in U$.

ii. $|f_{n_k}(x)| \leqslant h(x)$ où $h \in L^1(U)$ pour presque tout $x \in U$ et pour tout $k \geqslant 1$.

Corollaire 33.53. *En particulier, $(L^1(U), \|.\|_1)$ est un espace de Banach.*

Remarque 33.54. Ce théorème affirme non seulement que $L^1(U)$ est un espace de Banach, mais qu'en outre si $(f_1, f_2, ...)$ est une suite de fonctions de $L^1(U)$ qui converge vers $f \in L^1(U)$ au sens de la norme L^1, alors il existe une sous-suite $(f_{n_1}, f_{n_2}, ...)$ qui converge vers f presque partout. On ne peut pas espérer en général que $(f_n(x))_{n\geqslant 1}$ converge vers $f(x)$ pour presque tout x, comme le montre l'exemple suivant :

$f_1 = \mathbb{1}_{[0,1]} \in L^1(\mathbb{R})$; $f_2 = \mathbb{1}_{\left[0,\frac{1}{2}\right]}$; $f_3 = \mathbb{1}_{\left[\frac{1}{2},1\right]}$; $f_4 = \mathbb{1}_{\left[0,\frac{1}{3}\right]}$; $f_5 = \mathbb{1}_{\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]}$; $f_6 = \mathbb{1}_{\left[\frac{2}{3},1\right]}$; ...

Comme $\|f_n\| \to 0, n \to \infty$, la suite (f_n) converge vers 0 dans $L^1(\mathbb{R})$. Mais la suite $(f_n(x))_{n\geqslant 1}$ est pour tout $x \in [0, 1]$, une suite qui comporte un nombre infini de 0 et de 1, donc elle ne converge pas. Par contre la sous-suite :

$f_{n_1} = \mathbb{1}_{[0,1]}$; $f_{n_2} = \mathbb{1}_{\left[0,\frac{1}{2}\right]}$; $f_{n_3} = \mathbb{1}_{\left[0,\frac{1}{3}\right]}$; ... converge presque partout vers 0, ce qui est conforme à l'énoncé du théorème de Fischer-Riesz.

33.5.1.3 Théorème de densité dans L^1

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On a vu que toute fonction continue à support compact $f : U \to \mathbb{C}$ est intégrable pour la mesure de lebesgue, donc définit un élément de $L^1(U)$. En outre, si f, g sont deux fonctions à supports compacts sur U telles que $\dot{f} = \dot{g}$ dans $L^1(U)$ on a $f = g$ presque partout et donc $\int_U |f(x) - g(x)|dx = 0$. Il s'ensuit que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in U$ car s'il existe $x_0 \in U$ tel que $f(x_0) \neq f(x)$, il existe par continuité de $x \mapsto |f(x) - g(x)|$ au point x_0 un réel $\varepsilon > 0$; $\|x - x_0\| \leqslant \varepsilon \Rightarrow |f(x) - g(x)| > \frac{\alpha}{2}$, $\alpha = |f(x_0) - g(x_0)|$. Mais alors $0 = \int_U |f(x) - g(x)|dx \geqslant \int_U \frac{\alpha}{2}dx = \frac{\alpha}{2}\text{vol}(B(x_0, \varepsilon)) > 0$ ce qui est absurde. Ceci montre que, si l'on note $C_C(U)$ l'espace vectoriel des fonctions complexes continue à support compact sur U, l'application $\left|\begin{array}{ccc} C_C(U) & \to & L^1(U) \\ f & \mapsto & \dot{f} \end{array}\right.$ est une injection. On peut donc sans inconvénient identifier $C_C(U)$ à un sous espace vectoriel de $L^1(U)$.

Théorème 33.55. *$C_C(U)$ est dense dans $L^1(U)$ pour la norme $(L^1(U), \|.\|_1)$, i.e. pour toute $f \in L^1(U)$, il existe une suite $(f_1, f_2, ...)$ de fonctions continues à supports compacts sur U telle que $\|f - f_n\|_1 \to 0$ pour $n \to +\infty$. En particulier, on a : $\int_U f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_U f_n(x)dx$.*

Remarque 33.56.

1. Pour tout ouvert U de $\mathbb{R}^n$, l'espace $C_C(U)$ muni de la norme $\|.\|_1$ est un espace normé qui n'est pas complet.

2. Le complété de $C_C(U)$, pour la norme $\|.\|_1$ (que l'on pourrait construire formellement à l'aide des suites de Cauchy de $C_C(U)$ tout comme on construit $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$) s'identifie à $L^1(U)$ et $C_C(U)$ est dense dans $L^1(U)$ pour la norme $\|.\|_1$.
3. Construire l'intégrale $\int_U f(x)dx$ d'une fonction $f \in C_C(U)$ est une chose aisée (la construction est faite en DEUG) on dispose alors d'une forme linéaire : L: $\left| \begin{array}{ccc} C_C(U) & \to & \mathbb{C} \\ f & \mapsto & \int_U f(x)dx \end{array} \right.$ qui est continue pour la norme $\|.\|_1$, puisque l'on a $|L(f)| = |\int_U f(x)dx| \leqslant \int_U |f(x)|dx = \|f\|_1$.
4. Le théorème de prolongement des applications linéaires continues permet alors de montrer l'existence d'une unique forme linéaire continue $\tilde{L}$ sur $L^1(U)$ rendant le diagramme suivant commutatif.
5. On a bien sûr $\tilde{L}(f) = \int_U f(x)dx$, de telle sorte que cette construction fonctionnelle permet facilement d'obtenir $L^1(U)$ et l'intégrale des fonctions intégrables.

33.5.2 Etude de L^2

Remarque 33.57.

1. Dans ce qui précède, on déduit immédiatement que si l'on pose $\|f\|_2 = \left(\int_U |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$ pour $f \in \mathcal{L}^2(U)$ alors on a : $\|f\|_2 \geqslant 0, \|\lambda f\|_2 = |\lambda| \, \|f\|_2$ et $\|f+g\|_2 \leqslant \|f\|_2 + \|g\|_2$.
2. Mais la relation $\|f\|_2 = 0$ n'implique pas $f = 0$ mais seulement $f(x) = 0$ pour presque tout $x \in U$.
3. C'est pourquoi, l'on a introduit $L^2(U)$ quotient de $\mathcal{L}^2(U)$ par la relation d'équivalence $f \sim g \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ pour presque tout $x \in U$ afin que $L^2(U)$ soit un espace normé pour la norme $\|\bar{f}\|_2 = \|f\|_2 = \left(\int_U |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$.

33.5.2.1 L^2 espace normé, L^2 espace de Banach, théorème de densité

Définition 33.58. *On appelle* ***norme L^2*** *ou* ***d'indice 2*** *ou* ***norme de la convergence en moyenne quadratique*** *et on note $\|.\|_2$ la norme définie par :*

$\|.\|_2$: $\left| \begin{array}{ccc} L^2(U) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \left(\int_U |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{array} \right.$ *ainsi* $\|f\|_2 = \left(\int_U |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$.

Théorème 33.59. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ alors on a $\forall f, g \in \mathcal{L}^0$:*

i. (Inégalité de Cauchy-Schwarz) $\|f \times g\|_1 \leqslant \|f\|_2 \times \|g\|_2$,

ii. (Inégalité de Minkovsky) $\|f+g\|_2 \leqslant \|f\|_2 + \|g\|_2$

iii. $L^2(U)$ *est un espace de Banach pour la norme* $\|\bar{f}\|_2 = \|f\|_2 = \left(\int_U |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$.

iv. L'espace $C_C(U)$ des fonctions continues à support compact sur U est un sous-espace dense de $L^2(U)$ pour la norme $\|f\|_2$.

33.5.2.2 Relation entre L^2 et L^1

Théorème 33.60. *Si U est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, on a :*

i. $L^2(U) \subset L^1(U)$.

ii. et $\|f\|_1 \leqslant \text{mes}(U)^{\frac{1}{2}} \|f\|_2$ *pour tout* $f \in L^2(U)$.

Remarque 33.61. On prendra garde au fait que la dernière proposition est fausse si U n'est pas borné. Par exemple la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est de carré intégrable sur $]1, +\infty[$, mais elle n'est pas intégrable sur $]1, +\infty[$.

33.5.2.3 L^2 espace de Hilbert

Proposition 33.62.

i. $< f|g > = \int_U f(x)\bar{g}(x)dx$ *est une forme hermitienne (positive) complexe non dégénérée (i.e. un produit scalaire suivant les définitions).*

ii. $(L^2(U), < f|g >)$ *est un espace de Hilbert.*

Remarque 33.63.

1. De nombreuses propriétés géométriques de $L^2(U)$ résultent de cette propriété.
2. En posant $g = f$, on a bien $< f|f > = \|f\|_2^2$, $\|f\|_2$ est donc la norme associée au produit scalaire.

33.5.3 Etude générale

33.5.3.1 Définition

Définition 33.64. *On désigne par* $\boldsymbol{L^p(U)}$ *l'espace des classes d'équivalence des fonctions de carré intégrables sur U pour la relation d'équivalence :* $f \sim g \Leftrightarrow f(x) = g(x)$*, pour presque tout* $x \in U$*. Autrement dit c'est l'espace* ***quotient*** $\boldsymbol{\mathcal{L}^p(U)/\mathcal{N}}$*.*

33.5.3.2 L^p espace normé

Proposition 33.65. *L'application :* $\left| \begin{array}{ccc} L^p(U) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \left(\int_U |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \end{array} \right.$ *est une norme sur* $L^p(U)$*.*

(Ce qui justifie le passage à l'espace quotient).

Définition 33.66. *On appelle* ***norme*** $\boldsymbol{L^p}$ *ou* ***d'indice p*** *ou* ***norme de la convergence d'indice p en moyenne*** *et on note* $\|.\|_1$ *la norme définie par :*

$\|.\|_p$: $\left| \begin{array}{ccc} L^p(U) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \left(\int_U |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \end{array} \right.$ *ainsi* $\|f\|_p = \left(\int_U |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$.

33.5.3.3 Inégalités de convexité

Proposition 33.67.

i. (Inégalité d Hölder) Soit $p, q \in [1, +\infty]$ *tels que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *avec la convention* $\frac{1}{+\infty} = 0$ *et* $f, g \in \mathcal{L}^0(U)$ *alors on a :* $\|f \times g\|_1 \leqslant \|f\|_p \times \|g\|_q$*, si* $f \in L^p, g \in L^q$ *on peut en déduire que* $f \times g \in L^1$

ii. (Inégalité de Minkovsky) Soient $p \in]1, +\infty[$ $f, g \in \mathcal{L}^0(U)$ *on a :* $\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$

33.5.3.4 L^p espace de Banach

Théorème 33.68. *Soit U un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *alors on a* $L^2(U)$ *est un espace de Banach pour la norme* $\|\bar{f}\|_p = \|f\|_p = \left(\int_U |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$.

33.5.3.5 Théorème de densité

Note 33.69. Espaces fonctionnelles

– $\mathcal{E}\mathrm{sc}^{\lambda_d}(\Omega, \mathbb{K})$ est l'ensemble des fonctions en escalier λ_d-intégrable sur Ω

- $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}^{\mu}(\Omega,\mathbb{K})$ est l'ensemble des fonctions $\mathcal{T}$-étagée μ-intégrable sur Ω
- Si $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ est une fonction, alors $\text{supp}(f)=\overline{\{x\in\mathbb{R}^n;\, f(x)\neq 0\}}$.
- $C_C^k(\mathbb{R}^n)$, $k\geqslant 0$ est l'ensemble des fonctions k fois différentiables avec différentielle $k^{\text{ème}}$ continues et qui sont à support compact. Sur $\mathbb{R}^n$ c'est l'ensemble des fonctions nulles en dehors d'une boule.
- $C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des fonctions indéfiniment différentiables avec des différentielles continues et qui sont à support compact.

Proposition 33.70.

i. $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ *est dense dans* $L^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}),\forall p\in[1,+\infty]$ *pour* $\|.\|_p$.

ii. $\mathcal{E}\text{sc}(\mathbb{R}^n)$ *est dense dans* $L^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}),\forall p\in[1,+\infty[$ *pour* $\|.\|_p$.

iii. $C_C(\mathbb{R}^n)$ *est dense dans* $L^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}),\forall p\in[1,+\infty[$ *pour* $\|.\|_p$.

iv. $C_C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *est dense dans* $L^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{K}),\forall p\in[1,+\infty[$ *pour* $\|.\|_p$

v. Soit A *une partie dense dans* $L^p(\mathbb{R}^n,\ \mathbb{K})$. *Toute partie contenant* A *et incluse dans* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *est aussi dense dans* $L^p(\mathbb{R}^n)$.

33.6 Convolution des fonctions intégrables

33.6.1 Convolution des fonctions intégrables dans L^1

33.6.1.1 Définition

Théorème 33.71. *Soient* $f,g\in L^1(\mathbb{R}^n)$ *alors*

i. la fonction $y\mapsto f(x-y)g(y)$ *est intégrable pour presque tout* $x\in\mathbb{R}^n$

ii. et la fonction $(f*g)(x)=\int f(x-y)g(y)dy$, *définie pour presque tout* $x\in\mathbb{R}^n$, *est intégrable sur* $\mathbb{R}^n$.

Définition 33.72. *On dit que* $f*g$ *est le* ***produit de convolution ou convolée*** *de* f *et* g.

33.6.1.2 Propriétés élémentaires du produit de convolution

Notons tout d'abord que :
Le produit de convolution est continu ? ! !

Proposition 33.73.

1. *En outre, on a :* $\|f*g\|_1\leqslant\|f\|_1\|g\|_1$, *il y a égalité si les deux fonctions sont positives.*
2. $f,g\in L^1(\mathbb{R}^n), f*g=g*f$ *(le produit de convolution est commutatif).*
3. $f,g,h\in L^1(\mathbb{R}^n),(f*g)*h=f*(g*h)$ *(le produit de convolution est associatif).*
4. $\lambda\in\mathbb{R}^n, g,h\in L^1(\mathbb{R}^n),\lambda\cdot(g*h)=(\lambda\cdot g)*h$
5. $f,g,h\in L^1(\mathbb{R}^n), f*(g+h)=(f*g)+(f*h)$
6. *On résume les propriétés précédentes en disant que* $(L^1(\mathbb{R}),+,\cdot,*)$ *est une algèbre (commutative ?), elle n'est pas unitaire, elle n'a pas d'élément neutre (voir démonstration TD Benameur page ? exercice introduction au produit de convolution).*

Exemple 33.74. Exemple de fonctions orthogonales : $e_n(t)=e^{int}, e_m(t)=e^{imt}$ définies sur $H=L^2([0,2\pi[)$ sont orthogonale ssi $m\neq n$.

33.6.1.3 Approximation de l'identité

Le théorème suivant va donner un procédé systèmatique pour approcher une fonction intégrable quelconque par des fonctions plus régulières :

Définition 33.75. *Rajouter la définition d'une unité approchée vue en TD.*

Théorème 33.76. *Soit $\alpha \in L^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $\int \alpha(x)dx = 1$, et posons pour tout $\varepsilon > 0$: $\alpha_\varepsilon(x) = \frac{\alpha(\frac{x}{\varepsilon})}{\varepsilon^n}$ alors pour toute $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on a : $\|f * \alpha_\varepsilon - f\|_1 \to 0$ pour $\varepsilon \to 0$.*

Le procédé de régularisation utilisé à ? permet également d'approcher en norme uniforme une fonction continue à support compact sur $\mathbb{R}^n$ par des fonctions de classe C^∞. A cet effet, on utilise la remarque suivante :

Lemme 33.77. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Pour toute $\alpha \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, la fonction $f * \alpha$ définie par : $(f*\alpha)(x) = \int f(y)\alpha(x-y)dy$ est de classe C^∞ et on a : $D^\beta = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2} \ldots \partial x_n^{\beta_n}}$.*

Proposition 33.78. *Soit alors $\alpha \in C_C^\infty(\mathbb{R})$ une fonction de classe C^∞ à support inclus dans la boule unité euclidienne $\|x\| \leqslant 1, \alpha \geqslant 0$, telle que $\int \alpha(x)dx = 1$. Pour tout $\varepsilon > 0$, posons : $\alpha_\varepsilon(x) = \alpha\big(\frac{x}{\varepsilon}\big) \times \frac{1}{\varepsilon^n}$.Pour toute fonction $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$, on a :*

i. $f * \alpha_\varepsilon$ est une fonction de classe C^∞ à support compact inclus dans le voisinage du support de f des points $x \in \mathbb{R}^n$ tels que $d(x, \operatorname{supp}(f)) \leqslant \varepsilon$, i.e. $\operatorname{supp}(f * \alpha_E) \subset \overline{\operatorname{supp}(f) + \mathcal{B}(0,\varepsilon)}$.

ii. $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x) - (f*\alpha_\varepsilon)(x)| \to 0$ pour $\varepsilon \to 0$.

Remarque 33.79. La proposition ci-dessus est très utilisée pour régulariser une fonction continue à support compact par convolution. Toutefois, la régularisation d'une fonction L^1 par convolution est possible (au sens de la norme L^1) en appliquant le théorème p.? aux fonction α_ε décrites dans la proposition ci-dessus. En fait, il n'est pas nécessaire d'imposer à α d'être à support compact. En effet, la fonction $\alpha(x) = \frac{e^{-|x|^2}}{\pi^{\frac{n}{2}}}$ est de classe C^∞, positive et d'intégrale égale à 1. On a donc : $\|f * \alpha_\varepsilon - f\|_1 \to 0$ pour $\varepsilon \to 0$ où $\alpha_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} e^{-\frac{|x|^2}{\varepsilon^2}}$ et un inspection de la démonstration p.? montre que l'on a encore $f * \alpha_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

33.7 Transformée et Transformation de Fourier et Fourier-Plancherel

33.7.1 Transformée et Transformation de Fourier (dans L^1)

33.7.1.1 Transformée de Fourier

Proposition 33.80. *Pour toute $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, les relations $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ définies par :*

- $\mathcal{R}_1$: $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ \xi \to x & \mapsto & \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int f(x \to t) e^{-ix \searrow \cdot \xi} dx \end{array} \right.$; $\xi \in \mathbb{R}^n, x \cdot \xi = \sum_{j=1}^n x_n \xi_n = < x | \xi >$ *effectuer tous les changements : les notations adoptés par M. Fack sêment la confusion avec les exercices de TD.*

- $\mathcal{R}_2$: $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ \xi & \mapsto & \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int f(x) e^{ix \cdot \xi} dx \end{array} \right.$; $\xi \in \mathbb{R}^n, x \cdot \xi = \sum_{j=1}^n x_n \xi_n = < x | \xi >$

sont des applications.

Remarque 33.81.

1. La seule différence entre ces deux applications est le signe de i.
2. Comme c'est précisé dans la proposition $x \cdot \mathcal{E}$ est le produit scalaire $< x | \mathcal{E} >$.

Définition 33.82. *Pour toute $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.*

- *On appelle* ***transformée de Fourier*** *de f et on note $\hat{f}$ ou $\mathcal{F}_f$ la fonction définie par :*

$$\hat{f}, \mathcal{F}_f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ \xi & \mapsto & \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int f(x) e^{-ix\xi} dx \end{array} \right. ; \xi \in \mathbb{R}^n, x \cdot \xi = \sum_{j=1}^n x_n \xi_n = < x | \xi > .$$

- *On appelle* ***transformée de Fourier inverse*** *de f et on note $\bar{\mathcal{F}}_f$ la fonction définie par :*

$$\bar{\mathcal{F}}_f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ \xi & \mapsto & \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int f(x) e^{ix\xi} dx \end{array} \right. ; \xi \in \mathbb{R}^n, x \cdot \xi = \sum_{j=1}^n x_n \xi_n = < x | \xi > .$$

Exemple 33.83.

1. Si $f(x) = e^{-|x|}$, on a : $\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times \frac{1}{1+\xi^2}$.
2. Si $f(x) = e^{-ax^2}$, on a : $\hat{f}(\xi) = \frac{e^{-\frac{\xi^2}{4a}}}{\sqrt{2\,a}}$.

Théorème 33.84. *(Théorème de Riemann-Lebesgue) Pour toute $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\hat{f}$ est continue et nulle à l'infini $\lim_{|f| \to +\infty} \hat{f}(x) = 0$. Autrement dit $\hat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$ (où $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions continues nulles à l'infini sur $\mathbb{R}^n$).*

Note 33.85. C'est cette propriété qui justifie l'espace d'arrivée dans la définition suivante.

33.7.1.2 Transformation de Fourier

Définition 33.86.

- *On appelle* ***transformation de Fourier*** *l'application notée $\mathcal{F}$ et définie par :*

$$\mathcal{F} : \left| \begin{array}{ccc} L^1(\mathbb{R}^n) & \to & \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n) \\ f & \mapsto & \hat{f} \end{array} \right.$$

- *On appelle* ***transformation de Fourier inverse*** *l'application notée $\bar{\mathcal{F}}$ et définie par :*

$$\bar{\mathcal{F}} : \left| \begin{array}{ccc} L^1(\mathbb{R}^n) & \to & \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n) \\ f & \mapsto & \bar{\mathcal{F}}_f \end{array} \right.$$

Théorème 33.87. *La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est une application linéaire continue de $L^1(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$ (où $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions continues nulles à l'infini sur $\mathbb{R}^n$).*

Remarque 33.88.

1. Au niveau des notations on a donc $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$, $(\mathcal{F}(f))(\xi) = \hat{f}(\xi)$.
2. $\bar{\mathcal{F}}(f)(x) = \mathcal{F}(f)(-x)$.

Proposition 33.89.

i. *$\mathcal{F}$ est injective, mais pas surjective, autrement dit deux fonctions f et g intégrables telles que $\mathcal{F}(g) = \mathcal{F}(f)$ sont nécessairement presque partout égales.*

ii. $(\tau_a f)(x) = f(x-a) \Rightarrow \mathcal{F}(\tau_a f)(x) = e^{-aix}(\mathcal{F}(f))(x)$,

iii. $f_\lambda(x) = f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \Rightarrow \mathcal{F}(f_\lambda)(x) = \lambda(\mathcal{F}(f))(\lambda x)$,

iv. *$\mathcal{F}$ admet un point fixe unique : $\gamma : \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$, $(\mathcal{F}(\gamma))(x) = \gamma(x)$.*

33.7.1.3 Transformation de Fourier et dérivation

Notons p_j la projection $p_j : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, ..., x_j, ..., x_n) & \mapsto & x_j \end{array} \right.$.

L'un des intérêts de la transformation de Fourier et de transformer la dérivation $\frac{\partial}{\partial x_j}$ en multiplication par $i\,p_j$.

Théorème 33.90. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. On suppose que les fonctions $p_j \cdot f$ sont intégrables pour $j = 1, ..., n$ alors $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et on a :*

- $\mathcal{F}(p_j \cdot f) = i \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}\mathcal{F}(f)$ *soit* $\widehat{p_j f} = i \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}\hat{f}$.
- *i.e.* $x \in \mathbb{R}^n$, $\widehat{p_j f}(x) = i \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}\hat{f}(x)$

Corollaire 33.91. *Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ une fonction telle que $x \mapsto (1 + |x|^k) \cdot f(x)$ soit intégrable alors, $\hat{f}$ est de classe C^k.*

Théorème 33.92. *Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1.*

On suppose que f et les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ sont intégrables alors on a :

- $\mathcal{F}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = i \cdot p_j \cdot \mathcal{F}(f)$ *soit* $\widehat{\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)} = i \cdot p_j \cdot \hat{f}$.
- *i.e.* $\widehat{\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)}(\xi) = i \cdot \xi_j \cdot \hat{f}(\xi)$ *pour tout* $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Corollaire 33.93. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. On suppose que f est de classe C^k et les dérivées partielles jusqu'à l'ordre k sont intégrables alors on a : $\hat{f}(\xi) = o(|\xi|^{-k})$ pour $|\xi| \to +\infty$.*

33.7.1.4 Transformation de Fourier et produit de convolution

Théorème 33.94. *Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. On a :*

- $\mathcal{F}(f * g) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \cdot \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)$ *soit* $\widehat{f * g} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \cdot \hat{f} \cdot \hat{g}$.
- $\widehat{f * g}(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \cdot \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi)$ *pour tout* $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Remarque 33.95. La transformée de Fourier transforme le produit de convolution en produit ordinaire à un coefficient près.

33.7.1.5 Théorème d'inversion dit aussi théorème de synthèse spectrale L^1

Théorème 33.96. *(Inversion de Fourier) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ alors on a :*

- $f = \bar{\mathcal{F}}(\hat{f})$ *ou* $f = \bar{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F}(f)$
- *i.e.* $\bar{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F} = \mathrm{Id}_{L_1}$ *presque partout.*

presque partout avec égalité en tout point où f est continue.

Corollaire 33.97. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *telle que $\mathcal{F}(f) = 0$, i.e. $\hat{f} = 0$ alors $f = 0$ presque partout.*

Remarque 33.98.

1. On observera que si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ est telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ alors f est égale presque partout à une fonction continue. En effet $\bar{\mathcal{F}}(\hat{f})(x) = \mathcal{F}(\hat{f})(-x)$ est une fonction de $C_0(\mathbb{R}^n)$ et le résultat provient du théorème d'inversion de Fourier.
2. Un des problèmes de la transformée de Fourier est qu'elle a ses valeurs dans $C_0(\mathbb{R})$ or une fonction $C_0(\mathbb{R})$ n'est pas nécessairement intégrable. On ne peut donc pas appliquer directement la transformée inverse (voir fiche 6 TD page 89).

33.7.1.6 L'espace de Schwarz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

M. Laurent Schwarz et les papillons par M. Fack.

Pour rendre le théorème d'inversion de Fourier plus immédiatement applicable, nous allons introduire une classe de fonction dont la transformée de Fourier sera automatiquement dans $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Définition 33.99. *On dira qu'une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ est à décroissance rapide ssi elle est de classe C^∞ et pour tout entier $m \geqslant 1$ et tout mutli-indice α la ??? dérivation, on a :*
$(1+|x|^2)^m D^\alpha f(x) \to 0$ *pour* $|x| \to +\infty$.

Définition 33.100. *On appelle* ***espace de Schwarz*** *l'ensemble des fonctions à* ***décroissance rapide****. On notera $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions à décroissance rapide sur $\mathbb{R}^n$.*

Exemple 33.101.

1. Toute fonction de classe C^∞ à support compact est à décroissance rapide sur $\mathbb{R}^n$.
2. La fonction $f(x) = e^{-|x|^2}$ est à décroissance rapide.

Proposition 33.102.

i. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est clairement un sous-espace vectoriel de $C_0(\mathbb{R}^n)$.

ii. On a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$.

iii. Pour toute fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a $\mathcal{F}(f), \hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et donc $\mathcal{F}(f), \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

iv. On a : $\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

On observera que $\mathcal{F}\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to ? \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ [Cette expression est incomplète ! que signifie le signe $\in$]est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

33.7.2 Transformation de Fourier-Plancherel (dans L^2)

Note 33.103. Il n'existe pas de formule explicite pour la transformée de Fourier de $L^2 \to L^2$, Pourquoi !? On définit un application appelée transformée de Fourier-Plancherel de $L^2 \to L^2$ comme le prolongement continu de la transformée de Fourier de $L_1 \cap L_2 \to L_2$.

33.7.2.1 Théorème de Plancherel

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ alors $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ et donc $\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(x)|^2 dx \leqslant \|\hat{f}\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(x)| dx < \infty$, de sorte que $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. De même, puisque $f = \bar{\mathcal{F}}(\hat{f})$, la fonction f est presque partout égale à une fonction de $C_0(\mathbb{R}^n)$ et le raisonnement ci-dessus montre que $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Cette observation pose naturellement la question de savoir si la transformation de Fourier peut-être étendue en un isomorphisme de $L^2(\mathbb{R}^n)$ sur lui-même. Nous allons voir que c'est en effet le cas. Le résultat principal est le suivant :

Théorème 33.104. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ alors*

1. *$\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$*
2. *et l'on a : $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$ ou $\left\|\hat{f}\right\|_2 = \|f\|_2$ ou encore $\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f\|_2$.*

Théorème 33.105. *(Plancherel) 2 est identique à 1 (vérifier son énoncé) dans le cours de Fack.*

1. *La transformation de Fourier $\mathcal{F}\colon L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ possède un unique prolongement continu $P\colon L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$.*
2. *De la même manière, la transformation de Fourier inverse $\mathcal{F}\colon L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ possède un unique prolongement continu, noté : $\bar{P}\colon L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$.*
3. *P et $\bar{P}$ sont deux isométries réciproques adjointes l'une de l'autre autrement dit : $P^{-1}(f) = \overline{P(\bar{f})}$, i.e. $f = P\bar{P}(f) = \bar{P}P(f)$ presque partout ? (Voir Buchwalter p 140). Ce doit être le théorème d'inversion de Plancherel.*

Démonstration. $L_1 \cap L_2$ est dense dans L^2, ce qui conduit à l'unicité car deux fonctions continues égales sur une partie dense sont égales partout. □

Proposition 33.106. *Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$*

1. *$(P(f)|g) = \left(f|\bar{P}(g)\right)$*

2. $(P(f)|P(g)) = (f|g)$
3. $\|P(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2$
4. *et on a toujours* $\bar{P}(f)(x) = P(f)(-x)$ *à vérifier !*

Proposition 33.107. *Sans doute identiques aux propositions précédentes.*

i. $<\mathcal{F}(f)|g> = <f|\bar{\mathcal{F}}(g)>$

ii. $<\hat{f}\,|g> = <f\,|g>$ *à vérifier pour être équivalente à la proposition (2) précédente.*

iii.

Définition 33.108. *On appelle transformation de Fourier-Plancherel ou transformée de Fourier de L^2 (resp. transformée-Plancherel inverse) l'unique prolongement continu de la transformation de Fourier $\mathcal{F}$: $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2$ (resp. $\bar{\mathcal{F}}$: $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$). Tout cela n'a pas de sens !*

Remarque 33.109. Dans la pratique, on notera également $\hat{f} = P(f)$, et on dira que $\hat{f}$ est la transformée de Fourier-Plancherel de f. Pour $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, la transformée de Fourier-Plancherel $\hat{f}(\xi)$ n'est définie que pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ et par un procédé de passage à la limite qui n'est guère explicite. La formule intégrale donnant $\hat{f}(\xi)$ pour $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ n'a plus de sens pour une fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ qui n'est pas intégrable. Toutefois, on peut souvent se ramener à un calcul d'intégrales semi-convergentes en utilisant le résultat suivant :

Théorème 33.110. *Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et supposons que pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, l'intégrale $\int_{|x|\leqslant R} e^{-ix\xi} f(x)dx$ converge vers une limite que nous noterons $\varphi(\xi)$ quand $R \to +\infty$. Alors on a : $\hat{f}(\xi) = \lim_{R\to\infty} \int_{|x|\leqslant R} e^{-ix\xi} f(x)dx = \varphi(x)$ pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}^n$.*

Fourier conserve la parité
$\|\mathcal{F}(h)\|_\infty \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|h\|_1$.

33.7.3 Transformée de Fourier d'une fonction périodique

Définition 33.111. *Soit $f \in L^1([0, 2\pi])$. On appelle :*

- *$n^{i\text{ème}}$ coefficient de Fourier de f ($n \in \mathbb{Z}$) le nombre complexe : $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt$.*
- *La suite $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$, est appelée la transformée de Fourier de f, on note parfois $c_n(f) = \hat{f}(n)$.*

Remarque 33.112. On notera que si $f \in L^1([0, 2\pi])$, la fonction $t \mapsto f(t)e^{-int}$ est intégrable sur $[0, 2\pi]$ et on a : $|c_n(f)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|\, dt = \|f\|_1$ où l'on a posé $\|f\|_1 = \int_0^{2\pi} |f(t)|\, \frac{dt}{2\pi}$.

Théorème 33.113. *(Riemann-Lebesgue) Pour toute $f \in L^1([0, 2\pi])$, on a : $\lim_{|n|\to+\infty} c_n(f) = 0$.*

33.7.3.1 La synthèse spectrale

Le problème principal de la synthèse spectrale est de savoir sous quelles conditions sur $f \in L^1([0, 2\pi])$, on a : (*) $f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{int}$, la convergence ayant lieu en un sens à préciser (ponctuelles, uniforme, au sens L^2, au sens L^1, etc ...). Ainsi, pour $f \in L^2([0, 2\pi]) \subset L^1([0, 2\pi])$, on sait que (*) a lieu au sens de la convergence dans L^2. Si f est de classe C^2, et $f(0) = f(2\pi)$, on a vu précédement que la relation (*) a lieu pour tout $t \in [0, 2\pi]$, la convergence de la série de droite étant toujours uniforme. Une première question est de savoir si la connaissance des $c_n(f)$ pour $f \in L^1$ détermine f à un ensemble négligeable près. C'est en effet le cas, comme nous allons le voir maintenant

Synthèse L^1 pour les fonctions périodiques

Noyau de Poisson : soit $f \in L^1([0,2\pi])$. On sait que la suite des $C_n(f)$, $(n \in \mathbb{Z})$ tend vers 0 quand $|n| \to +\infty$, mais il y a aucune raison pour que la série de Fourier : $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{int}$ soit convergente à t fixé. Considérons alors la série modifiée (1), $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)r^{|n|}e^{int}$ où $r \in [0,1[$ est fixé. Comme $|c_n(f)r^{|n|}e^{int}| \leqslant \|f\|_1 r^{|n|}$ la série (1) est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ et définit une fonction continue périodique $f_r(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)r^{|n|}e^{int}$, on a :

Théorème 33.114. *Pour toute fonction $f \in L^1([0,2\pi])$, on a : $\lim_{r\to 1^-} \|f - f_n\|_1 \to 0$. En particulier* si $c_n(f) = 0$ *pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $f \equiv 0$.*

Remarque 33.115. L'application linéaire : $\left| \begin{array}{ccc} L^1([0,2\pi]) & \to & C_0(\mathbb{Z}) \\ f & \mapsto & (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \end{array} \right.$ où $C_0(\mathbb{Z})$ est l'espace des suites tendant vers 0 à l'infini est donc injective (et continue). On prendra garde au fait que cette application linéaire n'est pas surjective : il est faux que toute suite de $c_0(\mathbb{Z})$ soit la suite des coefficients de Fourier d'une fonction $L^1([0,2\pi]$. Par contre, l'application linéaire :

$\left| \begin{array}{ccc} L^2([0,2\pi]) & \to & l^2(\mathbb{Z}) \\ f & \mapsto & (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \end{array} \right.$ est un isomorphisme d'espaces d'Hilbert comme cela résulte du théorème vu précédement.

Théorème de convergence ponctuelle

Parmi les théorème de convergence ponctuelle, le plus simple est basé sur l'intégrale de Dirichlet.

Intégrale de Dirichlet

$S_N(f(t)) = \sum_{|n|\leqslant N} c_n(f)e^{int}$,

$S_N(f(t)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)u}{\sin(\frac{u}{2})}[f(u+t)+f(t-u)]du$

Théorème 33.116. *(Critère de convergence de Dini) Soit $f \in L^1([0,2\pi])$ et supposons que la fonction $u \mapsto \frac{f(t+u)+f(t-u)-2f(t)}{u}$ soit intégrable sur $[0,\delta]$ avec $\delta > 0$. Alors, la série de Fourier $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{int}$.*

Remarque 33.117. Si f est dérivable au point t, on a : $\lim_{u\to 0} \frac{f(t+u)+f(t-u)-2f(t)}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{f(t+u)}{u} - \frac{f(t-u)}{-u} = 0$ et donc $\frac{\Phi(u)}{u}$ est bornée sur un voisinage de 0. Le théorème de convergence de Dini s'applique et montre alors que $f(t)$ est la somme de sa série de Fourier en tout point t où elle est dérivable.

33.7.3.2 Application à la théorie L^2 des série de Fourier

Soit $f \in L^2([0,2\pi])$. Comme $[0,2\pi]$ est borné, on a $f \in L^1([0,2\pi])$ et par conséquent la fonction $f(t)e^{-int}$ est intégrable sur $[0,2\pi]$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Posons $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$, $n \in \mathbb{Z}$. On dit que $c_n(f)$ (noté parfois aussi $\hat{f}(n)$) est le $n^{i\text{ème}}$ coefficient de Fourier de f. Comme ici $c_n(f) = < f|e_n >$ où $e_n(t) = e^{int}$, $n \in \mathbb{Z}$, le fait que $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ soit une base orthonormale de $L^2([0,2\pi])$ permet de montrer que :

Théorème 33.118. *Bessel-Parseval ! ? ! Pour toute fonction $f \in L^2([0,2\pi])$, on a :*

$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{in}$ *(Convergence dans $L^2([0,2\pi])$) et* $\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \frac{dt}{2\pi} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$.

33.8 Applications

33.8.1 Calcul de la somme de la série : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

On peut utiliser la formule de Bessel Parseval pour calculer la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Considérons en effet la fonction $f(t) = t$ sur $[0,2\pi]$, on a :

$c_0(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t\,dt=\frac{1}{2\pi}\Big[\frac{t^2}{2}\Big]_0^{2\pi}=\pi$ et pour $n\in\mathbb{Z}$,
$c_n(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t\,e^{-int}\,dt=\frac{1}{2\pi}\Big(\Big[\frac{t\,e^{-int}}{-in}\Big]_0^{2\pi}+\frac{1}{-in}\int_0^{2\pi} e^{-int}\,dt\Big)$,
en posant $\begin{cases} u=t & \to & u'=1 \\ v'=e^{-int} & \to & v=\frac{e^{-int}}{-in}\end{cases}$ d'où $c_n(f)=\frac{1}{2\pi}\times\frac{2\pi}{-in}=-\frac{1}{in}$ on a donc
$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t^2dt=\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}=\pi^2+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$
mais $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t^2dt=t=\frac{1}{2\pi}\Big[\frac{t^3}{3}\Big]_0^{2\pi}=\frac{4\pi^2}{3}$
de sorte que :
$\frac{4\pi^2}{3}=\pi^2+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, on en déduit que :
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

33.8.2 Théorème de synthèse spectrale pour les fonctions continues et périodiques

Donnons maintenant une autre application du théorème à un théorème de synthèse spectrale des fonctions continues et périodique sur $\mathbb{R}$.

Théorème 33.119. *Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ une fonction continue et 2π-périodique. On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\big|c_n(f)\big|<\infty$. Alors on a : $f(t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{int}$, $\forall t\in\mathbb{R}$, où la série du second membre est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.*

Ce théorème fournit un premier critère de convergence de la série de Fourier d'une fonction 2π-périodique qui couvre les cas des fonctions de classe C^2. En effet, si f est de classe C^1, on a pour $n\neq 0$: $c_n(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt=\frac{1}{2\pi}\Big(\Big[\frac{f(t)\,e^{-int}}{-in}\Big]_0^{2\pi}-\frac{1}{-in}\int_0^{2\pi} e^{-int}\,dt\Big)$ par une intégration simple par partie d'où $c_n(f)=\frac{1}{in}c_n(f')$ en itérant, on obtient $c_n(f)=-\frac{1}{n^2}c_n(f'')$ et comme $|c_n(f'')|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f''(t)|dt=\|f''\|_1$ on obtient $|c_n(f)|\leqslant\frac{\|f''\|_1}{n^2}$. Mais alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(f)|<\infty$, et le théorème peut s'appliquer.

33.9 Tableau comparatif

	Transformation $\hat{f}$	Transformation $c_n(f)$, f périodique
Définition	$\hat{f}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f(t)e^{-ixt}dt$	$c_n(f)=\frac{1}{2\pi}\int_T f(t)\,e^{-int}\,dt$,$T$ période
Domaine	$f\in L^1(\mathbb{R})$	$f\in L^1([0,2\pi],\frac{dx}{2\pi})$
Comportement (R.L.)	$\lim_{\lvert x\rvert\to 0}\hat{f}(x)\to 0$	$\lim_{\lvert n\rvert\to+\infty}c_n(f)\to 0$
	si $f,\hat{f}\in L^1, f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\hat{f}(t)e^{ixt}dt$	si $f\in L^1([0,2\pi])$ et si
		$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\lvert c_n(f)\rvert<\infty$ alors
		$f(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx}$, pp$(x)$
		conséquence si $f\in C^2$
		$\lvert c_n(f)\rvert\leqslant\frac{c}{\lvert n\rvert^2}$ il y a égalité partout.
	Si $f\in L^1$ et $\hat{f}=0$ alors $f=0$, pp(x)	si $f\in L^1([0,2\pi])$ et si $c_n(f)=0$
		$\forall n\in\mathbb{Z}\Rightarrow f=0$, pp(vraie)
	$f\in L^2,\hat{f}\in L^2,\int\lvert f(x)\rvert^2dx=$	$f\in L^2([0,2\pi]),\sum_{n\in\mathbb{Z}}\lvert c_n(f)\rvert^2<\infty$
	$\int\lvert\hat{f}(t)\rvert dt$	et on a $\int\lvert f(x)\rvert^2\frac{dx}{2\pi}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\lvert c_n(f)\rvert^2$
		$f\in L^2([0,2\pi])\Rightarrow f\in L^1([0,2\pi])$
		$\int_0^{2\pi}\lvert f\rvert dx=\int_0^{2\pi}\lvert f\rvert-1dx$
		$\leqslant(\int_0^{2\pi}\lvert f\rvert^2dx)^{\frac{1}{2}}(\int_0^{2\pi}1^2dx)^{\frac{1}{2}}<\infty$

Chapitre 34

Formes sesquilinéaires, Espaces Préhilbertiens, Hermitiens, Euclidiens et Hilbertien

(A mettre juste après espace vectoriel et algèbre normé)

Pour les démonstrations voir cours de Licence 1998-1999 M. ?, ARN. 2001-2002 M. Fack et livre Topologie Gilles Christol ... Ellipse chapitre 10 page 163 (l'introduction est celle de ce chapitre).

Les espaces de Hilbert sont, après les espaces vectoriels de dimension finie, les espaces vectoriels normés dont les propriétés sont les plus simples et remarquables. Ils jouent un rôle d'importance capitale dans de nombreuses branches mathématiques, en particulier en Analyse. ...

34.1 Formes sesquilinéaires

34.1.1 Forme sesquilinéaire relativement à un automorphisme

Définition 34.1. *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel, σ un automorphisme involutif de $\mathbb{K}$ et $\varphi: E \times F \to \mathbb{K}$. On dit que φ est une forme sesquilinéaire sur $E \times F$ relativement à σ si et seulement si : $\forall (x_0, y_0) \in E \times F$, les applications partielles $\begin{cases} \varphi(\bullet, y_0): E \to \mathbb{K} \\ \sigma \circ \varphi(x_0, \bullet): F \to \mathbb{K} \end{cases}$ sont linéaires.*

Remarque 34.2. Cas particuliers :

- Si $\sigma = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}}$, alors φ est une forme bilinéaire $\forall x; x'; y; y' \in E,$:
  $\varphi(x + x'; y) = \varphi(x; y) + \varphi(x'; y)$
  $\varphi(x; y + y') = \varphi(x; y) + \varphi(x; y')$ (i.e. $\varphi(x; \cdot)$ et $\varphi(\cdot\,; y)$ linéaires)
  $\varphi(\lambda x; y) = \varphi(x; \lambda y) = \lambda \varphi(x; y)$.
- Si $K = \mathbb{C}$, avec $\sigma: z \mapsto \bar{z}$ alors φ est appelée forme sesquilinéaire complexe.
- Si $E = F$, on dit que φ est une forme sesquilinéaire sur E.

34.1.2 Forme (sesquilinéaire) hermitienne

Définition 34.3. *Soient E un $\mathbb{K}$-e.v., σ un automorphisme involutif de $\mathbb{K}$. On dit que φ est hermitienne si et seulement si :*

1. *$\varphi(\cdot\,; y)$ et $\sigma \circ \varphi(x; \cdot)$ sont linéaires, i.e. φ une forme sesquilinéaire sur E relativement à σ.*
2. *$\forall x, y \in E, \varphi(x, y) = \sigma(\varphi(y, x))$ [symétrie hermitienne].*

Remarque 34.4. Cas particuliers :

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\sigma = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ alors φ est une forme bilinéaire symétrique.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\sigma = z \mapsto \bar{z}$ alors φ est appelée forme (sesquilinéaire) hermitienne complexe.

34.1.3 Formes (sesquilinéaires) hermitiennes complexes

Dans ce qui suit, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $E = \mathbb{K}$-e.v..

Définition 34.5. *$\varphi: E \times E \to \mathbb{K}$ est une forme sesquilinéaire hermitienne complexe si et seulement si :*

i. $\forall y_0 \in E$, $\varphi(\bullet, y_0)$ *est une forme linéaire sur E autrement dit $\varphi(\bullet, y_0)$ est additive par rapport à la première variable $[\varphi(x+x', y_0) = \varphi(x, y_0) + \varphi(x', y_0)]$ et homogène par rapport à la première variable $[\varphi(\lambda x, y) = \lambda\varphi(x, y)]$.*

ii. $\forall x, y \in E, \varphi(y, x) = \overline{\varphi(x, y)}$.

Théorème 34.6. *$\varphi: E \times E \to \mathbb{K}$ est une forme sesquilinéaire hermitienne complexe si et seulement si :*

φ est une forme sesquilinéaire hermitienne sur E relativement à $z \mapsto \bar{z}$

Remarque 34.7.

1. La linéarité de $\overline{\varphi(x_0, \bullet)}: E \to \mathbb{K}$ est une conséquence de (i) et (ii).
2. Autrement dit $\varphi: E \times E \to \mathbb{K}$ est une forme sesquilinéaire hermitienne complexe si et seulement si : φ est une forme sesquilinéaire hermitienne sur E relativement à $z \mapsto \bar{z}$. Ou encore $\varphi(\,\cdot\,; y)$ et $\overline{\varphi(x; \cdot\,)}$ sont linéaires et $\varphi(x; y) = \overline{\varphi(y; x)}$.
3. Si $x = y$ alors $\varphi(x, x) \in \mathbb{R}$.
4. $\varphi(x, y_1 + y_2) = \varphi(x, y_1) + \varphi(x, y_2)$.
5. $\varphi(x, \lambda y) = \bar{\lambda}\varphi(x, y)$.
6. Les propriétés (4) et (5) signifient que φ est additive par rapport à la deuxième variable mais n'est pas homogène par rapport à la deuxième variable (on dit que φ est anti-homogène).
7. $\forall x, y \in E, \varphi(x, 0) = \varphi(0, y) = 0$.

34.2 Forme bilinéaire

Définition 34.8. *Déjà vue dans livre II pages 68 et 69 + voir CTE envoi 4 géométrie affine page 2*

Donner sa forme matrielle et les rêgles de calcul.

34.2.1 Formes bilinéaires réelles symétriques

Dans ce qui suit, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{K}$-e.v..C

Définition 34.9. *$\varphi: E \times E \to \mathbb{K}$ est une forme bilinéaire réelle si et seulement si :*

i. $\forall x; x'; y \in E$, $\varphi(x + x'; y) = \varphi(x; y) + \varphi(x'; y)$ *: l'application partielles $\varphi(\bullet, y)$ est linéaire (i.e. homogène et additive par rapport à la première variables).*

ii. $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ *: φ est symétrique.*

Remarque 34.10.

1. Il est inutile de préciser l'homogénéité et l'additivité par rapport à la deuxième variable, en raison de la symétrie.
2. Autrement dit, c'est une forme sesquilinéaire hermitienne avec $\sigma = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

34.2.2 forme (sesquilinéaire) hermitienne complexe et formes bilinéaires réelles symétriques, définies positives ou positives

Nous noterons désormais une forme sesquilianaire complexe : fshc et une forme bilinéaire réelle symétrique : fbrs.

Dans ce qui suit, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $E = \mathbb{K}$-e.v..

Définition 34.11.

1. *On dit que φ une fshc [resp. fbrs] sur E est* ***positive*** *si et seulement si :*
   $\forall x \in E, \varphi(x,x) \geqslant 0$.
2. *On dit que φ une fshc [resp. fbrs] sur E est* ***négative*** *si et seulement si :*
   $\forall x \in E, \varphi(x,x) \leqslant 0$.
3. *On dit que φ une fshc [resp. fbrs] sur E est* ***définie*** *(ou* ***non dégénérée****) si et seulement si :*
   $\varphi(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$.
4. *On dit que φ une fshc [resp. fbrs] sur E est* ***définie positive/négative*** *(ou* ***positive/négative non dégénérée****) si et seulement si :*
   $\forall x \in E - \{0\}$ *i.e.* $(\forall x \neq 0), \varphi(x,x) > 0$ *(1) [resp.* $\varphi(x,x) < 0$ *(1)].*

Remarque 34.12. Autrement dit, une fshc [resp. fbrs] sur E est **définie positive/négative** (ou **positive/négative non dégénérée**) si et seulement si elle est définie et positive/negative :

$\forall x \in E, \varphi(x,x) \geqslant 0$ [resp. $\varphi(x;x) \leqslant 0$] et $(\varphi(x;x) = 0) \Rightarrow (x = 0)$ puisque $(\varphi(x;x) = 0) \Rightarrow (x = 0)$ s'écrit aussi $(x \neq 0) \Rightarrow (\varphi(x;\ y) \neq 0)$ or cette proposition est incluse dans (1), d'autre part $(\varphi(x;x) > 0) \Rightarrow (\varphi(x;x) \geqslant 0)$.

34.2.3 Inégalité de Cauchy Schwarz

Théorème 34.13. *Soit φ une fshc ou une fbrs positive sur E alors :*
$\forall x, y \in E, |\varphi(x,y)|^2 \leqslant \varphi(x,x)\varphi(y,y)$.

34.3 Espaces Préhilbertiens, Hermitiens, Euclidiens et Hilbertien et produits scalaires

34.3.1 Définitions

Remarque 34.14. Un produit scalaire doit-il être nécessairement une f.s.h. non dégénérée. Certains ouvrages définissent pour faire la différence la notion de produit scalaire hermitien ! Il n'y a pas de réponse unique à tous ces problèmes chaque auteur adoptant sa notation personnelle.

Dans ce qui suit, il faut bien avoir en mémoire la nature du corps servant à la construction de l'espace préhilbertien qui peut donc être Réel ou Complexe.

Il y a un problème au niveau de la définition d'un espace euclidien : faut-il que l'espace soit de dimension finie ou non ? Certains ouvrage n'impose pas cette condition. Ces espaces permettent de faire de la géométrie en dimension infinie.

34.3.1.1 Espace préhilbertien complexe et réel et leurs produits scalaires

Définition 34.15.

- *On appelle espace* ***préhilbertien Complexe*** *[resp.* ***Réel****] le couple constitué :*
  i. d'un $\mathbb{C}$-e.v. [resp. $\mathbb{K}$-e.v.],
  ii. d'une fshc [resp. fbrs] positive $\varphi : E \to \mathbb{K}$.
- *La fshc ou fbrs d'un préhilbertien est appellée* ***produit scalaire*** *sur E.*
  On la note $\langle .|. \rangle, \langle ., . \rangle$ ou $(.|.)$ ainsi $\forall x, y \in E, \varphi(x,y) = \langle x|y \rangle$.
  Le nombre $\langle x|y \rangle$ est appelé produit scalaire de x et y.

Remarque 34.16. L'inégalité de Cauchy Schwarz s'écrit donc : $\langle x|y \rangle^2 \leqslant \langle x|x \rangle \langle y|y \rangle$

Exemple 34.17. Les espaces hermitiens [resp. euclidiens] sont des espaces préhilbertiens pour lesquels le produit scalaire est une fshc [resp. fbrs] définie positive.

Déplacer les deux définitions suivantes dans leurs chapitres respectifs.

34.3.1.2 Espace hermitien et Euclidien et leurs produits scalaires

Définition 34.18. *On appelle* ***espace Hermitien*** *[resp.* ***Euclidien****] un espace préhilbertien complexe [resp. Réel] (E, φ) où φ est une fshc [resp. fbrs] définie positive.*

34.3.1.3 Exemples

$\varphi(x, y)$	est un produit scalaire de
$\sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y_i}$	$\mathbb{C}^n$
$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$	$\mathbb{R}^n$
	$C_0(\mathbb{R})$
$\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \bar{y_n}$	$C_c(\mathbb{Z})$
$\int f(t)\overline{g(t)}\,dt$	$L^2(U)$
$\int_0^1 P(t)\overline{Q(t)}\,\mathrm{dt}$	$\mathbb{C}[X]$
$\int f(t)g(t)dt$	$L^2(\mathbb{R}^n)$ et de $C_c(U)$
$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \bar{y_n}$	$l^2(\mathbb{N})$

Note 34.19.

1. $C_c(\mathbb{Z})$ est l'ensemble des suites de nombres complexes qui sont à supports finis. On rappelle que les compactes de $\mathbb{Z}$ sont les parties finies. $C_c(\mathbb{Z}) = \{?\}$
2. L'ensemble $l^2(\mathbb{N})$ est l'ensemble des suites $(x_n)_{n\geqslant 0}$ complexes dont la série de terme général $(x_n^2)_{n\geqslant 0}$ est absolument convergente, $l^2(\mathbb{N}) = \left\{(x_n)_{n\geqslant 0},\, x_n \in \mathbb{C};\, \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty\right\}$

34.3.2 Sous-espace préhilbertien, euclidien et hermitien

Proposition 34.20. *Soit E un espace préhilbertien [resp. hermitien ou euclidien], E' un sous-espace vectoriel de E. φ le produit scalaire de E.*

E' muni de la restriction de φ à E est un espace préhilbertien [resp. hermitien ou euclidien].

Définition 34.21. *Soit E un espace préhilbertien [resp. hermitien ou euclidien], E' un sous-espace vectoriel de E. φ le produit scalaire de E.*

E' muni de la restriction de φ à E est appelé [resp. hermitien ou euclidien] de E.

34.3.3 Semi-norme et Norme associées à un produit scalaire

34.3.3.1 Définitions

Proposition 34.22. *Soit $(E, \langle .|. \rangle)$ un espace préhilbertien [hermitien ou euclidien]*

l'application $\mathcal{N}$ définie par $\mathcal{N}: \left| \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{\langle x|x\rangle} \end{array} \right.$ *est une semi-norme [resp. une norme] sur E.*

Définition 34.23. *Soit $(E, \langle .|. \rangle)$ un espace préhilbertien [hermitien ou euclidien].*

On appelle ***semi-norme [resp. norme] associée au produit scalaire*** *la semi-norme [resp. la norme] sur E notée $\|.\|$ et définie par :*

$$\|.\|: \left| \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{\langle x|x\rangle} \end{array} \right. \quad \text{ainsi } \|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$$

Remarque 34.24.

1. Les propriétés de la norme s'écrivent donc sous la forme
   - $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$,
   - $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$,

- $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

2. Tout espace Hermitien ou Euclidien $(E,\ \varphi)$ est un espace préhilbertien **séparé** selon Hausdorff.
3. L'inégalité de Cauchy Schwarz devient : $|\langle x|y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|$.
4. Dans un espace préhilbertien séparé, l'inégalité de Cauchy Schwarz est une égalité si et seulement si x et y sont linéairement dépendants (i.e. liés).
5. Dans un espace préhilbertien séparé réel, où $\|.\|$ est la norme associée au produit scalaire on a : $\|u+v\| = \|u\| + \|v\| \Leftrightarrow u = \alpha\, v$.

34.3.3.2 Identités et inégalité remarquables

Proposition 34.25. *Soit $(E, \langle .|. \rangle)$ un espace préhilbertien séparé (Réel ou Complexe) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $\|.\|$ la norme associée.*

1. $\forall x, y \in E, \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 < x \lfloor y >$.
2. $\forall x, y \in E, \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ *(identité de la médiane).*
3. $\forall a, b, c \in E, \|x-a\|^2 + \|x-b\|^2 = 2\|x - \frac{a+b}{2}\|^2 + \frac{\|a-b\|^2}{2}$
4. *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \forall x, y \in E, \langle x|y\rangle = \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big)$ *(identité de polarisation 1)*
5. *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \forall x, y \in E, \langle x|y\rangle = \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 + i(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)\big)$ *(identité de polarisation 2)*
6. $\forall x, y \in E, |\langle x|y\rangle| \leqslant \frac{1}{2}\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big)$
7. $\forall x, y \in E, \|x\|^2 - \|y\|^2 = < x-y | x-y >$.

Remarque 34.26. Donc, aussi bien dans $\mathbb{R}$, que dans $\mathbb{C}$, la connaissance de la norme sur un espace préhilbertien séparé suffit à déterminer le produit scalaire.

34.3.3.3 Exemples

Attention la norme de L^1 ne provient pas d'un produit scalaire.

Espace	Produit scalaire	Norme associée
$\mathcal{C}([a,b], \mathbb{C})$	$\langle f|g\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t$	$\|.\|_2$
$\mathbb{R}^n$	$\langle x|y\rangle = x_1 \times y_1 + ... + x_n \times y_n$	Norme Euclidienne
Suite de carré sommable	$\langle x|y\rangle = \sum x_i\overline{y_i}$	$\|.\|_2$
$\mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{R})$	$\langle f|g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t + \int_a^b f'(t)g'(t)\mathrm{d}t$	
$\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$	$\langle A|B\rangle = \mathrm{tr}({}^tA \cdot B)$	

Proposition à vérifier en veillant à les étendre au cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

34.4 Espace Hilbertien

Définition 34.27. *On appelle* ***espace de Hilbert*** *ou* ***espace Hilbertien*** *un espace préhilbertien complexe ou réel complet pour la norme associée à son produit scalaire.*

Remarque 34.28.

1. Le terme préhilbertien a été forgé d'après le nom du très grand mathématicien allemend, David Hilbert, les anglo-saxons parlent d'espace produit scalaire.
2. Un espace de Hilbert est un espace de Banach.

Exemple 34.29.

1. $H = \mathbb{C}^n$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\sum_{i=1}^n x_i\overline{y_i}$,

2. $H = l^2(\mathbb{N})$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\sum_{n=0}^{\infty} x_n \overline{y_n}$,
3. $H = L^2(U)$ (où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$) est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\int f(t)\overline{g(t)}dt$, on observera que la démonstration de la complétion de $L^2(U)$ montre aussi la complétion de $L^2(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ pour tout espace mesuré $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$, le produit scalaire est $\int_\Omega f(t)\overline{g(t)}d\mu(t)$. En particulier pour $X = \mathbb{N}$ et μ définie par $\mu(\{n\}) = 1$, on retrouve le fait que $l^2(\mathbb{N})$ est complet.
4. $H = L^2(\$^1)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$
5. $C([0, 1])$ n'est pas un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$, car il n'est pas complet pour la norme $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 dx}$.
6. $C_c(\mathbb{R})$ n'est pas un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\int f(t)g(t)dt$, car la norme obtenue est celle de $L^2(\mathbb{R})$. Or on sait que $\overline{C_c(\mathbb{R})} = L^2(\mathbb{R})$.

Exemple 34.30. $f^2(N), L^2([0, 2\pi]), L^2(U)$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ sont tous des espaces de Hilbert séparables.

34.5 Orthogonalité

34.5.1 Vecteurs othogonaux

Définition 34.31. *Soit $(E, \langle .|. \rangle)$ un espace préhilbertien séparé, (x, y) un couple d'**éléments** de E. x et y sont **orthogonaux** ssi $\langle x|y \rangle = 0$. Dans ce cas uniquement, on écrit $x \perp y$.*

Exemple 34.32.

1. Les fonction $e_n(t) = e^{int}$ et $e_m(t) = e^{imt}$ sont orthogonales lorsque $n \neq m$.
2. Les fonction $e_n(t) = \mathbb{1}_{[-1,0]}(t)$ et $e_m(t) = \mathbb{1}_{[0,1]}(t)$ sont orthogonales.

Remarque 34.33.

1. La relation $\perp$ n'est ni réflexive, ni transitive.
2. $\perp$ est une relation symétrique $(x \perp y) \Rightarrow (y \perp x)$.
3. Pour tout $x \in E$: $O_E \perp x$, c'est le seul élément de E à posséder cette propriété. Puisque : $(x \neq O_E) \Rightarrow (\langle x|x \rangle \neq 0)$.

34.5.2 Parties orthogonales

Définition 34.34. *Soit $(E, \langle .|. \rangle)$ un espace préhilbertien séparé, X, Y deux **parties** non vides de E. X et Y sont **orthogonales** ssi $\forall (x, y) \in X \times Y, \langle x|y \rangle = 0$ i.e. $x \perp y$.*

Pourquoi le cours de LM1 licence met-il en garde contre la confusion avec l'orthogonalité de la géométrie élémentaire ?

34.5.3 Théorèmes de Pythagone

Théorème 34.35. *(Théorème de Pythagore (1)) Soit $(E, \langle .|. \rangle)$ un espace préhilbertien séparé, (x, y) un couple d'**éléments** de E. x et y orthogonaux $\Rightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.*

Théorème 34.36. *(Théorème de Pythagore (2)) Soit $(E, \langle .|. \rangle)$ un espace préhilbertien séparé, (x, y) un couple d'**éléments** de E. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

i. x et y orthogonaux

ii. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

34.5.4 Orthogonal d'une partie

Proposition 34.37. *Soit $(E,\ \langle .|. \rangle)$ un espace préhilbertien séparé, (a) un élément de E. L'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à (a) est un hyperplan fermé.*

Définition 34.38. *Soit $(E, \langle .|. \rangle)$ un espace préhilbertien séparé, A une partie de E.*

L'ensemble $\{x \in E; \forall u \in A; x \perp u\}$ i.e. $\{x \in E; \{x\} \text{orthogonal } A\}$ est orthogonale de A, on le note $A^{\perp}$ ou A°.

Remarque 34.39. $(A^{\perp})^{\perp}$ se note $A^{\perp\perp}$.

Proposition 34.40. *Soit $(E, \langle .|. \rangle)$ un espace préhilbertien séparé, A une partie de E.*

i. $A^{\perp}$ *est un sous-espace vectoriel fermé de* E.

ii. Si A *est un sous-espace vectoriel de* E, $E = A \oplus A^{\perp}$ *et* $A^{\perp\perp} = A$ *???.*

iii. $A \subset B \Rightarrow \begin{cases} B^{\perp} \subset A^{\perp} \\ A^{\perp\perp} \subset B^{\perp\perp} \end{cases}$.

iv. Si A *est le sous-espace vectoriel engendré par* G *dans* E *alors* $G^{\perp} = A^{\perp}$.

v. Tout vecteur de A *est orthogonal à tout vecteur de* $A^{\perp}$ *en d'autres termes* $A \subset A^{\perp\perp}$.

34.5.5 Hyperplan médiateur dans un espace préhibertien réel

Définition 34.41. *On appelle* ***hyperplan médiateur****, un hyperplan affine orthogonal à $b-a$ et passant par le milieu de a et b.*

34.5.6 Angle de deux vecteurs non nuls dans un préhilbertien réel

Définition 34.42. *On appelle angle de x et y, $x \in E, x \neq 0, y \in E, y \neq 0$, le nombre θ défini par $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ et $\langle x|y \rangle = \|x\| \, \|y\| \cos\theta$.*

Remarque 34.43. Cette définition a un sens à cause de l'inégalité de Cauchy-Schwarz : on en tire $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \, \|y\| \cos\theta$.

Définition 34.44. *On dit qu'un angle θ est :*

- *aigu* $\Leftrightarrow \langle x|y \rangle > 0$.
- *obtus* $\Leftrightarrow \langle x|y \rangle < 0$.

34.6 Projection orthogonale d'un espace préhilbertien

(Problème de meilleure approximation). Soit E un $\mathbb{K}$-e.v., F une partie de E. On rappelle qu'un projecteur est une application linéaire $p_F : E \to F$ telle que : $f \circ f = f$. L'image d'un point x de E est appelé projection de x sur F. Le résultat qui suit généralise le fait que, dans l'espace ordinaire $\mathbb{R}^3$, la projection orthogonale de $x \in \mathbb{R}^3$ sur F (une droite ou un plan) réalise la plus courte distance de x à F.

34.6.1 Théorème de projection

Proposition 34.45. *Soit H un espace préhilbertien et soit K une partie convexe, complète de H.*

Alors :

- *tout point $x \in H$, admet une projection unique $x' = p_K(x)$ qui réalise le minimum de la distance de x aux points de K, $\|x - x'\| = \inf\{\|x - z\|; z \in H\}$.*

– *Cette projection x' de x est caractérisée par la relation* $\mathrm{Re}\langle x-x'|u-x'\rangle \leqslant 0, \forall u \in K$.

– $\|p_K(x)-p_K(y)\| \leqslant \|x-y\|$.

Remarque 34.46. Dans le cas où $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ l'inégalité exprime que l'angle formé par les vectuers est obtus.

34.6.2 Projection sur un cône convexe complet

Définition 34.47. *On appelle cône l'ensemble :* $C=\{\lambda x; \lambda>0\}$.

Proposition 34.48. *Soit C un cône convexe complet de E espace préhilbertien. Si x' est la projection de x sur C alors :*
$\|x\|^2=\|x'\|^2+\|x-x'\|^2$ *et* $\mathrm{Re}\langle x|x'\rangle=\langle x|x'\rangle$.

34.6.3 Projection sur un sous-espace vectoriel complet

Proposition 34.49. *Soit F un sous espace vectoriel complet d'un espace préhilbertien. La projection sur F x' de $x \in H$, est le seul vecteur $x' \in F$ tel que $x-x'$ soit orthogonal à F : c'est la projection orthogonale de x sur E.*

34.6.4 Transitivité des projections

Proposition 34.50. *Soit F un sous espace vectoriel complet de H. $K \subset F$, convexe, fermé si $x'=p_F(x)$ et si $x''=p_K(x')$. Alors $x''=p_K(x)$.*

34.6.5 Application aux sous-espaces orthogonaux d'un espace de Hilbert

Théorème 34.51. *Soit F un sous espace fermé (i.e. complet) d'un espace de Hilbert H. Alors :*

- *L'application* p_F: $\left|\begin{array}{ccc} H & \to & F \\ x & \mapsto & x' \end{array}\right.$ *est linéaire et continue et* $\|p_F\|=1$.
- $\ker(p_F)=F^\perp$ *et* $F^{\perp\perp}=F$.
- *F et $F^\perp$ sont des espaces supplémentaires dans H :* $H=F\oplus F^\perp$
- $\forall x \in H, \|x\|^2=\|p_F(x)\|^2+\|p_{F^\perp}(x)\|^2$.

Proposition 34.52. *Si F est un sous-espace d'un espace de Hilbert alors* $\bar{F}=F^{\perp\perp}$.

34.7 Dual d'un espace de Hilbert

Théorème 34.53. *(Théorème de représentation) Soit E un espace de Préhilbertien séparé et E' son dual topologique.*

1. $\forall x \in E$, *la forme linéaire* φ_a: $\left|\begin{array}{ccc} E & \to & K \\ x & \mapsto & \langle x|a\rangle \end{array}\right.$ *est continue et de norme* $\|a\|$.
2. *l'application :* $\left|\begin{array}{ccc} E & \to & E' \\ a & \mapsto & \varphi_a \end{array}\right.$ *est une semi-linéaire continue et injective des espaces normés E et E'. Si E est un espace de Hilbert elle est bijective.*

Définition 34.54. *Soit E, F un espace de préhilbertien et une application $f\colon E \to F$. On dit que :*

- *l'application $f^*\colon F \to E$ est l'**adjointe** de f ssi* $\langle x|f^*(y)\rangle=\langle f(x)|y\rangle$,

- f *est* ***autoajointe*** *ssi* $f^* = f$,
- f *est* ***antiautoadjoint*** *ou* ***antiadjoint*** *ssi :* $f^* = -f$.

Remarque 34.55. Une application linéaire continue f d'un espace de Hilbert dans lui-même est souvent appelé opérateur sur E.

Théorème 34.56. *Soient E, F deux espaces de Hilbert sur le même corps, et $f\colon E \to F$ une application linéaire continue. Il existe une unique application f^* adjointe de f. De plus f^* est linéaire et continue.*

Proposition 34.57. *Avec les mêmes hypothèses, on a $(f^*)^* = f$ et $\|f^*\| = \|f\|$.*

34.8 Systèmes orthogonaux et bases Hilbertiennes

34.8.1 Définitions

Définition 34.58. *Soit E un espace préhilbertien séparé complexe ou réel.*

i. Une famille $(e_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est appelée ***famille orthogonale****, ssi*
$\begin{cases} \forall i \in I, a_i \neq 0 \\ \forall i, j \in I, i \neq j, \langle a_i | a_j \rangle = 0 \end{cases}$.

ii. Une famille $(e_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est appelée ***famille orthonormale ou orthonormée****, ssi*
$\begin{cases} \forall i \in I, a_i \neq 0, \|a_i\|^2 = 1 \\ \forall i, j \in I, i \neq j, \langle a_i | a_j \rangle = 0 \end{cases}$.

Proposition 34.59. *Toute famille orthogonale est une famille libre.*

34.8.2 Inégalité de Bessel

Proposition 34.60. *(Inégalité de Bessel) Soit $(e_i)_{i\in I}$ un système orthonormé dans l'espace préhilbertien séparé E. Pour tout $x \in E$, la famille $(|\langle x|e_i\rangle|^2)_{i\in I}$ est sommable et sa somme vérifie l'inégalité, appelée inégalité de Bessel, $\sum_{i\in I} |\langle x|e_i\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2$.*

34.8.3 Base Hilbertienne

Note 34.61. Topologie Gilles Christol ... Ellipse chapitre 10 page 172, Il importe de ne pas confondre les notions de base hilbertienne et de base algébrique. Une base algébrique d'un espace vectoriel est une famille d'élément de cet espace telle que tout point de l'espace s'exprime, de manière unique, comme un combinaison linéaire d'une sous-famille finie d'éléments de cette famille. Les bases algébriques jouent un rôle important dans l'étude des espaces vectoriels de dimension finie, mais n'ont qu'un rôle beaucoup plus modeste dans celle des espaces vectoriels de dimension infinie. . Intégration André Gramain Hermann chapitre 6 page 163, Si la dimension de E est infinie, on peut démontrer qu'une base hilbertienne n'est pas une base (algébrique) de l'espace vectoriel .

Définition 34.62. *Soit E un espace préhilbertien séparé complexe ou réel. On appelle base hilbertienne de E, une famille de vecteurs de E :*

i. orthonormale,

ii. et totale i.e. si le sous-espace vectoriel fermé engendré par cette famille est E (Est-ce équivalent à (l'espace vectoriel engendré par une base hilbertienne est dense dans E).

Proposition 34.63.

i. L'espace vectoriel engendré par une base hilbertienne est dense dans E.

ii. Un espace de Hilbert H admet nécessairement des bases hilbertiennes. Toutes ces bases sont équipotentes.

Proposition 34.64. *Soit E un espac préhilbertien séparé, $(a_i)_{i\in I}$, une famille orthonormale sans E, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) L'espace vectoriel engendré par la famille $(a_i)_{i\in I}$ est dense dans E,

b) Pour tout point x de E, on a $x = \sum_{i\in I} \langle a_i|x\rangle a_i$ (famille sommable),

c) Pour tout point x de E, la famille des $|\langle a_i|x\rangle|^2$ est sommable et l'on a $\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle a_i|x\rangle|^2$. (Relation de Parseval).

Définition 34.65. *Le cardinal des bases d'un espace de Hilbert H est appelé **dimension** de H.*

Exemple 34.66. Base orthonormale dans un espace de Hilbert.

1. Espace de Hilbert de dimension finie : Pour tout espace de Hilbert une base hilbertienne est tout simplement une base algébrique orthonormée (Topologie Gilles Christol ... Ellipse chapitre 10 page 173).
2. Dans $\mathbb{C}^n$, les vecteurs $e_i = (0, 0, ..., 1, 0, ..., 0)$ le 1 est placé à la $i^{\text{ème}}$ place, $i = 1, 2, ..., n$ forment une base orthonormale.
3. Dans $l^2(\mathbb{N})$, les vecteurs $e_i = (0, 0, ..., 1, 0, ...)$ le 1 est placé à la $i^{\text{ème}}$ place, $i = 1, 2, ...$ forment une base orthonormale.
4. $l^2_I(\mathbb{K})$ (Topologie Gilles Christol ... Ellipse chapitre 10 page 174)
5. Dans $L^2([0, 2\pi])$ muni du produit scalaire $\int_0^{2\pi} f(t)\overline{f(t)}\frac{\mathrm{dt}}{2\pi}$, les fonctions $e_n(t) = e^{int}$, $(n \in \mathbb{Z})$ forment une base orthonormale.

Théorème 34.67. *(Décomposition dans une base orthonormale) Soit H un espace de Hilbert et $(e_1, e_2,...)$ une base orthonormale de H.*

i. Pour toute suite $(\lambda_1, \lambda_2, ...)$ de nombres complexes telle que $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 < \infty$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$ converge dans H et sa somme $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$ vérifie : $\langle x|e_n\rangle = \lambda_n$, $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2$,

ii. Pour tout $x \in H$, on a $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x|e_n\rangle|^2 < \infty$, en outre on a : $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x|e_n\rangle e_n$ (convergence dans H) et $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x|e_n\rangle|^2$

34.9 Géométrie euclidienne

Voir Monier.

34.9.1 Orthonormalisation de Schmitt

Proposition 34.68. *Soit E un espace vectoriel euclidien, $p \in \mathbb{N}^*$, $(v_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une suite d'éléments de E alors il existe une suite orthonormée unique $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ telle que :*

i. $\forall k \in \{1, ..., p\}$, $\sum_{1\leqslant i\leqslant p} \mathbb{R}v_i = \sum_{1\leqslant i\leqslant p} \mathbb{R}a_i$.

ii. $\forall i \in \{1, ..., p\}, (a_i|v_i) > 0$.

Proposition 34.69. *Tout espace vectoriel euclidien possède une base orthonormée notée $B.O.N.$.*

Proposition 34.70. *Soient E, F un espace vectoriel euclidien et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.*

i. Il existe une unique application $g \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que : $\forall(x, y) \in E \times F$; $(f(x)|y)_F = (x|g(y))_E$.

ii. Si $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$) est une B.O.N. de E (resp. F) et $A = M_{B,B'}(f)$ alors $M_{B',B}(g) = {}^tA$.

Définition 34.71. *L'application linéaire ainsi définie s'appelle l'**adjoint** de f et se note f^*.*

Proposition 34.72. *Soit E, F deux espaces vectoriels euclidiens tels que :*

i. $\forall f \in \mathcal{L}(E,F)$, $f^{**} = f$.

ii. L'application : $\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \to & \mathcal{L}(F,E) \\ f & \mapsto & f^* \end{array} \right.$

iii. $(\ker(f))^\perp = \mathrm{im}(f)^*$ *donc* $E = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)^*$.

Lemme 34.73. *Soient E un espace affine euclidien, $A \subset E$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.*
Si A est stable par f alors $A^\perp$ est stable par f^*.

34.9.2 Spectre d'un endomorphisme

Définition 34.74. *Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et un application $f \in \mathcal{L}(E)$. On appelle spectre de f et on note $\mathrm{sp}(f)$ l'ensemble des valeurs propres de f.*

Note 34.75.

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base canonique de $\mathbb{R}^n$ ou de $\mathbb{C}^n$, avec $\begin{cases} e_1 = (1,0,\ldots,0) \\ \ldots \\ e_n = (0,\ldots,0,1) \end{cases}$.
- Soient f (resp. $\hat{f}$) l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) tel que $M_e(f) = A$ (resp. $M_e(\hat{f}) = A$).
- On pose $\mathrm{sp}(A,\mathbb{R}) = \mathrm{sp}(f)$ et $\mathrm{sp}(A,\mathbb{C}) = \mathrm{sp}(\hat{f})$.
- Soit χ_A le polynôme caractéristique de A : $\mathrm{sp}(A,\mathbb{R})$ est l'ensemble des racines réelles de χ_A, $\mathrm{sp}(A,\mathbb{C})$ est l'ensemble des racines complexes de χ_A.

Lemme 34.76. *Soit E un espace vectoriel euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ alors :*

i. $\mathrm{sp}(f) = \mathrm{sp}(f^*)$.

ii. si $\lambda \in \mathrm{sp}(f)$ et $\mu \in \mathrm{sp}(f^*)$ avec $\lambda \neq \mu$ alors $\ker(f - \lambda \mathrm{id}_E)$ et $\ker(f^* - \lambda \mathrm{id}_E)$ sont orthogonaux.

Définition 34.77. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un espace vectoriel euclidien.*
f est dite symétrique ssi $f^* = f$.

Proposition 34.78. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ supposons A symétrique alors $\mathrm{sp}(A,\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}$. En d'autres termes χ_A est dislocable i.e. scindé dans $\mathbb{R}[X]$.*

Proposition 34.79. *Soit $E \neq \{0\}$ un espace vectoriel euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$. Si f est symétrique alors $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)}^{\perp} \ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$. Par suite, il existe une BON de vecteurs propres.*

Proposition 34.80. *Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n. $f \in \mathcal{L}(E)$, β_f:* $\left| \begin{array}{ccc} E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & (x|f(y)) \end{array} \right.$ *alors*

i. β_f est bilinéaire, β_f est symétrique ssi f est symétrique.

ii. Soit a une BON de E alors $M_a(\beta_f, a) = M_a(f)$.

iii. L'application h: $\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{L}_2(E \times E, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \beta_f \end{array} \right.$ *est un isomorphisme d'espace vectoriel.*

Proposition 34.81. *Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n. $\beta \in \mathcal{L}_2(E \times E, \mathbb{R})$, β symétrique. Soit f l'endomorphisme symétrique associé à β, $(a_1, ..., a_n)$ une base orthonormé de vecteur propre de f et $f(a_i) = \lambda_i a_i$.*

i. $(a_1, ..., a_n)$ *est une BON qui est orthogonale pour β i.e.* $\forall i \neq j \Rightarrow \beta(a_i, a_j) = 0$.

ii. en posant $x = \sum x_i a_i$ *et* $y = \sum y_i a_i$ *on a :* $\beta(x,\ y) = \sum \lambda_i x_i y_i$, $\beta(x,\ x) = \sum \lambda_i x_i^2$,
$\left| \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x_i \end{array} \right.$.

34.9.3 Isométrie vectorielle, Rotation et Antirotation

Proposition 34.82. *Soit E et F des espaces vectoriels euclidiens. $f\colon E \to F$ une application linéaire, $(a_1, ..., a_n)$ une BON de E alors les propositions suivantes sont équivalentes.*

i. $\forall x, y \in E, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$

ii. $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$

iii. $\forall x, y \in E, (f(x)|f(y)) = (x|y)$

iv. $(f(a_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *est une suite orthonormée*

v. $f^* f = \mathrm{C}\mathrm{Id}_E$.

Définition 34.83. *$f\colon E \to F$ est une isométrie vectorielle ssi f est bijective, linéaire et vérifie l'une des conditions équivalentes précédentes.*

Proposition 34.84. *Soit E et F des espaces vectoriels euclidiens de même dimension. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

i. f est une isométrie linéaire.

ii. $f^* f = \mathrm{Id}_E$

iii. $f f^* = \mathrm{Id}_F$

iv. f est bijective et $f^{-1} = f^*$

Proposition 34.85. *Soit E et F des espaces vectoriels euclidiens de même dimension et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ a (resp. b) une BON de E (resp. F). $A = M_{a,b}(f)$ alors les propositions suivantes sont équivalentes.*

i. f est une isométrie linéaire

ii. ${}^t A\, A = I_n$

iii. $A\, {}^t A = I_n$

iv. A est inversible et $A^{-1} = {}^t A$.

Proposition 34.86. *Les isométries vectorielles d'un espace vectoriel euclidien E sur lui-même forment un groupe.*

Définition 34.87. *Le groupe formé par les isométries vectoriels d'un espace vectoriel euclidien E sur lui-même est appelé* ***groupe orthogonal****. On le note $O(E)$.*

On note $O(n, \mathbb{R})$ l'ensemble des matrices telles que ${}^t A\, A = I_n$.
$O(n, \mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. matrice inversible.

Proposition 34.88. $O(E) \subset \mathrm{GL}(E)$.

Proposition 34.89. *Soit E un espace vectoriel euclidien $f \in O(E)$ alors* $\det(f) = \pm 1$.

Définition 34.90. $\mathrm{SO}(E) = O^+(E) = \{f;\ f \in O(E); \det(f) = 1\}$.

Les éléments de O^+ sont appelés ***rotations vectorielles,***

Définition 34.91. $O^-(E)=\{f; f\in O(E); \det(f)=-1\}$.
Les élément de O^- sont appelés ***antirotations.***

Remarque 34.92.

1. $O^+(E)$ est un sous-groupe distingué de $O(E)$. $O^-(E)$ n'en n'est pas un.
2. $O^+(E)$ est un sous-groupe distingué de $O(E)$. $\left|\begin{array}{ccc} O(E) & \to & \mathbb{R}^* \\ f & \mapsto & \det(f)\end{array}\right.$ est un homomorphisme.

Remarque 34.93. Soit E un espace vectoriel euclidien, a une BON de E. $\left|\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}(E) & \to & \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \mathrm{Mat}_a(f)\end{array}\right.$ est un isomorphisme de groupes de $O(E)\to O(n,\mathbb{R})$ et $O^+(E)\to O^+(n,\mathbb{R})$.

Proposition 34.94. *Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 1 alors $O(E)=\{\mathrm{Id}_E; -\mathrm{Id}_E\}$. $O(E)=\{\mathrm{Id}_E\}$.*

Exemple 34.95.

1. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n. $(a_1, \ldots, a_n)$ une BON $\left|\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}^n \\ \sum \lambda_i a_i & \mapsto & (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\end{array}\right.$ est une isométrie vectorielle. $(\sum \lambda_i a_i^2 c|\sum \lambda_j a_j)=\sum \lambda_i\mu_i=((\lambda_1,\ldots,\lambda_n)|(\mu_1,\ldots,\mu_n))$.
2. Conséquences, deux espaces vectoriels euclidiens E, F de même dimension n sont isométriques. $\left|\begin{array}{ccccc} E & \to & \mathbb{R}^n & \to & F \\ \sum \lambda_i a_i & \mapsto & (\lambda_1,\ldots,\lambda_n) & \mapsto & \sum \lambda_i b_i\end{array}\right.$, $a\in \mathrm{BON}(E), b\in \mathrm{BON}(F)$.
3. La symétrie orthogonale par rapport au sous espace vectoriel F d'un espace vectoriel euclidien E. $E=F\oplus F^\perp$, posons $u=u_1+u_2, u_1\in F, u_2\in F^\perp$. $\sigma_F\left|\begin{array}{ccc} E & \to & E \\ u & \mapsto & u_1-u_2\end{array}\right.$ σ_F est la symétrie orthogonale par rapport au sous espace vectoriel F.

Proposition 34.96. *$\sigma_F\in O(E)$, $\sigma\circ\sigma=\mathrm{id}_E$ posons $p=\dim(F)$ et $n=\dim(E)$ alors $\det(\sigma)=(-1)^{n-p}$, $\mathrm{Fix}(\sigma)=F$.*

Lemme 34.97. *Soit E un espace vectoriel, $f\in O(E)$, $\lambda\in\mathbb{R}$ λ valeur propre de f i.e. $\lambda\in\mathrm{Sp}(f)$, alors $\lambda=\pm 1$.*

Proposition 34.98. *Soit $A\in O(n,\mathbb{R})$ alors $\mathrm{Sp}(A,\mathbb{C})\subset U=\{z; z\in\mathbb{C}, |z|=1\}$.*

Proposition 34.99. *Soit E un espace vectoriel euclidien, F un sous espace vectoriel euclidien de E. $f\in O(E)$; $f(F)\subset F$ alors $F^\perp$ est stable par f.*

Proposition 34.100. *Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 2, $f\in\mathcal{L}(E)$, (a_1, a_2) une BON de E, $A=\mathrm{Mat}_{(a_1,a_2)}(f)$ alors $f\subset O(E)\Leftrightarrow A$ est de la forme :*
$(1)A=\left(\begin{smallmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{smallmatrix}\right)$, $f\in O^+(E)$, $(2)A=\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & -\alpha\end{smallmatrix}\right)$, $f\in O^-(E)$ *avec* $\alpha^2+\beta^2=1$.

Proposition 34.101. $\mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$ *est commutatif.*

Soit $U=\{z; z\in\mathbb{C}, |z|=1\}$, U est un groupe multiplicatif. $\forall\lambda\in U$, $h_d\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \lambda z\end{array}\right.$, $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$. $\lambda=\alpha+i\beta$, $h_\lambda\in\mathcal{L}(\mathbb{C}_\mathbb{R})$. $\mathbb{C}$: $1\in\mathbb{C}, i\in\mathbb{C}$, $(1,i)$ est une $\mathbb{R}$-base de $\mathbb{C}$, $M_{(1,i)}(f)=\left(\begin{smallmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{smallmatrix}\right)$ puisque $h_\lambda(1)=\lambda=\alpha+i\beta$ et $h_\lambda(i)=\lambda i=i\alpha-\beta$.

Proposition 34.102. $\forall \lambda \in U, \lambda \in \mathrm{SO}(\mathbb{R}^2), \left| \begin{array}{ccc} U & \to & \mathrm{SO}(\mathbb{R}^2) \\ \lambda & \mapsto & h_\lambda \end{array} \right.$.

Proposition 34.103. *Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 2, alors :*

i. $\mathrm{SO}(E)$ *est commutatif,*

ii. Soit a_1, b_1 unitaires alors $\exists! f; f(a_1) = b_1$.

Rappel : $\mathrm{Fix}(f) = \{x; f(x) = x\}$.

Corollaire 34.104. *Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 2, $f \in O^+(E)$. Alors* $\mathrm{Fix}(f) = \{0\}$.

Proposition 34.105. *Soit E un espace vectoriel dimension 2, $f \in O^-(E)$. Alors f est un symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle.*

Rajouter
Définition d'une réflexion
Définition d'un retournement

34.9.4 Espace $\mathbb{C}^n$.

Lemme 34.106. *On a $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n \oplus i\mathbb{R}^n$.*

Lemme 34.107. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, $f \in L(E)$ alors (i) ou (ii)*

i. Il existe un sous espace vectoriel V de dimension 1 de E stable par f.

ii. Il existe un sous espace vectoriel V de dimension 2 de E stable par f et tel que l'endomorphisme f_V induit par f dans V vérifie $\det(f_V) > 0$.

Proposition 34.108. *Soit E un espace vectoriel de dimension n*

1. *$f \in O(E)$ alors, il existe $F_1; ...; F_p$ sous espace vectoriel de E tels que*
   i. $E = F_1 \overset{\perp}{\oplus} ... \overset{\perp}{\oplus} F_p$
   ii. $\forall i \in \{1; ...; p\}$ $\dim(F_i) = 1$ ou 2. F_i est stable par f et en notant f_i l'endomorphisme induit dans F_i par f on a :
   - *si* $\dim(F_i) = 1$, $f_i = \pm \mathrm{id}_{F_i}$
   - *si* $\dim(F_i) = 2$, $f_i \in O^+(E)$
2. *Si $f \in O^+(E)$ alors il existe $F_1, ..., F_p$ comme ci-dessus vérifiant de plus $\forall i \in \{1; ...; p\}$ tel que* $\dim(F_i) = 1$, *on a* $f_i = \mathrm{id}_{F_i}$.

Traduction matricielle

Si $f \in O(E)$ en réunissant des bases ON des V_k et en les rangeant dans un ordre convenable, on obtient une BON de E sur laquelle :

$$\mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} M_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & M_l & & & \\ & & & \varepsilon_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \varepsilon_{n-l} \end{pmatrix}$$ où $\varepsilon_i = \pm 1$ et où $M_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}$ matrice de rotation avec $\alpha_j^2 + \beta_j^2 = 1$. Si $f \in \mathrm{SO}(E), \forall i, \varepsilon_i = 1$.

Corollaire 34.109. *Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3, $f \in O(E)$ alors :*

i. Il existe une base orthonormée (a_1, a_2, a_3) de E telle que : $M_f = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ii. Si $F \neq \mathrm{id}_E$, alors $\mathrm{Fix}(f)$ est une droite vectorielle appelée axe de la rotation.

Corollaire 34.110. *Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3, $f \in O^-(E)$ alors :*

i. Il existe une base orthonormée (a_1, a_2, a_3) de E telle que : $M_f = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

ii. Il existe un plan vectoriel V et un rotation $\rho \in O^+(E)$ laissant les éléments de $V^\perp$ fixes tel que $f = \rho \circ \sigma_V = \sigma_V \circ \rho$ où σ_V est la symétrie orthogonale par rapport à V.

Produit mixte dans un espace vectoriel euclidien orienté

Sens

Proposition 34.111. *Soit E un espace vectoriel $(a_1, ..., a_n)$ et $(b_1, ..., b_n)$ deux bases orthonormées de E, f l'endomorphisme tel que $\forall i \in \{1; ...; n\}$, $f(a_i) = b_i$ alors a et b sont de même sens ssi $f \in O^+(E)$.*

34.9.5 Base

Notation : Soit E un espace vectoriel orienté. On note $\mathrm{BON}^+(E)$ l'ensemble des base orthonormées positives. On note $\mathcal{A}\mathrm{lt}_n(E, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications n-linéaires alternées de E dans $\mathbb{R}$.

Proposition 34.112. *Soit E un espace vectoriel orienté, $\varphi \in \mathcal{A}\mathrm{lt}_n(E, \mathbb{R})$ et $(a_1, ..., a_n) \in \mathrm{BON}^+(E)$. Alors $\varphi(a_1, ..., a_n)$ est indépendant du choix de $(a_1, ..., a_n) \in \mathrm{BON}^+(E)$.*

34.9.6 Produit mixte

Théorème 34.113. *Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n. Il existe sur E une unique application $\mu \in \mathcal{A}\mathrm{lt}_n(E, \mathbb{R})$ telle que $\forall a \in \mathrm{BON}^+(E), \mu(a_1, ..., a_n) = 1$.*

Définition 34.114. *μ est le produit mixte. On note $\mu(v_1, ..., v_n) = [v_1, ..., v_n]$.*

Remarque 34.115. Ce produit mixte existe dans n'importe quel espace vectoriel orienté.

- Dimension 1 : $v = \lambda a_1$, si $a_1 > 0$, $[v] = \lambda$.
- Dimension 2 : $(a_1, a_2) \in \mathrm{BON}^+(E) \Rightarrow [v_1, v_2] = \frac{D(v_1, v_2)}{D(a_1, a_2)}$.
- $[u, v, w] = \det(u, v, w) = (u \wedge v) \cdot w$

34.9.7 Produit vectoriel

Soit E un espace vectoriel euclidien, $\dim(E) = n$. Soit l'isomorphisme d'espace vectoriel $\left| \begin{array}{ccc} E^* & \to & E \\ u & \mapsto & u^\# \end{array} \right.$ vérifiant $u(x) = (u^\# | x)$, $\forall (x_1, ..., x_{n-1}) \in E^{n-1}$, posons $\mathrm{PV}(x_1, ..., x_n) = [\bullet, x_1, ..., x_{n-1}]$ où $[\bullet, x_1, ..., x_{n-1}]$: $\left| \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & [x, x_1, ..., x_{n-1}] \end{array} \right.$

$\mathrm{PV}(x_1, ..., x_{n-1}) \in E$, $\mathrm{PV}: E^{n-1} \to E$ est une application $n-1$-linéaire alternée. C'est le produit vectoriel. $(x_0 | \mathrm{PV}(x_1, ..., x_2)) = [x_0, x_1, ..., x_{n-1}], \forall x_0 \in E$. $(x_0 | x_1 \wedge x_2) = [x_1, x_2, x_3]$.

Angle

Définition

Définition 34.116. *Soit E un espace vectoriel euclidien, $u \in E$, $u \neq 0$, $v \in E$, $v \neq 0$. $\mathrm{Ang}(u, v) = \theta = \arccos\left(\frac{u}{\|u\|} \middle| \frac{v}{\|v\|} \right)$ est l'angle non orienté des vecteurs u et v.*

Proposition 34.117. *On a $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ et $(u|v) = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos(\theta)$*

34.9.8 Angle orienté de vecteurs dans un plan vectoriel orienté

Rappel : On définit l'exponentielle complexe exp: $\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\end{array}\right.$. $\theta \in \mathbb{R}$, $\exp(i\theta) \in \mathbb{C}$, $\exp(i\theta) = X + iY \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} X = \cos(\theta) \\ Y = \sin(\theta)\end{array}\right.$.

Théorème 34.118. *Soit* $U = \{(\alpha,\ \beta) \in \mathbb{R}^2;\ \alpha^2 + \beta^2 = 1\}$ *alors l'application* $\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & U \\ \theta & \mapsto & (\cos(\theta), \sin(\theta)) = e^{i\theta}\end{array}\right.$ *est surjective et* $\forall (\alpha, \beta) \in U$, *l'image réciproque de* (α, β) *par* h *est une classe modulo* 2π *d'un réel, c'est à dire un élément de* $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Rappel : $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est un groupe pour $\mathrm{Cl}(x) + \mathrm{Cl}(y) = \mathrm{Cl}(x + y)$.

Définition 34.119. *Soit* (E, O) *un plan vectoriel euclidien orienté,* $(u, v) \in E \times E$, $\|u\| = \|v\|$. *Soit* $\tilde{u}$ *le vecteur unitaire tel que* $(u, \tilde{u}) \in \mathrm{BON}^+(E)$, $v = \alpha u + \beta\tilde{u}$, $\|v\| = 1$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, $(\alpha, \beta) \in U$. *L'ensemble des* $\theta \in \mathbb{R}$ *tels que* $\cos(\theta) = \alpha$ *et* $\sin(\theta) = \beta$ *est un élément de* $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. *Cette classe sera notée :* $(u, v)^\wedge$ *: elle s'appelle l'angle orienté de* u *et* v *dans cet ordre, ainsi :* $\theta \in (u, v)^\wedge \Leftrightarrow v = (\cos(\theta))u + (\sin(\theta)\tilde{u}$.

Exemple 34.120.

1. $(u, u)^\wedge = \mathcal{C}l(0)$ car $u = 1u + 0\tilde{u}$.
2. $(u, -u)^\wedge = \mathcal{C}l(\pi)$ car $-u = -1u + 0\tilde{u}$.

Remarque 34.121. $(u,\ v)^\wedge$ a une orientation. Si on change l'orientation c'est à dire dans $(E,\ \tilde{\theta})$ (qui est aussi un espace vectoriel euclidien orienté) les angles différents d'un signe $-$. $(u,\ v)^{\wedge\theta} = -(u, v)^{\wedge\tilde{\theta}}$.

Définition 34.122. *Si* $u \in E\backslash\{0\}$ *et* $v \in E\backslash\{0\}$ $(u,\ v)^\wedge = \left(\frac{u}{\|u\|};\ \frac{v}{\|v\|}\right)^\wedge$. *On note* $(u,\ v)^\wedge$ *une détermination quelconque de l'angle* $(u, v)^\wedge$ *c'est à dire un élément quelconque de* $(u, v)^\wedge$.

34.9.9 Angle orienté d'une rotation vectorielle dans un plan vectoriel orienté

Définition 34.123. *Soit* $f \in O^+(E)$, *alors si* u *est un vecteur unitaire, l'angle orienté* $(u,\ f(u))^\wedge$ *ne dépend pas du choix de* u. *On l'appelle angle de la rotation de* f. *On le note* $\mathcal{A}(f)$.

Remarque 34.124. Une rotation vectorielle dans E espace vectoriel euclidien orienté, est déterminée par son angle $\mathcal{A}(f)$: $f(0) = 0, \forall w \in E\backslash\{0\}$, $f\left(\frac{w}{\|w\|}\right) = \cos(\theta)\frac{w}{\|w\|} + \sin(\theta)\frac{w}{\|w\|}$, $f(w) = \|w\|\left(\cos(\theta)\frac{w}{\|w\|} + \sin(\theta)\frac{w}{\|w\|}\right)$.

Proposition 34.125. *Soit* E *un espace vectoriel euclidien de dimension* 2. $(a_1,\ a_2)$ *une* $\mathrm{BON}^+(E)$, $f \in \mathcal{L}(E)$, $A = M(f,\ a_1,\ a_2)$ *alors* f *est la rotation d'angle* $\mathrm{cl}_{2\pi\theta}$ *ssi* $A = \begin{pmatrix} f(a_1) & f(a_2) & \\ \cos\theta & -\sin\theta & a_1 \\ \sin\theta & \cos\theta & a_2 \end{pmatrix}$ $\theta \in (a_1, a_2)^\wedge$.

Notation : $\forall\theta \in \mathbb{R}$, on note f_θ la rotation d'angle $\mathrm{Cl}_{2\pi}(\theta)$ (on dit souvent : d'angle θ).

Théorème 34.126. *Soit* $(E, \mathcal{O})$ *un espace orienté de dimension* 2 *alors* $\left|\begin{array}{ccc}\mathrm{SO}(E) & \to & \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \\ f & \mapsto & \mathcal{A}(f)\end{array}\right.$ *est un isomorphisme de groupes. i.e. l'application est bijective* $A(g_2 \circ g_1) = A(g_2) + A(g_1)$.

Proposition 34.127.

i. h: $\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathrm{SO}(E) \\ \lambda & \mapsto & f_\theta\end{array}\right.$ *est un morphisme de* $\mathbb{R}$ *sur* $\mathrm{SO}(E)$.

ii. h passe au quotient $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et l'application $\tilde{h}$ obtenue par passage au quotient est un isomorphisme de groupes de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathrm{SO}(E)$, dont l'application réciproque est l'application : $f \mapsto \mathcal{A}(f)$.

Proposition 34.128. *Soit u_1, u_2, u_3 3 vecteurs unitaires dans $(E, \mathcal{O})$ plan vectoriel orienté. Alors :*

i. $(u_1, u_3)^\wedge = (u_1, u_2)^\wedge + (u_2, u_3)^\wedge$ dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. (Relation de Chasles). $\Leftrightarrow (u_2, u_3)^\wedge = (u_1, u_3)^\wedge - (u_1, u_2)^\wedge$.

ii. $(u_1, u_1)^\wedge = 0$ et $(u_1, u_2)^\wedge = -(u_2, u_1)^\wedge$.

Remarque 34.129. On peut généraliser à n vecteurs unitaires.

Proposition 34.130. *Soit E un espace vectoriel orienté, $\dim(E) = 2$, u_1, u_2 unitaires :*

i. si $f \in \mathrm{SO}(E), (f(u_1), f(u_2))^\wedge = (u_1, u_2)^\wedge$

ii. si $f \in O^-(E), (f(u_1), f(u_2))^\wedge = -(u_1, u_2)^\wedge$

Proposition 34.131. *Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace vectoriel euclidien orienté, u, v unitaires alors :*

i. $(u|v) = \cos(u, v)^\wedge, [u, v] = \sin(u, v)^\wedge$.

ii. si $[u, v] \geqslant 0$ alors $\mathrm{Ang}(u, v) \in (u, v)^\wedge$, si $[u, v] \leqslant 0$ alors $-\mathrm{Ang}(u, v) \in (u, v)^\wedge$.

Angle de droite dans un plan vectoriel orienté

Notons $\mathcal{D}(E) = \{\text{droites vectorielles de } E\}$, D_1, D_2 deux droites, $u_i \in \vec{D_i}$, $\|u_i\| = 1$ si $\theta \in (u_1, u_2)^\wedge$ alors $\mathrm{Cl}_\pi(\theta)$ ne dépend que de (D_1, D_2), $(D_1, D_2)^\wedge$ est un angle de droite appartenant à $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$: $\mathrm{Cl}_\pi(\theta) + \mathrm{Cl}_\pi(\varphi) = \mathrm{Cl}_\pi(\theta + \varphi)$.

Proposition 34.132. *D_1, D_2, D_3 trois droites dans $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$.*

- $(D_1, D_3)^\wedge = (D_1, D_2)^\wedge + (D_2, D_3)^\wedge$
- $(D_1, D_1)^\wedge = 0$
- $(D_1, D_2)^\wedge = -(D_2, D_1)^\wedge$.

Proposition 34.133.

i. si $f \in \mathrm{SO}(E)$, alors $(f(D_1), f(D_2))^\wedge = (D_1, D_2)^\wedge$ dans $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$.

ii. si $f \in O^-(E)$, alors $(f(D_1), f(D_2))^\wedge = -(D_1, D_2)^\wedge$

34.9.10 Rotation en dimension 3

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3, $f \in \mathrm{SO}(E)$, supposons $f \neq \mathrm{id}_E$. On sait que $\mathrm{Fix}(f)$ est une droite vectorielle. Posons $W = \mathrm{Fix}(f)$ et $V = W^\perp$. On a $f(W) \subset W$, f isométrie $\Rightarrow f(V) \subset V$. Soit f_V l'endomorphisme induit dans V par f. On a vu que $f_V \in \mathrm{SO}(V)$. Si V est orienté, on appelle angle orienté de f relativement à l'orientation de V, l'angle de la rotation f_V. Si E est orienté ainsi que W, on en déduite une orientation de V : soit (a_3) une base positive de W, on dira que (a_1, a_2) est positive lorsque (a_1, a_2, a_3) est positive. On voudrait définier l'orientation comme étant la classe de (a_1, a_2) où (a_1, a_2) est une base de V telle que (a_1, a_2, a_3) soit positive. Si (b_1, b_2) est un base de V telle que (b_1, b_2, a_3) est positive. Est-ce-que (b_1, b_2) et (a_1, a_2) ont le même sens ? (a_1, a_2, a_3) et (b_1, b_2, a_3) sont positives, donc $\Delta = \frac{D(b_1, b_2, a_3)}{D(a_1, a_2, a_3)} \geqslant 0$, $\Delta = \begin{vmatrix} A & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{D(b_1, b_2)}{D(a_1, a_2)} > 0$ donc (b_1, b_2) et (a_1, a_2) sont de même sens. Donc $\mathrm{Cl}(b_1, b_2) = \mathrm{Cl}(a_1, a_2)$. La classe de (a_1, a_2) est l'orientation de V déduite de l'orientation de E et de l'orientation de l'axe W.

Chapitre 35
Géométrie affine

Définition 35.1. *Une partie X de E est dite* ***convexe*** *si et seulement si pour tout $a, b \in X$, $[a, b] \subset X$.*

35.1 Espace affine associé à un espace vectoriel

Définition 35.2. *Soient E un ensemble non vide, $\vec{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et une application f: $\mathcal{E} \times E \to \vec{E}$.*

Le triplet $(\vec{E}, E, f)$ est appelé ***espace affine*** *si et seulement si f vérifie les conditions suivantes :*

a) $\forall a \in E$, *l'application partielle $f(a, \bullet)$ est une bijection.*

b) $\forall x, y, z \in E, f(x, y) + f(y, z) = f(x, z)$ *(Relation de Chasles).*

L'ensemble $\vec{E}$ est appelé ***espace vectoriel associé*** *à l'espace affine, ses éléments sont appelés* ***vecteurs****. L'ensemble E est appelé* ***espace affine de direction*** *$\vec{E}$, ses éléments sont appelés* ***points****.*

Définition 35.3. *Soient $\mathcal{E}$ un ensemble non vide, $\vec{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et une application φ: $\vec{E} \times E \to E$ pour laquelle, on notera $x \oplus \vec{u}$ la valeur $f(x, \vec{u})$.*

Le triplet $(\vec{E}, \mathcal{E}, \varphi)$ est appelé espace affine si et seulement si les propriétés suivantes sont vérifiées :

a) $\forall x \in E, \forall \vec{u}, \vec{v} \in \vec{E}, (x \oplus \vec{u}) \oplus \vec{v} = x \oplus (\vec{u} + \vec{v})$.

b) $\forall x, y \in E, \exists! \vec{v} \in \vec{E}; y = x \oplus \vec{v}$.

Remarque 35.4.

1. Si $y = x \oplus \vec{v}$ on pourra adopter la notation suivante : $\vec{v} = y \ominus x$ ou $\vec{v} = \overrightarrow{xy}$.
   Ainsi y peut aussi s'écrire : $y = x \oplus (y \ominus x)$.
   Attention, Les symboles et notations $\oplus, \ominus, \vec{u}$ ont été utilisés pour éviter toute confusion avec l'addition et la soustraction dans $\vec{E}$ et pour différencier les éléments de E des éléments de $\vec{E}$. Par la suite on pourra adopter les signes et notations $+, -, u$ à la place de $\oplus, \ominus, \vec{u}$ à condition de se rappeler la nature de ses opérations et des éléments sur lesquels elles s'appliquent et de leurs propriétés respectives.
2.

Proposition 35.5. *Soient $\mathcal{E}$ un espace affine, $\forall a, b, c, d \in \mathcal{E}$ et $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \vec{\mathcal{E}}$:*

i. $\forall x \in \mathcal{E}, x \oplus \vec{0} = x$

ii. $(c \ominus a) = (c \ominus b) + (b \ominus a)$ *i.e.* $\vec{ac} = \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc}$ *(Relation de Chasles)*

iii. $(b \ominus a) = -(a \ominus b)$ *i.e.* $\overrightarrow{ab} = -\overrightarrow{ba}$

iv. $(c \ominus a) = (c \ominus b) - (a \ominus b)$ *i.e.* $\overrightarrow{ac} = \overrightarrow{bc} - \overrightarrow{ba}$

v. $(a \oplus \vec{u}) - (b \oplus \vec{v}) = (a \ominus b) + (\vec{u} - \vec{v})$

vi. $a \oplus (b \ominus c) = b \oplus (a \ominus c)$

vii. $(a \oplus \vec{u}) - c = (a \ominus c) + \vec{u}$

Définition 35.6. *Soient $\mathcal{E}$ un ensemble non vide, $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et une application $\varphi: E \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$.*

Le triplet $(E, \mathcal{E}, \varphi)$ est appelé espace affine si et seulement si le groupe additif $(E, +)$ opère simplement et transitivement sur $\mathcal{E}$ au moyen de l'application φ.

Remarque 35.7. Bien qu'il ne soit pas unique l'espace vectoriel associé E peut être noté $\vec{\mathcal{E}}$.

Définition 35.8. *On appelle **dimension d'un espace affine** $\mathcal{E}$ la dimension de son espace vectoriel associé $\vec{\mathcal{E}}$:* $\dim(\mathcal{E}) = \dim(\vec{\mathcal{E}})$.

Exemple 35.9.

35.2 Repère cartésien

page 107 François Combs. Bréal.

35.3 $\mathbb{R}$-espace Affine orienté

Définition 35.10. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace affine.*
*On dit que E est **orienté** ssi $\vec{E}$ est orienté.*

35.4 Application affine

Définition 35.11. *Soient E, F deux espaces affines définis sur le même corps commutatif $\mathbb{K}$.*
*Une **application** $f : E \to F$ est dite **affine** si et seulement s'il existe une application linéaire l de $L(\vec{E}, \vec{F})$ telle que : $\forall x \in E, \forall \vec{u} \in \vec{E}, f(x \oplus \vec{u}) = f(x) \oplus l(\vec{u})$.*
*L'application l est appelée **application linéaire associée à l'application affine** f, on la note L_f.*

Remarque 35.12.

- En posant $x' = x \oplus \vec{u}$, on a $\vec{u} = x' \ominus x$ et la condition $f(x \oplus \vec{u}) = f(x) \oplus l(\vec{u})$ s'écrit : $f(x') \ominus f(x) = l(x' \ominus x)$.
- L'application linéaire associée à l'application affine f peut aussi être notée $\vec{f}$ les conditions s'écrivent alors $f(x \oplus \vec{u}) = f(x) \oplus \vec{f}(\vec{u})$ et $f(x') \ominus f(x) = \vec{f}(x' \ominus x)$ ou encore $\overrightarrow{f(x)f(x')} = \vec{f}(\overrightarrow{xx'})$.

Définition 35.13. *Soient E, F deux espaces affines définis sur le même corps commutatif $\mathbb{K}$ et $f : E \to F$ une application affine.*

i. f injective $\Leftrightarrow L_f$ injective.

ii. f surjective $\Leftrightarrow$ L_f surjective.

iii. f bijective $\Leftrightarrow L_f$ bijective, dans ce cas f^{-1} est aussi affine et $L_{f^{-1}} = (L_f)^{-1}$.

Définition 35.14. *Soient E, F deux espaces affines définis sur le même corps commutatif $\mathbb{K}$. On appelle isomorphisme affine de $E \to F$ toute bijection affine.*

Exemple 35.15. D'isomorphisme affine. Soit $\omega \in E$ alors :

i. Θ_ω: $\left| \begin{array}{ccc} E & \to & \vec{E} \\ x & \mapsto & x - \omega \end{array} \right.$ est un isomorphisme affine l'application linéaire associée est id_E.

ii. L'isomorphisme réciproque est ψ_ω: $\left| \begin{array}{ccc} \vec{E} & \to & E \\ u & \mapsto & \omega + u \end{array} \right.$ dont l'application linéaire associée est aussi $\mathrm{id}_{\vec{E}} : \vec{E} \to E$.

Proposition 35.16. *Soient E, F deux espaces affines définis sur le même corps commutatif $\mathbb{K}$, $x_0 \in E$, $y_0 \in F$, $l \in L(E,F)$ alors :*

Il existe une unique application affine telle que $f(x_0) = y_0$ et $L_f = l$. On a $f(x) = y_0 + l(x - x_0)$.

Proposition 35.17. *Soient E, F, G trois espaces affines définis sur le même corps commutatif $\mathbb{K}$ et $f: E \to F$, $g: F \to G$, 2 applications affines alors :*

- *$g \circ f$ est affine,*
- *et $L_{g\circ f} = L_g \circ L_f$.*

Proposition 35.18. *Soient E, F deux espaces vectoriels (munis de leurs structures canoniques d'espace affine) alors les applications affines de $E \to F$ sont de la forme : $u \mapsto l(u) + v$ ou $l \in L(\vec{E}, F)$ et où $v \in F$.*

Remarque 35.19. On ajoute une constante à une application linéaire.

	Application linéaire	Application affine
$L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$	$x \mapsto a\,x$	$x \mapsto a\,x + b$
$L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$	$(x, y) \mapsto a\,x + b\,y$	$(x, y) \mapsto a\,x + b\,y + c$

Définition 35.20. *Soit E un espace affine. On appelle repère cartésien de E tout couple (ω, B) où ω est un point de E et B est une base de $\vec{E}$. ω est appelé origine.*

Si pour un point $m \in E$, on a $m - \omega = \sum_{i\in I} x_i a_i$ $(x_i)_{i\in I}$ sont appelées coordonnées de m par rapport à $(\omega; B)$.

Proposition 35.21. *Soient E un espace affine de dimension n, (w, B) un repère cartésien et un point m tel que $m - \omega = \sum_{i\in I} x_i a_i$ alors :*

$$h: \left| \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{K}^n \\ m & \mapsto & (x_1, ..., x_n) \end{array} \right. \text{ est un isomorphisme affine dont l'application linéaire associée } k: \left| \begin{array}{ccc} \vec{E} & \to & \mathbb{K}^n \\ \sum X_i a_i & \mapsto & (X_1, ..., X_n) \end{array} \right.$$

35.4.1 Translation

Définition 35.22. *Soient E un espace affine, $\vec{v} \in \vec{E}$.*

On appelle translation de vecteur $\vec{v}$ l'application $\mathcal{T}_{\vec{v}}$: $\left| \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x + \vec{v} \end{array} \right.$.

Proposition 35.23. *Dans un espace affine. Les translations sont les applications affines telles que : $L_f = \mathrm{Id}_{\vec{E}}$.*

35.4.2 Homothétie

Définition 35.24. *Soient E un espace affine, a un point de E, $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$.*

*On appelle **homothétie de centre a** et **de rapport λ** l'application h:* $\left| \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & a + \lambda(x - a) \end{array} \right.$.

On la notera $h_{a,\lambda}$.

Remarque 35.25. Si $\lambda = 1$ alors $h = \mathrm{Id}_E$.

Proposition 35.26. *Supposons $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 1$, alors les homothéties de rapport λ sont les applications affines telles que : $L_f = \lambda\,\mathrm{Id}_{\vec{E}}$.*

Proposition 35.27. *Si $h = h_{a,\lambda}$ avec $\lambda \neq 1$ alors h a un seul point fixe a.*

35.4.3 Groupe des automorphismes

Définition 35.28. *Un automorphisme affine d'un espace affine E est un isomorphisme de $E \to E$.*

Proposition 35.29. *L'ensemble des automorphismes de $E \to E$ est un groupe pour la loi $\circ$.*

Définition 35.30. *L'ensemble des automorphismes de E est appelé groupe affine. On le note* $\mathrm{GA}(E)$.

Proposition 35.31. *$\mathcal{T}$ l'ensemble des translations de E est un sous-groupe distingué de* $\mathrm{GA}(E)$.

Proposition 35.32. *Soient E un espace affine, $\mathcal{H}, \mathcal{T}$ respectivement l'ensemble des homothéties affine et des translations alors : $\mathcal{G} = \mathcal{H} \cup \mathcal{T}$ est un sous-groupe distingué de* $\mathrm{GA}(E)$.

35.5 Sous-espace ou variété affine d'un espace affine E

Proposition 35.33. *Soient E un espace affine, $\vec{V}$ un sous espace vectoriel de $\vec{E}$ et x, $y \in E$ alors la relation $\mathcal{R}$ définie par : $(x \mathcal{R} y) \Leftrightarrow (x - y \in \vec{V})$ est une relation d'équivalence.*

Remarque 35.34. Intéret de la relation d'équivalence $\mathcal{A}(x) = \{y;\ y\mathcal{R}x\}$ l'ensemble des classes forme une partition de E. $x\mathcal{R}x$, $x \in \mathrm{cl}_x$.

Définition 35.35. *Les classes de $\mathcal{R}_V$ s'appellent les sous-espaces affines ou variété affine de E de direction $\vec{V}$.* $\mathrm{cl}_x = \{y; y - x \in V\} = \{x + V\} = \{y; y \in x + V\} = \{x + v; v \in V\}$.

Remarque 35.36.

1. Si $V = \{0\}$, $\mathrm{cl}_x = 0 + \{0\} = \{x\}$.
2. Si $V = \vec{E}$, $\mathrm{cl}_x = x + V = x + \vec{E}$, $\mathrm{cl}_x = \vec{E}$.

Proposition 35.37. *Soit A un sous espace affine de E de direction $\vec{V}$ et $a \in A$ alors $\vec{V} = A - a = \{x - a; x \in A\}$. On notera $\vec{A}$ la direction de l'espace affine A.*

35.5.1 Sous-espaces affines particuliers

Définition 35.38. *On appelle hyperplan affine d'un espace affine E attaché à un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\vec{E}$, toute variété affine de E dont le sous-espace vectoriel associé est un hyperplan vectoriel de $\vec{E}$.*

Proposition 35.39. *Un hyperplan d'un espace affine de dimension n est un sous-espace affine de dimension $n - 1$.*

Codimenssion	Dimension	Nom du sous espace affine
	1	droite affine
	2	plan affine
1	$n-1$ (en dimension finie)	hyperplan affine

35.5.2 Parallélisme

Définition 35.40. *Soient E un espace affine et A, B deux sous espaces affines de E.*

- *On dit que A est parallèle à B ssi $\vec{A} = \vec{B}$.*
- *On dit que A est faiblement parallèle à B ssi $\vec{A} \subset \vec{B}$.*

Remarque 35.41.

1. Le parallélisme est une relation d'équivalence sur l'ensemble des sous-espaces affines de E.
2. Le parallélisme faible est une relation de préordre (i.e. réflexive, transitive).

Proposition 35.42. *Soit E un espace affine, A un sous espace affine de E et x_0 un point de E alors il passe par x_0 un sous espace affine et un seul parallèle à A.*

Proposition 35.43. *Soient E un espace affine et A un sous espace affine de direction V. Alors A est canoniquement muni d'une structure d'espace affine.*

35.5.3 Intersection de sous-espaces affines et sous-espace affine engendré par une partie

Proposition 35.44. *Soient E un espace affine, $(A_i)i \in I$ une famille de sous-espace affine de E. Supposons $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \varnothing$ alors $\bigcap_{i\in I} A_i$ est un sous-espace affine de direction $\bigcap \vec{A_i}$.*

Proposition 35.45. *Soient E un espace affine, A, B deux sous espaces affines tels que $\vec{A} + \vec{B} = \vec{E}$ alors $A \cap B \neq \varnothing$ et $A \cap B$ est un sous espace affine de direction $\vec{A} + \vec{B}$.*

Proposition 35.46. *Soient E un espace affine de dimension $n \geqslant 2$ et A, B deux hyperplans non parallèles alors $A \cap B$ est un sous espace affine de dimension $n-2$.*

Remarque 35.47. Que signifie ce théorème

$n=2$	$n=3$
Nous sommes dans le plan	Nous sommes dans l'espace
L'intersection de 2 droites est un point	L'intersection de deux plans est une droite

Définition 35.48. *Soient $X \subset E$, $X \neq \varnothing$. L'intersection de tous les sous-espaces affines de E qui contiennent X est un sous-espace affine de E appelé sous-espace affine engendré par X. On le note* $\mathrm{Aff}(X)$.

Proposition 35.49. *Le sous espace affine engendré par X est le plus petit sous espace affine contenant X.*

Proposition 35.50. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace affine $(x_i)_{i\in I}; \forall i \in I, x_i \in E$ alors* $\mathrm{Aff}(\{x_i; i \in I\}) = x_{i_0} + \sum_{i\in I\setminus\{x_{i_0}\}} \mathbb{K}(x_i - x_{i_0})$.

Exemple 35.51.

- $\mathrm{Aff}(\{x_0, x_1\}) = x_0 + k(x_1 - x_0)$.
- $\mathrm{Aff}(\{x_0, x_1, x_2\}) = x_0 + k(x_1 - x_0) + k'(x_2 - x_0)$.

35.5.4 Propriétés des sous-espace affines

Lemme 35.52. *Soient E un espace affine et A, B des sous espaces affines de E.*
Si $A \subset B$ et $\mathrm{dimA} = \mathrm{dimB} < +\infty$ *alors $A = B$.*

Proposition 35.53. *Soit E un espace affine.*

i. Par deux points distincts, il passe une droite et une seule. Cette droite est le sous espace affine engendré par l'ensemble des deux points.

ii. Par trois points non alignés, il passe un plan et un seul. Ce plan est le sous-espace affine engendré par l'ensemble des trois points.

Corollaire 35.54. *Soient E un espace affine, A un sous-espace affine de E et $a, b \in E$; $a \neq b$ alors $D_{a,b} \subset A$.*

35.6 Familles affinement libres, repère ou base affine

35.6.1 Famille libre

Proposition 35.55. *Soient E un espace affine, $(x_i)_{i\in I}$ une famille de points de E.*
Les propositions suivantes sont équivalentes :

i. $\exists i_0 \in I; (x_i - x_{i_0})_{i\in I\setminus\{x_{i_0}\}}$ *est vectoriellement libre.*

ii. $\forall i_0 \in I$, *la famille* $(x_i - x_{i_0})_{i\in I\setminus\{x_{i_0}\}}$ *est vectoriellement libre.*

Remarque 35.56. Si $(x_i)_{i\in I}$ est affinement libre alors $(x_i)_{i\in I}$ est injective, *i.e.* $i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$.

Définition 35.57. *Soient E un espace affine et $A \subset E$.*
A est dite affinement libre ssi l'une des propriétés précédentes est vérifiée.

Remarque 35.58. Soit E un espace affine de dimension n. Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille affinement libre alors $\text{card}(I) \leqslant n+1$.

35.6.2 repère ou base affine

Définition 35.59. *Soit E un espace affine. On appelle* ***repère ou base affine*** *de E, toute famille $(x_i)_{i\in I}$ de points E tels que :*

i. $(x_i)_{i\in I}$ *est affinement libre,*

ii. l'espace affine engendré par les x_i, $i \in I$: $\text{Aff}(\{x_i;\ i \in I\}) = E$. *(autrement dit E est engendré par la famille $(x_i)_{i\in I}$.*

Définition 35.60. *Soient E un espace affine et $A \subset E$. On dit que A est une base affine ensembliste ssi la famille canonique associée à A est une base affine de E. Autrement dit : A est affinement libre et* $\text{Aff}(A) = E$.

Proposition 35.61. *Soient E un espace affine, $i_0 \in I$, $(x_i)_{i\in I}$; $\forall i \in I$, $x_i \in E$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

i. $(x_i)_{i\in I}$ *est une base affine.*

ii. $(x_i - x_{i_0})_{i\in I\setminus\{i_0\}}$ *est une base linéaire.*

Proposition 35.62. *Soit E un espace affine alors :*

i. E possède une base affine.

ii. Si $\dim(E) = n$ *et si $(x_i)_{i\in I}$ est une base affine de E alors* $\text{card}(I) = n+1$.

Proposition 35.63. *Soient E un espace affine de dimension n, $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$; $\forall i, x_i \in E$. Les propositions suivantes sont équivalentes.*

i. $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ *est une base affine,*

ii. $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ *est affinement libre.*

Proposition 35.64. *Soient E un espace affine, F un sous espace affine de E et $(x_i)_{i\in I}$; $\forall i \in I$, $x_i \in E$. Supposons que $\forall i \in I\setminus\{i_0\}$, $x_i \in F$ et qque $(x_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}$ est affinement libre alors $(x_i)_{i\in I}$ est une base affine.*

Note 35.65. Permet de fabriquer des familles affinement libres.

35.6.3 Sous-espaces affines supplémentaires

Définition 35.66. *Soient E un espace affine et A, B deux sous espaces affines de E. On dit que A et B sont supplémentaires ssi : $\vec{E} = \vec{A} \oplus \vec{B}$. Autrement dit $\vec{E} = \vec{A} + \vec{B}$ et $\vec{A} \cap \vec{B} = \{\vec{0}\}$.*

Proposition 35.67. *Si A, B sont supplémentaires, alors* $\operatorname{card}(A \cap B) = 1$.

Proposition 35.68. *Soient E un espace affine, D un droite et H un hyperplan alors D et H sont supplémentaires ssi D n'est pas faiblement parallèle à H.*

35.7 Projection

Proposition 35.69. *Soient E un espace affine, A sous espace affine de E et $W \subset \vec{E}$ une direction supplémentaire de $\vec{A}$ (autrement dit $\vec{E} = \vec{A} \oplus W$).*

- *Notons B_x le sous espace affine tel que $B_x = x + W$.*
- *Il existe un unique point $y \in E$ tel $A \cap B_x = \{y\}$.*

Définition 35.70. *Soient E un espace affine, A sous espace affine de E et $W \subset \vec{E}$ une direction supplémentaire de $\vec{A}$ (autrement dit $\vec{E} = \vec{A} \oplus W$).*

- *L'unique point y tel que $A \cap B_x = \{y\}$ où $B_x = x + W$ s'appelle le projeté de x sur A parallèlement au sous-espace vectoriel W.*
- *et l'application : $p_{W,A}$:* $\left| \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & y \end{array} \right.$ *est la projection sur A parallèlement à W.*

Note 35.71. Le point y est caractérisé par $y \in A$ et $y - x \in W$.

Proposition 35.72. *Soit f la projection sur A parallèlement à W ($\vec{E} = \vec{A} \oplus W$) alors $f : E \to E$ est affine et $L_f = P_{\vec{A}}$ projecteur associé à la somme directe $\vec{E} = \vec{A} \oplus W$.*

35.8 Théorème de Thalès

Théorème 35.73. *(Théorème de Thalès) Soient $(H_i)_{1 \leqslant i \leqslant 4}$ des hyperplans parallèles d'un espace affine E et D, D' deux droites non faiblement parallèles aux H_i.*

Posons : $\begin{cases} H_i \cap D = \{x_i\} \\ H_i \cap D' = \{x_i'\} \end{cases}$ alors $(x_4 - x_3) = \rho(x_2 - x_1) \Leftrightarrow (x_4' - x_3') = \rho(x_2' - x_1')$.

35.9 Image d'un sous-espace affine par une application affine

Proposition 35.74. *Soient E, F deux espaces affines et $f : E \to F$ une application alors :*

i. Soit A un sous espace affine de E alors $f(A)$ est un sous espace affine de F de direction $L_f(\vec{A})$.

ii. Soit B un sous espace affine de F tel que $f^{-1}(B) \neq \varnothing$ alors $f^{-1}(B)$ est un sous espace affine de E de direction $(L_f)^{-1}(\vec{B})$.

Corollaire 35.75.

i. Si A_1 et A_2 sont des sous espaces affines parallèles dans E alors $f(A_1)$ et $f(A_2)$ sont parallèles dans F.

ii. Si B_1 et B_2 sont des sous espaces affines parallèles dans F tels que $f^{-1}(B_1) \neq \varnothing$ et $f^{-1}(B_2) \neq \varnothing$ alors $f^{-1}(B_1)$ et $f^{-1}(B_2)$ sont parallèles.

Proposition 35.76. *Soient E un espace affine, $f: E \to F$ une application affine et A un sous espace affine de E.*

Si $f(A) \subset A$ alors l'application f_A induite par f dans A est affine, $\vec{A}$ est stable par L_f et L_{f_A} est l'application induite par L_f dans $\vec{A}$.

Théorème 35.77. *(Théorème fondamental de la géométrie affine)* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Soient E, F deux espaces affines, E est de dimension $n \geqslant 2$ et $f: E \to F$ une application.

Si f est injective et transforme toute droite de E en une droite de F alors f est affine.

Remarque 35.78. Pourquoi $\dim(E) \geqslant 2$?

On peut trouver un contre exemple dans le cas $\dim(E) = 1$:

Soit : $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array} \right.$ est injective et transforme une doite en une droite, mais ce n'est pas une application affine (celles-ci sont en effet de la forme $x \mapsto a\,x + b$.

35.10 Equation d'un hyperplan en dimension finie

Théorème 35.79. *Soient E un espace affine de dimension n, $R = (\omega, a_1, ..., a_n)$ un repère cartésien,*

i. Tout hyperplan affine admet une équation de la forme (1): $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \beta = 0$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$ non tous nuls et $\beta \in \mathbb{K}$.

ii. Réciproquement, toute équation du type (1) est l'équation d'un hyperplan affine dont la direction a pour équation $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i = 0$.

Remarque 35.80.

n	Hyperplan	Equation	Conditions
2	droite	$a\,x + b\,y + c = 0$	$(a, b) \neq (0, 0)$
3	plan	$a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$	$(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$

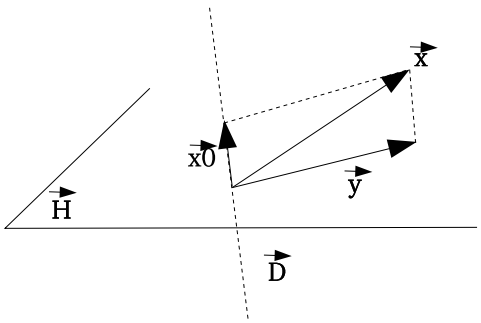
Proposition 35.81. *Soient E un espace affine de dimension n, R un repère et H, H' deux hyperplans tels que : $(H): \sum \alpha_i x_i + \beta = 0$ et $(H'): \sum \alpha'_i x_i + \beta' = 0$.*

Alors

i. H, H' sont parallèles $\Leftrightarrow$ $\exists \rho \in \mathbb{K} \backslash \{0\}$ tel que $(\alpha'_1, ..., \alpha'_n) = \rho(\alpha_1, ..., \alpha_n)$.

ii. $H = H'$ $\Leftrightarrow$ $\exists \rho \in \mathbb{K} \backslash \{0\}$ tel que $(\alpha'_1, ..., \alpha'_n, \beta') = \rho(\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta)$.

Remarque 35.82. Comment trouver l'équation d'un hyperplan :



$\forall x \in E, \vec{x} = \lambda\vec{x_0} + \vec{y}$ l'application φ: $\left|\begin{array}{ccc} \vec{E} & \to & \mathbb{K} \\ \vec{x} & \mapsto & \lambda \end{array}\right.$ est une forme linéaire de noyau $\vec{H} = \ker(\varphi)$.
Prendre un point $a_0 \in H$ commun et un point $m \in H$ quelconque $\overrightarrow{a_0m} \in H$ et $\varphi(\overrightarrow{a_0m}) = 0$ d'où $\varphi(\overrightarrow{a_0o}) + \varphi(\overrightarrow{om}) = 0$ ...

35.11 Barycentre

Proposition 35.83. *Soit E un $\mathbb{K}$-e.a., $(m_i, \alpha_i)_{i\in I} \in E \times \mathbb{K}$ avec I fini. Supposons $\sum \alpha_i \neq 0$, alors il existe un unique point $G \in R$ tel que :*

- $\sum \alpha_i(m_i - g) = 0$, $\sum \alpha_i \overrightarrow{gm} = \vec{0}$.
- $g - \omega = \frac{\sum \alpha_{i(m_i-\omega)}}{\sum \alpha_i}$.

Définition 35.84. *Soit E un $\mathbb{K}$-e.a., $(m_i, \alpha_i)_{i\in I} \in E \times \mathbb{K}$ avec I fini. Supposons $\sum \alpha_i \neq 0$.*
On appelle barycentre de la famille de points et on pose $g = \mathrm{bar}_{i\in I}(x_i,\ \alpha_i)$ l'unique point définit par $\sum \alpha_i(m_i - g) = 0$.

Remarque 35.85.

1. $\forall \lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}, \mathrm{bar}_{i\in I}(x_i, \lambda\alpha_i) = \mathrm{bar}_{i\in I}(x_i, \alpha_i)$.
2. Si $I^* = \{i; \alpha_i \neq 0\}, \mathrm{bar}_{i\in I}(x_i, \alpha_i) = \mathrm{bar}_{i\in I^*}(x_i, \alpha_i)$.
3. $\mathrm{bar}(x, \alpha) = x$.

Définition 35.86. *On appelle isobarycentre ?????*

Exemple 35.87.

card(I)	Hypothèse	Nom
2	$1+1 \neq 0$	Milieu
3	$1+1+1 \neq 0$	Point médian

Proposition 35.88. *Soient E, F deux espaces affines, $f\colon E \to F$ une application affine et $(m_i, \alpha_i)_{i\in I}$ avec I fini.* Si $\sum_{i\in I} \alpha_i \neq 0$ *et $g = \mathrm{bar}_{i\in I}(m_i, \alpha_i)$ alors $f(g) = \mathrm{bar}_{i\in I}(f(m_i), \alpha_i)$.*

Associativité du barycentre

Proposition 35.89. *Soient E un espace affine $(m_i, \alpha_i)_{i\in I}$, tel que $\sum_{i\in I} \alpha_i \neq 0$. Soient $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une partition de I telle que $\forall \lambda \in \Lambda, \sum_{i\in I_\lambda} \alpha_i \neq 0$.*
Si $g = \mathrm{bar}_{i\in I}(m_i, \alpha_i)$ et $g_\lambda = \mathrm{bar}_{i\in I_\lambda}(m_i, \alpha_i)$ avec $s_\lambda = \sum_{i\in I_\lambda} \alpha_i$ alors $g = \mathrm{bar}_{\lambda\in\Lambda}(g_\lambda, s_\lambda)$.

Proposition 35.90. *Soit E un espace affine, A un sous espace affine de E et $g = \mathrm{bar}_{i\in I}(m_i, \alpha_i)$.*
Si $\forall i, m_i \in A$ alors $g \in A$.

Proposition 35.91. *Soient E un espace affine et $X \subset E$.*
Si $\mathrm{bar}(X)$ désigne l'ensemble des barycentres d'une famille ???? alors $\mathrm{bar}(X) = \mathrm{Aff}(X)$.

Proposition 35.92. *Soient E un espace affine de dimension finie, $(m_i)_{i\in I}$ une base affine de E, $(\alpha_i)_{i\in I}, (\alpha'_i)_{i\in I}$ deux familles d'éléments de $\mathbb{K}$.*
Si $g = \mathrm{bar}_{i\in I}(m_i, \alpha_i)$ et $g' = \mathrm{bar}_{i\in I}(m_i, \alpha'_i)$ alors $g = g' \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}; (\alpha'_i)_{i\in I} = \lambda(\alpha_i)_{i\in I}$.

Coordonnées barycentriques d'un point par rapport à une base affine
$\mathrm{Aff}(m_i; i \in I\} = E$ donc $\exists(\lambda_i)_{i\in I}; \sum \lambda_i \neq 0$ $\mathrm{Bar}\{m_i; i \in I\} = E$ tel que $m = \mathrm{bar}_{i\in I}(m_i, \lambda_i)$. La famille définie à facteur non nul $\in \mathbb{K}$ près est appelé système de coordonnés barycentrique de m par rapport à la base affine $(m_i;\ i \in I)$ lorsque $\sum_{i\in I} \lambda_i = 1$, on dit que $(\lambda_i)_{i\in E}$ est le système réduit de coordonnées barycentriques du point m.

Exemple 35.93. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. $g = \mathrm{bar}((a,1)(b,1)(c,1))$, base $\{a, b, c\}$. $g\colon (1,1,1)$ $a'(0,1,1)$.

35.12 Convexité

Définition 35.94. *(à revoir)*

1. $[a, b]$ *désigne l'ensemble de tous les barycentres à coefficients* $\geqslant 0$ *des points* a *et* b. $[a, b] = \{m; m = \omega + \alpha(a - w) + \beta(b - \omega); \alpha + \beta = 1, \alpha \geqslant 0, \beta \geqslant 0\}$, *si* $\omega = a$, $[a, b] = \{m; m = a + \beta(b - a); \beta \in [0, 1]\}$.
2. $[a, b[= [a, b] \backslash \{b\}$.
3. $]a, b[= [a, b] \backslash \{a, b\}$.

Remarque 35.95. Si $E = \mathbb{R}$ et si $a < b$, $[a, b] = \{x; a \leqslant x \leqslant b\}$ définition particulière. Attention parfois, il peut être utile de revenir la définition générale (vue précédement).

Définition 35.96. *Soit* E *un espace affine sur* $\mathbb{R}$.
Une partie A *de* E *est dite convexe ssi* $\forall a, b \in A, [a, b] \subset A$.

Exemple 35.97.

1. Dans $\mathbb{R}$ tout intervalle est une partie convexe.
2. Si A est un sous espace affine de E $\mathbb{R}$-espace affine alors A est convexe.

Remarque 35.98. Si E est un espace affine normé, on pose $\forall x, y \in E, d(x, y) = \|x - y\|$, d est alors une distance (Résultat du cours sur les espaces vectoriels normés).

Proposition 35.99. *Dans un espace affine normé sur* $\mathbb{R}$ *toutes les boules sont convexes.*

Proposition 35.100. *Soit* $(A_i)_{i \in I}$, I *quelconque, une famille de parties convexes dans* E *alors* $\bigcap_{i \in I} A_i$ *est convexe.*

Définition 35.101. *Soit* E *un espace affine et* $X \subset E$. *L'intersection de toutes les parties convexes qui contiennent* X *s'appelle la* ***partie convexe engendrée par*** $\boldsymbol{X}$, *on la note* $\mathrm{conv}(X)$.

Proposition 35.102. *Soient* E, F *deux espaces affines sur* $\mathbb{R}$ *et* $f : E \to F$ *une application affine alors :*

i. $\forall x_1, x_2 \in E, f([x_1, x_2]) = [f(x_1), f(x_2)]$.
ii. Si A *est une partie convexe de* E *alors* $f(A)$ *est convexe.*
iii. Si B *est une partie convexe de* F *alors* $f^{-1}(B)$ *est convexe.*

Proposition 35.103. *Soient* E *un* $\mathbb{R}$*-espace affine,* $A \subset E$, A *convexe,* I *un ensemble fini,* $(x_i)_{i \in I}$ *une famille de points de* A *et* $(\alpha_i)_{i \in I}$ *un famille de réels positifs non nuls alors* $\mathrm{bar}_{i \in I}(x_i, \alpha_i) \in A$.

Définition 35.104. Soient E *un espace affine,* $X \subset E$.
On note $\mathrm{bar}^+(X)$ *l'ensemble des barycentres à coefficients positifs non nul de toutes les familles possibles de* X.

Remarque 35.105. $\mathrm{bar}^+(\{a, b\}) = \mathrm{bar}([a, b])$.

Proposition 35.106. *Soient* E *un espace affine sur* $\mathbb{R}$ *et* $A \subset E$ *alors* $\mathrm{conv}(A) = \mathrm{bar}^+(A)$.

35.12.1 Enveloppe convexe

Définition 35.107. *Soit* E *un espace affine. L'****enveloppe convexe*** *d'eune partie* $\mathcal{A} \neq \varnothing$ *est l plus petit convexe de* E *contenant* $\mathcal{A}$. *On la note* $\mathrm{EC}(\mathcal{A})$.

Proposition 35.108.

1. $\mathrm{EC}(\mathcal{A})$ *est l'intersection de tous les convexe de* E *contenant* $\mathcal{A}$.
2. $\mathrm{EC}(\mathcal{A}) = \{\sum_{i \in I} \lambda_i a_i; (\lambda_i)_{i \in I}, \sum_{i \in I} \lambda_i; \forall i \in I, a_i \in \mathcal{A}, \lambda_i \in \mathbb{R}^+\}$.

Théorème 35.109. *(de Carathéodory) Soit E un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension n. $\mathcal{A}$ une partie non vide de E alors pour tout élément de $\mathrm{EC}(\mathcal{A})$ est ?.*

35.13 Demi-espaces définis par un hyperplan dans un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension finie

Proposition 35.110. *Soient E un espace vectoriel de dimension n, $H = \{m; \sum \alpha_i x_i + \beta = 0; (\alpha_i) \neq (0)\}$ un hyperplan. En notant $f : m \to \sum \alpha_i x_i + \beta$, on a $H = f^{-1}(\{0\})$.*

Les ensembles $H_f^+ = f^{-1}(\mathbb{R}^+)$, $H_f^- = f^{-1}(\mathbb{R}^-)$ et $H_f^{+*} = f^{-1}(\mathbb{R}^{+*})$, $H_f^{-*} = f^{-1}(\mathbb{R}^{-*})$ sont convexes.

Définition 35.111. *Soient E un espace vectoriel de dimension n, $H = \{m; \sum \alpha_i x_i + \beta = 0; (\alpha_i) \neq (0)\}$ un hyperplan. En notant $f : m \to \sum \alpha_i x_i + \beta$, on a $H = f^{-1}(\{0\})$.*

- *Les ensembles $H_f^+ = f^{-1}(\mathbb{R}^+), H_f^- = f^{-1}(\mathbb{R}^-)$ sont les deux demi-espaces au sens large de frontière E.*
- *Les ensembles $H_f^{+*} = f^{-1}(\mathbb{R}^{+*})$, $H_f^{-*} = f^{-1}(\mathbb{R}^{-*})$ sont les deux demi-espaces au sens strict de frontière.*

35.14 Espace Affine normé

35.14.1 Définition

Définition 35.112. *Soit E un espace affine.*

*On dit que E est un **espace affine normé** ssi $\vec{E}$ est un espace vectoriel normé.*

35.14.2 Application différentiable dans un espace affine

Rajouter dérivée d'une fonction affine.

Définition 35.113. *Soit E, F deux espaces affines normés, U un ouvert de E et $f : U \to F$ une application. On dit que f est différentiable au point x_0 ssi il existe une application $l \in \mathcal{L}(\vec{E}, \vec{F})$ telle que $\lim_{x \to x_0} \frac{(f(x) - f(x_0)) - l(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0$ (1).*

Remarque 35.114. Si l existe elle est unique $l = (Df)(x_0)$, la terminologie est la même que pour la différentiabilité dans un espace vectoriel normé.

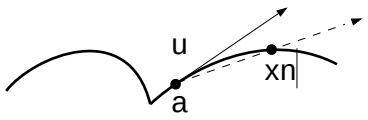
Proposition 35.115. *Soit E, F deux espaces affines normés,*

i. Si $f : U \to F$ est une application affine continue alors f est différentiable en tout point x_0 de E et $(Df)(x_0) = L_f$.

ii. Si E et F sont de dimension n, p et si $(\omega, a_1, ..., a_n)$ $(\omega', b_1, ..., b_p)$ sont des bases de E et F alors en posant : $x - \omega = \sum x_i a_i, x_0 - \omega = \sum_{i=1}^n x_i^0 a_i$, $f(x) - \omega' = \sum_{j=1}^p y_j b_j$, f est différentiable au point x_0 ssi l'application $: (x_1, ..., x_n) \mapsto (y_1, ... y_p)$ est différentiable au point $(x_1^0, ..., x_n^0)$.

35.14.3 Espaces tangents à une partie d'un espace vectoriel normé E

35.14.3.1 Définitions



Définition 35.116. *Soit E, F deux espaces affines normés, $A \subset E, a \in A, u \in E$. On dit que u est tangent au point a à A ssi il existe :*

i. Une suite de réels (λ_i)

ii. une suite de points de A (x_n) telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$.

Telle que : $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n(x_n - a) = u$. On note $\vec{\mathcal{T}}_a A$ l'ensemble des vecteurs tangents en a à A.

Remarque 35.117. $O \in \vec{\mathcal{T}}_a A$ $(x_n = a, \lambda_n \in \mathbb{R})$.

Définition 35.118. *On dit que u est positivement tangent en a à A ssi $\exists(\lambda_n), \lambda_n \geqslant 0, \exists x_n \to a$ telles que $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n(x_n - a) = u$, on note $\vec{\mathcal{T}}_a^{+} A$.*

De plus on a : $\vec{\mathcal{T}}_a^{+} A \subset \vec{\mathcal{T}}_a A$

35.14.3.2 Propriétés

Proposition 35.119. *Soient E, F des espaces vectoriels normés, U ouvert de E $a \in A, A \subset U$, $f: U \to F$ différentiable en a, posons $b = f(a)$ alors :*

i. $(Df)(a)(\vec{\mathcal{T}}_a A) \subset \vec{\mathcal{T}}_b f(A)$

ii. $(Df)(a)(\vec{\mathcal{T}}_a^{+} A) \subset \vec{\mathcal{T}}_b^{+} f(A)$

Remarque 35.120. Il résulte de (2) que si $g: U \to F$ est différentiable en a et si $f_{|A} = g_{|A}$, alors $\forall u \in \vec{\mathcal{T}}_a A, (Df)(a)u = ?$

Proposition 35.121. *Soit E, F deux espaces vectoriels normés, U ouvert de E, V ouvert de F, $f: U \to V$ difféomorphisme (f bijective, différentiable et f' différentiable) $A \subset U$, $a \in A$, posons $b = f(a)$, $B = f(A)$ alors $(Df)(a)\vec{\mathcal{T}}_a A = \vec{\mathcal{T}}_b B$.*

35.14.3.3 Cas particuliers

Proposition 35.122. *Soit V un sous espace vectoriel fermé de l'espace vectoriel normé ? et $a \in V$ alors $\vec{\mathcal{T}}_a V = \vec{\mathcal{T}}_a^{+} V = V$.*

Corollaire 35.123. *A sous espace affine fermé de E espace vectoriel normé, $a \in A$ alors $\vec{\mathcal{T}}_a A = \vec{A}$.*

35.14.4 Sous-variété

35.14.4.1 Définitions

Définition 35.124. *Soit E un espace vectoriel normé de dimension n, $k \in \mathbb{N}^*, A \subset E, a \in A$. On dit que A est au point a une C^k-sous-variété de dimension ? de E lorsqu'il existe un espace vectoriel normé E_1 de dimension ?, un sous-espace vectoriel A_1 de dimension p de E_1, un ouvert U_1 de E_1, voisinage ouvert U de a dans E, et un C^k difféomorphisme $h: U_1 \to U$, tel que $h(U_1 \cap A_1) = U \cap A$. On dit que h^{-1} est un redressement de A au point a.*

Remarque 35.125. On peut toujours se ramener au cas où $A_1 = \mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_p$ et ?$(u_1, ..., u_p)$ base de A_1 $(u_1, ..., u_p, u_{p+1}, ..., u_n)$ base de E. $g: \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & E_1 \\ (t_1, ..., t_n) & \mapsto & t_1u_1 + ... + t_nu_n \end{array} \right.$ est un isomorphisme d'espace vectoriel, $g(e_i)$ et $g(\sum_{1\leqslant i\leqslant p} \mathbb{R}e_i) = \sum_{1\leqslant i\leqslant p} \mathbb{R}u_i = A_1$ g est un difféomorphisme.

Définition 35.126. *A est une C^k-sous-variété de dimension p de E lorsque A l'est en tout point.*

Une sous-variété de dimension 1 est une courbe, de dimension 2 est une surface.

35.14.4.2 Propriétés

si $p=n$, A est une sous-variété de dimension n de E au point a ssi $a\in \overset{\circ}{A}$.

si $p=0$, A est une sous-variété de dimension 0 de E au point a ssi a est un point isolé de A.

35.14.4.3 Espace tangent vectoriel d'une sous-variété ($k\geqslant 1$)

Proposition 35.127. *A sous-variété de E de classe C^k et de dimension p, $a\in A$ alors $\vec{\mathcal{T}}_a A$ est un sous espace vectoriel tangent en a à A.*

Exemple 35.128. $A=\mathbb{R}e_1+\mathbb{R}e_2$, $\overrightarrow{\mathcal{T}_{(0,0)}}A=\mathbb{R}e_1\cup\mathbb{R}e_2$

35.14.4.4 Injectivité de la différentielle

Proposition 35.129. *Soit $f\colon U\to F$, U ouvert de E, $a\in U$, F espace vectoriel normé de dimension finie, f est C^k. Supposons $(Df)(a)$ injective, et que $f\colon U\to f(U)$ est un homéomorphisme alors $f(U)$ est une C^k-sous-variété au point b et $\vec{\mathcal{T}}_b f(U)=\mathrm{Im}((Df)(a))$.*

Proposition 35.130. *$f\colon U\to F$, U ouvert de E, $a\in U$, F espace vectoriel normé de dimension finie, f est C^k. Supposons $(Df(a))$ injective alors il existe un ouvert V de E tel que :*

i. $a\in V\subset U$

ii. $\forall x\in V, (Df)(x)$ *est injective*

iii. $f\colon U\to f(U)$ *est un homéomorphisme*

iv. $f(V)$ *est une C^k-sous-variété de E.*

Remarque 35.131. Si $(Df)(a)$ est injective, on dit que f est une immersion au point ?

Exemple 35.132. $n=1$. On suppose que $U\subset\mathbb{R}$ et $f\colon U\to F$ est une courbe paramétrée. Pour $a\in U$, $(Df)(a)$ injective $\Leftrightarrow f'(a)$.

35.14.4.5 Surjectivité de la différentielle ($k\geqslant 1$)

Proposition 35.133. *Soit E,F deux espaces vectoriels normés de dimension finie, U un ouvert de E, $a\in U$, $f\colon U\to F$ de classe C^k. supposons $(Df)(a)$ surjective, posons $b=f(a)$ alors l'ensemble $A=\{x; f(x)=b\}$ est une C^k sous-variété de E au point a, et $\vec{\mathcal{T}}_a A=\mathrm{Ker}(Df)(a)$.*

Remarque 35.134. Si $(Df)(a)$ est surjective, on dit que f est une submersion au point a.

Définition 35.135. *Soit E,F deux espaces vectoriels normés de dimension finie, $k\in\mathbb{N}^*$, A une C^k sous-variété de E, B une C^k sous-variété et $f\colon A\to B$. On dit que f est différentiable au point a ssi il existe un ouvert U tel que $a\in U$, et $\tilde{f}\colon U\to F$ telle que :*

i. $\tilde{f}$ *coïncide avec f sur $U\cap A$.*

ii. $\tilde{f}$ *est différentiable au point a.*

Remarque 35.136. Si f est différentiable au point a, alors la restriction de $(Df)(a)$ à $\vec{\mathcal{T}}_a A$ est indépendante de choix de $\tilde{f}$, et $(Df)(a)\vec{\mathcal{T}}_a A\subset\vec{\mathcal{T}}_b B$, où $B=f(A)$. L'application $\left|\begin{array}{ccc}\vec{\mathcal{T}}_a A&\to&\vec{\mathcal{T}}_b B\\ u&\mapsto&(D\tilde{f})(a)u\end{array}\right.$ est linéaire, c'est la différentielle de f au point a.

35.14.4.6 Généralisation

Les théorèmes classiques pour les ouverts de normés s'étendent aux cas des sous-variétés

Exemple 35.137. $\begin{array}{ccccc}A&\overset{f}{\to}&B&\overset{g}{\to}&C\\ a&\mapsto&b=f(a)&&\end{array}$ si f est différentiable en a, g différentiable en b alors $g\circ f$ est différentiable en a et $D(g\circ f)=Dg(b)\circ Df(a)$

Sous-variété de E, B sous variété de F, $h\colon A \to B$ h est un difféormorphisme ssi h est bijective, différentiable et h^{-1} est différentiable, si A est un ouvert, $\vec{\mathcal{T}}_a A = E$.

35.14.4.7 Carte

Définition 35.138. *Si A est une $\mathcal{C}^k$-sous-variété de E, $a \in A$, on appelle carte de A au point a, tout $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme d'un ouvert V de ? sur un ouvert Ω d'un espace vectoriel normé F.*

Proposition 35.139. *Soit E, F deux espaces vectoriels normés de dimension finie, A sous-variété de F, $f\colon A \to B, \mathcal{C}^k, a \in A, b = f(a)$. Soit $V_1 \subset A, V_2 \subset B$ et $C_1\colon V_1 \to \Omega_1$ une carte de A au point a, $C_2\colon V_2 \to \Omega_2$ une carte de B au point b. Supposons $f(V_1) \subset V_2$. Alors f est différentiable en a ssi l'application* $\left|\begin{array}{ccc} \Omega_1 & \to & \Omega_2 \\ t & \mapsto & C_2\, f\, C_1^{-1}(t) \end{array}\right.$ *est différentiable en $C_1(a)$.*

Proposition 35.140. *$k \geqslant 1, \dim(E) = 3$, E espace vectoriel normé, S_1 et S_2 deux ? de E, $a \in S_1 \cap S_2$ et $\vec{\mathcal{T}}_a S_1 \neq \vec{\mathcal{T}}_a S_2$ alors $S_1 \cap S_2$ est une $\mathcal{C}^k$-courbe au point a et $\vec{\mathcal{T}}_a(S_1 \cap S_2) = \vec{\mathcal{T}}_a S_1 \cap \vec{\mathcal{T}}_a S_2$.*

Proposition 35.141. *Soit A une $\mathcal{C}^k$-sous-variété de dimension p de E espace vectoriel euclidien, $\dim(E) = n$. Alors il existe une unique mesure borélienne μ sur A engendrée par ? telle que pour toute carte (locale) C:* $\left|\begin{array}{ccc} U & \to & C(U) \\ M & \mapsto & (t_1, ..., t_n) \end{array}\right.$ *et tout borélien B de U, on ait :*

$\mu(B) = \int_{C(B)} [M'_{t_1}, ...M'_{t_p}]dt_1...dt_p$ où $[...]$ est le produit mixte de l'espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{T}_M}(A)$ (Orienté arbitrairement).

Si A est une sous-variété, $\vec{\mathcal{T}}_a A$ est un sous-espace vectoriel $\mathcal{T}_a A = a + \vec{\mathcal{T}}_a A$ est l'espace affine tangent au point a à A. ? $(D?)(M)\colon \overrightarrow{\mathcal{T}_M S} \to E$, $\left|\begin{array}{ccc} S & \to & E \\ M & \mapsto & \vec{0} \in (\overrightarrow{\mathcal{T}_M S})^{\perp} \end{array}\right.$ différentiable, $(D?)(M)$ a son image dans $\overrightarrow{\mathcal{T}_M S}$. $\left|\begin{array}{ccc} \overrightarrow{\mathcal{T}_M S} & \to & \overrightarrow{\mathcal{T}_M S} \\ u & \mapsto & (D?)(M) \end{array}\right.$.

35.15 Espace affine euclidien

35.15.1 Espace afffine euclidien

35.15.1.1 Définition

Définition 35.142. *Un espace affine euclidien est un espace affine E sur $\mathbb{R}$ tel que $\vec{E}$ soit un espace vectoriel euclidien.*

Remarque 35.143. Comme nous l'avons vu en géométrie vectorielle , l'espace vectoriel euclidien $\vec{E}$ est aussi un espace affine normé, il suffit de poser $\|x\| = \sqrt{(x|y)}$ de plus on peut définir une distance par $d(x, y) = \|x - y\|$.

Proposition 35.144. *Soit E un espace affine de direction $\vec{E}$ un espace vectoriel euclidien. Notons $\|.\|$ la norme associée au produit scalaire de $\vec{E}$ alors :*

$d\colon \left|\begin{array}{ccc} E \times E & \to & \mathbb{R}^+ \\ (x, y) & \mapsto & \|x - y\| \end{array}\right.$ *est une distance.*

35.15.1.2 Structure métrique et structure affine

Un espace affine euclidien peut donc être muni d'une structure d'espace métrique. On peut donc définir la notion d'isométrie vue en topologie.

Proposition 35.145. *Soit E, F des espaces affines euclidiens de dimension n, $f\colon E \to F$. On suppose que $\forall (x,y), d(x,y) = d(f(x), f(y))$ alors f, est une bijection affine de E sur F.*

35.15.1.3 Isométries affines

Soit E un espace affine euclidien. $\mathrm{Is}(E)$ est l'ensemble des isométrie affines de $E \to E$. $\mathrm{Is}^+(E) = \{f \in \mathrm{Is}(E); \det(L_f) = 1\}$ les éléments de $\mathrm{Is}^+(E)$ sont les déplacements de E, $\mathrm{Is}^-(E) = \{f \in \mathrm{Is}(E); \det(L_f) = -1\}$ les éléments de $\mathrm{Is}^-(E)$ sont les anti-déplacements de E.

Proposition 35.146. *Soit E, F deux espaces affines euclidiens, $f\colon E \to F$ une application affine alors f est une isométrie ssi L_f est une isométrie vectorielle de $\vec{E} \to \vec{F}$.*

35.15.1.4 Rotations affines

Définition 35.147. *On appelle rotation (resp. anti-rotation) affine, tout déplacement (resp. anti-déplacement) ayant au moins un point fixe.*

35.15.2 Projections et symétries orthogonales

35.15.2.1 Projection orthogonale sur un sous espace affine A d'un espace affine euclidien E

Définition 35.148.

Notation : On note p_A la projection sur A par rapport à $\vec{A}^\perp$, $\vec{E} = \vec{A} \oplus \vec{A}^\perp$.

Proposition 35.149. *$\forall x \in E$, $p_A(x)$ est l'unique point $y \in A$ tel que $d(x,A) = d(x,y)$.*

rappel : $d(x,A) = \inf_{z \in A} \{d(x,z)\}$.

35.15.2.2 Symétrie orthogonale par rapport à un sous espace affine d'un espace affine euclidien E

Définition 35.150. *$\sigma_A(x) = p_A(x) + (p_A(x) - x)$ où p_A est la projection orthogonale sur A.*

Proposition 35.151. *Soit E un espace affine euclidien, A un sous espace affine de E alors σ_A: $E \to E$ est une isométrie affine dont l'application linéaire associée eest la symétrie orthogonale vectoreille par rapport à $\vec{A}$ dans $\vec{E}$ c'est à dire $L_{\sigma_A} = \sigma_{\vec{A}}$. De plus, $\mathrm{Fix}(\sigma_A) = A$.*

35.15.3 Propriétés des espaces affines euclidiens

Lemme 35.152. *Soit E un espace affine euclidien, $g\colon E \to E$ une application affine. Supposons que g possède au moins un points fixe alors Fix_g est un sous espace affine de E de direction $\mathrm{Fix}(L_g)$.*

Remarque 35.153. $\mathrm{Fix}(L_g) = \mathrm{Ker}(L_g - \mathrm{id}_{\vec{E}})$

Lemme 35.154. *Soit X un espace vectoriel euclidien, $h \in O(X)$, alors $X = \mathrm{Ker}(h - \mathrm{id}_X) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(h - \mathrm{id}_X)$.*

35.15.4 Théorème de factorisation canonique d'une isométrie affine

Théorème 35.155. *Soit E un espace affine euclidien, $f \in \mathrm{Is}(E)$ alors $\exists!(\xi, g) \in \vec{E} \times \mathrm{Is}(E)$ tel que :*

i. g a au moins un point fixe,

ii. $f = \mathcal{T}_\xi \circ g = g \circ \mathcal{T}_\xi, (\Rightarrow L_f = L_g)$.

Ce ξ vérifie $\xi \in \overrightarrow{\mathrm{Fix}(g)} = \mathrm{Ker}(L_g)$, $L_g(\xi) = \xi$ et $L_f(\xi) = \xi$ De plus, $f \in \mathrm{Is}^{\varepsilon}(E)$ ssi $g \in \mathrm{Is}^{\varepsilon}(E)$ ($\varepsilon = \pm$).

Définition 35.156. *Soit E un espace affine euclidien, on appelle rotation affine de E tout déplacement de E ayant au moins un point fixe. On appelle anti-rotation affine de E tout anti-déplacement de E ayant au moins un point fixe.*

35.15.5 Isométrie affine en dimension 2 et 3

35.15.5.1 Déplacement en dimension 2

Proposition 35.157. *Soit E un plan affine euclidien, $f \in \mathrm{Is}^+(E)$ alors f est une rotation ou une translation.*

Proposition 35.158. *Soit E un plan affine euclidien, $f \in \mathrm{Is}^-(E)$ alors il existe une droite Δ et $\xi \in \vec{\Delta}$ tels que $f = \mathcal{T}_\xi \circ \sigma_\Delta = \sigma_\Delta \circ \mathcal{T}_\xi$ où σ_Δ est la symétrie orthogonale par rapport à Δ. Une telle factorisation est unique.*

35.15.5.2 Rotation en dimension 3

Proposition 35.159. *Soit E un espace affine euclidien de dimension 3, g une rotation de E. Supposons $g \neq \mathrm{id}_E$ alors $\mathrm{Fix}(g)$ est une droite de E de direction $\mathrm{Fix}(L_g)$.*

Proposition 35.160. *Soit E un espace affine euclidien de dimension 3, $f \in \mathrm{Is}^+(E)$. On suppose ue f n'est ni une translation, ni une rotation alors $\exists D$ une droite et $\exists r$ une rotation autour de $D (D \subset \mathrm{Fix}(r)), \exists \xi \in \vec{D}$ tels que $f = \mathcal{T}_\xi \circ r$. Une telle factorisation est unique et $\mathcal{T}_\xi \circ r = r \circ \mathcal{T}_\xi$, $\vec{D} = \mathrm{Fix}(L_f)$.*

Théorème 35.161. *Soient E un espace affine euclidien de dimension 3, $f \in \mathrm{Is}^-(E)$ alors f est de la forme $f = \sigma \circ \rho = \rho \circ \sigma$, où σ est une symétrie orthogonale par rapport à un plan π et où :*

i. si $\mathrm{Fix}(f) \neq \varnothing$,$\rho$ est une rotation autour d'un axe D orthogonal à π.

ii. si $\mathrm{Fix}(f) = \varnothing$, ρ est une translation de vecteur $\xi \in \vec{\pi}$.

Chapitre 36
Géométrie différentielle

36.1 Arc et Courbe paramétrés dans un E espace affine euclidien

«La notion générale de courbe telle qu'elle a été développée dans le cadre de la topologie (p.235) ne convient pas aux objectifs de la géométrie différentielle. Il faut adapter la notion d'arc pour en faire un concept utilisable ici.» (Atlas des mathématiques, p.u.f. p.393)

Dans ce qui suit E désigne un espace affine euclidien, de dimension finie et orienté. On note $|v|$ la norme euclidienne et $x \cdot y$ ou $\langle x|y\rangle$ le produit scalaire de x par y.

36.1.1 Arc paramétré

36.1.1.1 Définition

Définition 36.1. *On appelle* ***arc paramétré de classe C^p****, tout couple $(\Gamma,\ f)$ formé d'une application $f : I \to E$ de classe C^p où I est un intervalle (fini ou infini, fermé ou non) de $\mathbb{R}$ et Γ est un partie de E telle que $\Gamma = f(I)$. Γ est appelée* ***image ou support ou trajectoire de f*** *et f est appelée* ***représentation paramétrique ou paramétrage*** *de Γ (en abrégé R.P.).*

Remarque 36.2.

1. Dans un énoncé, si la classe de l'arc n'a pas d'importance, on parlera simplement d'arc paramétré sans préciser la classe de l'arc.
2. Il est souvent commode de l'interpréter comme la description du trajet $f(I)$ par d'un mobile occupant le point $f(t)$ à l'instant t.

36.1.1.2 Changement de paramètre ou reparamétrage et Arcs équivalents

On va définir sur l'ensemble des paramétrages une loi d'action permettant de «Changer de paramètre». Nous définirons ensuite une relation d'équivalence sur l'ensemble des arcs paramétrés d'une classe donnée.

Proposition 36.3. *Soit $(\Gamma,\ f)$ un arc paramétré de classe C^p où f est une application définie sur I, φ un difféomorphisme de classe C^p l'application :* $\left|\begin{array}{ccc} \Omega \times E & \to & E \\ (\varphi, f) & \mapsto & f \circ \varphi \end{array}\right.$.

Définition 36.4. *On appelle* ***opérateur de changement de paramètre ou de reparamétrage****, tout difféomorphisme φ de classe C^p.*

Définition 36.5. *Soit $(\Gamma,\ f)$ un arc paramétré de classe C^p, on appelle changement de variable l'action à droite*

Définition 36.6. *Si $(\Gamma_1,\ f_1)$ et $(\Gamma_2,\ f_2)$ sont deux* ***arcs paramétrés*** *de classe C^p. On dit que $(\Gamma_1,\ f_1)$ et $(\Gamma_2,\ f_2)$ sont* ***équivalents*** *ssi il existe un difféomorphisme φ de classe C^p tel que $f_2 = f_1 \circ \varphi$.*

Proposition 36.7. *La relation ainsi définie est une relation d'équivalence.*

36.1.1.3 Arcs géométriques

Définition 36.8. *Une classe d'équivalence d'arcs paramétrés de classe C^p est appelée* ***arc géométrique*** *et tout représentant d'un arc géométrique Γ de classe C^p porte le nom de* ***paramétrage admissible*** *de Γ.*

... (Voir suite Atlas des mathématiques p.u.f. p. 393) Compléter ce chapitre.

36.1.2 Courbe paramétrée

Définition 36.9. *On appelle* ***courbe paramétrée****, le couple (Γ, f) formé d'une application $f: I \to E$ où I est au plus une réunion dénombrable d'intervalles finis ou infinis, fermés ou non de $\mathbb{R}$ et Γ une partie de E. $f(I)$ est appelée* ***image*** *de la courbe* ***ou support*** *de la* ***courbe paramétrée****.*

Définition 36.10. *On appelle* ***courbe paramétrée*** *de* ***classe C^p****, une courbe parémétrée (Γ, f) où f est une fonction de classe C^p.*

Remarque 36.11. Une courbe est une réunion au plus dénombrable d'arcs : exemple la fonction tangente. Réciproquement un arc est une courbe dont la fonction est définie sur un intervalle.

36.1.3 Limite d'une famille de sous-espaces affines

Définition 36.12. *Soit E un espace vectoriel normé de dimension n, $1 \leqslant p \leqslant n$, $\Omega_p = \{(u_1, ..., u_p) \in E^p; (u_1, ..., u_p)$ libre linéairement$\}$. Ω_p est un ouvert de E^p. Soient $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ une famille de sous-espace affines de dimension p, et A un sous espace affine de dimension p. On dit que $X_t \to A$ lorsqu'il existe un repère cartésien $\rho_t = (x(t), u_1(t), ..., u_p(t))$ de X_t, et un repère cartésien $\rho_0 = (x^0; u_1^0; ...; u_p^0)$ de A, tels que $\rho_t \to \rho_0$ dans $E \times \overrightarrow{E^p}$.*

Proposition 36.13. *Il y a unicité de la limite A.*

36.1.4 Régularité d'un point et d'une courbe

36.1.4.1 Point et courbe réguliers

Définition 36.14. *Soit $f: I \to E$, $t_0 \in I$.*

On dit qu'une ***courbe*** *(f, I) est* ***régulière*** *(ou 1-régulière) au point t_0,* ***ou*** *que le* ***point*** *$M_0 = f(t_0)$ est* ***régulier*** *ssi f est dérivable au point t_0 et $f'(t_0) \neq 0$.*

Définition 36.15. *On dit qu'une* ***courbe*** *(f, I) est* ***régulière ou*** *encore que le* ***paramétrage*** *est* ***régulier*** *ssi (f, I) est régulière en tout point de I.*

Remarque 36.16. $|f'(t)|$ représente la vitesse, si la vitesse ne s'annule pas cela indique qu'il n'y a pas de points anguleux, comme c'est le cas pour la courbe $(f, \mathbb{R})$ où : f:

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & (t^2, t^3) \end{array}\right.$$

(représenter la courbe).

36.1.4.2 Point et courbe biréguliers

Définition 36.17. *On dit que la* ***courbe*** *(f, I) est* ***birégulière*** *(ou* ***2-régulière****) au point t_0 ssi :*

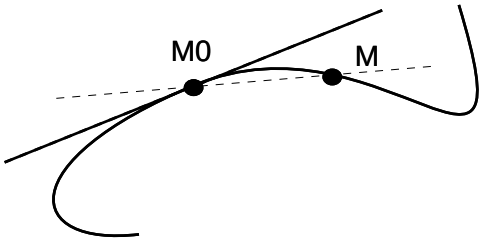
i. f est 2 fois dérivable au point t_0.

ii. $f'(t_0)$ *et* $f''(t_0)$ *sont linéairement indépendantes.*

Définition 36.18. *On dit qu'une* ***courbe*** (f, I) *est* ***birégulière ou*** *encore que le* ***paramétrage*** *est* ***birégulier*** *ssi* (f, I) *est birégulière en tout point de* I*.*

36.1.5 Tangente

Définition 36.19. *Lorsque* $f(t) \neq f(t_0)$*, on appelle* ***sécante*** $D_{t_0,t}$ *la droite affine* $f(t_0) + \mathbb{R}(f(t) - f(t_0))$*.*



Définition 36.20. *Soit* (f, I) *une courbe ou un arc régulier.*

- *On appelle la* ***tangente affine*** *de l'arc ou de la courbe paramétrée* (f, I) *à* f *au point* t_0*, la droite affine limite* $t \to t_0$ *de la sécante* $D_{t_0 t}$*.*
- *Sa direction s'appelle la* ***tangente vectorielle*** *de* f *au point* t_0*.*
- *On note* $\mathcal{T}_{t_0} f$ *la tangente affine de* f*, et* $\overrightarrow{\mathcal{T}_{t_0} f}$ *la tangente vectorielle de* f*.*

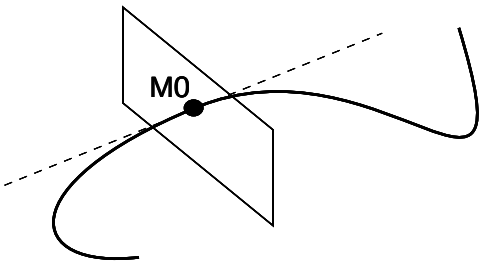
Proposition 36.21.

1. *Supposons que* (f, I) *est une courbe ou un arc régulier au point* t_0 *alors* $\exists \eta > 0; |t - t_0| < \eta, (t \in I)$ *entraîne* $f(t) \neq f(t_0)$ *et sa tangente affine est la droite affine* $f(t_0) + \mathbb{R} f'(t_0)$ *sa tangente vectorielle est* $\mathbb{R} f'(t_0)$*.*
2. *Supposons que* (f, I) *est une courbe ou un arc régulier de classe* C^k*, soit* $f^{(p)}$ *la première dérivée non nulle de* f *au point* t_0*, la tangente affine au point* $M_0 = f(t_0)$ *est la droite affine passant par* M_0 *et de direction* $\mathbb{R} f^{(p)}(t_0)$*.*

36.1.6 Plan normal

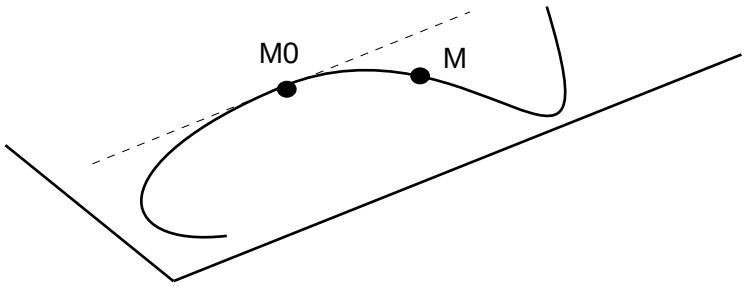
Définition 36.22. *Soit* (f, I) *une courbe ou un arc admettant une tangente* $\mathcal{T}$*.*

On appelle ***plan normal*** *en un point* M_0 *de la courbe, le plan affine perpendiculaire en* M_0 *à la tangente* $\mathcal{T}$*.*



36.1.7 Plan osculateur

Définition 36.23. *On appelle* ***plan osculateur*** *au point* M_0 *la limite si elle existe du plan affine passant par la tangente en* M_0 *et* $M = f(t)$ *lorsque* $t \to t_0$*. On le note* $\mathrm{Osc}_{t_0} f$ *et on note* $\overrightarrow{\mathrm{Osc}_{t_0} f}$ *sa direction.*



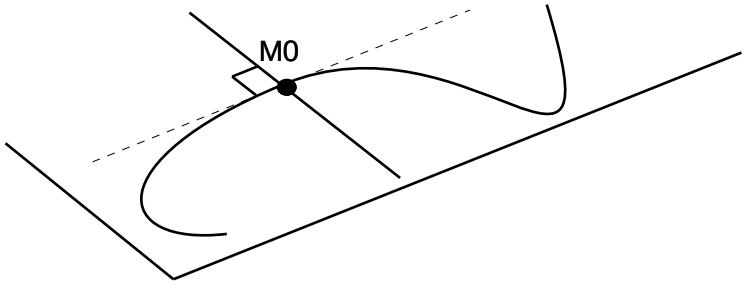
Proposition 36.24. *Supposons f bi-régulière au point t_0 alors le plan osculateur de f est le plan affine $f(t_0)+\mathbb{R}f'(t_0)+\mathbb{R}f''(t_0)$. $\mathrm{Osc}_{t_0}f = f(t_0)+\mathbb{R}f'(t_0)+\mathbb{R}f''(t_0)$ et $\overrightarrow{\mathrm{Osc}_{t_0}f} = \mathbb{R}f'(t_0)+\mathbb{R}f''(t_0)$, autrement dit c'est le plan affine contenant $M_0 = f(t_0)$ et de direction l'espace vectoriel engendré par $f'(t_0)$ et $f''(t_0)$.*

Note 36.25. (partie à supprimer) On peut donc pour ces t, considérer le plan π_{t_0t} engendré par $\mathcal{T}_{t_0}f$ et $f(t)$,$\exists\eta>0$ tel que $|t-t_0|<\eta$, $(t\in I)\Rightarrow f(t)\in\mathcal{T}_{t_0}f$. Ce plan π_{t_0t} (pour ?) tend vers le plan $f(t_0)+\mathbb{R}f'(t_0)+\mathbb{R}f''(t_0)$ quand t tend vers ce plan limite s'appelle le **plan osculateur** de f en t_0. On le note $\mathrm{Osc}_{t_0}f$ et on se note $\overrightarrow{\mathrm{Osc}_{t_0}f}$ sa direction ($\overrightarrow{\mathrm{Osc}_{t_0}f} = \mathbb{R}f'(t_0)+\mathbb{R}f''(t_0)$).

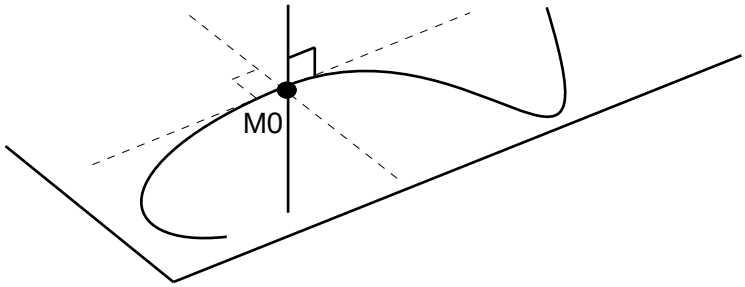
36.1.8 Normale principale et normale

Définition 36.26. *Soit $(\Gamma,\ f)$ un arc/courbe, on appelle **normale** de $(\Gamma,\ f)$ au point $M_0 = f(t_0)$ toute droite affine passant par $f(t_0)$ et qui est orthogonale à $\mathcal{T}_{t_0}f$ (autrement dit toute droite affine passant par $f(t_0)$).*

Définition 36.27. *Soit $(\Gamma,\ f)$ un arc/courbe, la droite de $\mathrm{Osc}_{t_0}f$ qui passe par $M_0 = f(t_0)$ et qui est orthogonale à la tangente $\mathcal{T}_{t_0}f$ s'appelle la **normale principale** de f au point t_0.*



Définition 36.28. *Soit $(\Gamma,\ f)$ un arc/courbe, on appelle **binormale** de $(\Gamma,\ f)$ au point $f(t_0)$ toute droite affine passant par $f(t_0)$ et qui est orthogonale à $\mathcal{T}_{t_0}f$ et à la normale principale (autrement dit toute droite affine perpendiculaire au plan osculateur).*



36.1.9

36.1.10 Courbe

Proposition 36.29. *Soit $p \in \{1,2\}$, $f\colon I \to E$, $h\colon J \to I$ (J intervalle) Supposons que h soit un D^p-difféomorphisme (bijectif et p dérivable) alors f est p-régulière au point $h(u)$ ssi $f \circ h$ est p-régulière et $\forall u, h'(u) \neq 0$.*

36.1.11 Changement de paramètre ou reparamétrage

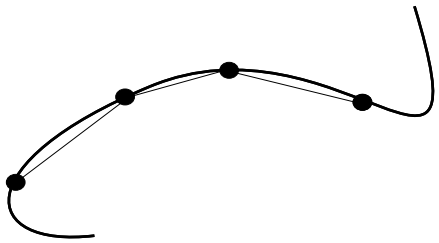
(Voir Atlas des mathématiques livre de poche page 395) pour compléter ce chapitre.

36.1.11.1 Courbes paramétrées unitaires

Définition 36.30. *On dit qu'une **courbe** f est **unitaire** (ou que f est paramétrée par une abscisse curviligne) ssi $\forall t, \|f'(t)\| = 1$ (f dérivable).*

Proposition 36.31. *Soit $f\colon I \to E$ C^1 et régulière alors il existe un C^1-difféomorphisme $h\colon J \to I$ tel que $f \circ h$ soit unitaire.*

36.1.11.2 Paramétrage normal et abscisse curviligne



36.1.11.3 abscisse curviligne

Définition 36.32. *$s = \varepsilon \int_{t_0}^{t} \|f'(u)\| du + c, \varepsilon = \pm 1, t \to s$ s'appelle une **abscisse curviligne** le long de f.*

Remarque 36.33. On voit que si l'arc est 1-régulier, s est un paramètre admissible. Vu sa signification, il joue un rôle intrinsèque à l'arc. On l'appelle paramètre admissible. (Atlas des mathématiques p.u.f. p.395).

Proposition 36.34.

i. si s_1, s sont des abscisses curviligne le long de f, alors $s_1 = \varepsilon s + ?$,

ii. $\frac{\mathrm{d}s}{dt} = \varepsilon |f'(t)|$,

iii. si s est une abscisse curviligne le long de f, $s(t) - s(t_0) = \varepsilon \int_{t_0}^{t} \|f'(u)\| du$, $|s(t) - s(t_0)| = \left| \int_{t_0}^{t} \|f'(u)\| du \right|$ longueur de f restreinte à l'intervalle $[t_0, t]$.

Proposition 36.35. *Soit $f\colon I \to E$ régulière de classe C^2. On suppose que f est unitaire c'est à dire $\forall s, \|f'(s)\| = 1$ alors $(f'(s)|f''(s)) = 0$.*

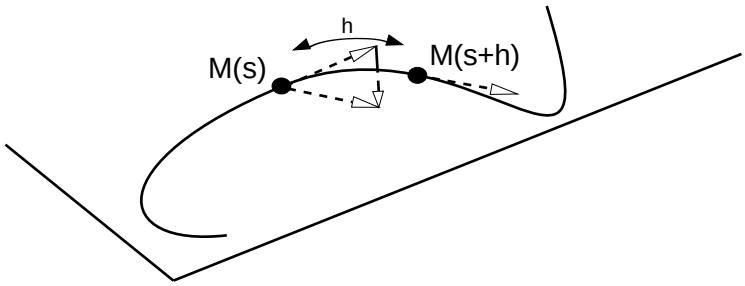
Proposition 36.36. *$f\colon I \to E, C^2$ unitaire alors f est birégulière au point s ssi $f'(s) \neq 0$.*

36.1.11.4 Courbures non algébrique et algébrique

Il s'agit d'étudier ici un arc simple C, non rectiligne. On le suppose 1-régulier et de classe C^2 au moins. Pour estimer le «comportement courbe» d'un tel arc, on peut considérer des sous-arcs consécutifs de longueur h assez petite et associer à chacun d'entre eux le quotient par h de l'angle des tangentes à leur extrémités :

Proposition 36.37. *Soit* $(\Gamma,\ f)$ *une courbe paramétrée unitaire :* $f\colon I \to E, \forall s,\ \|f'(s)\| = 1,$ *notons* $\tau = f'(s)$ *et* $\tau_1 = f'(s+h)$ *posons* $\alpha = \mathrm{Ang}(\tau,\ \tau_1)$ *alors* $\frac{d\tau}{ds} = f''(s)$ *et* $\|f''(s)\| = \lim_{h\to+\infty}\frac{\alpha}{h}$.

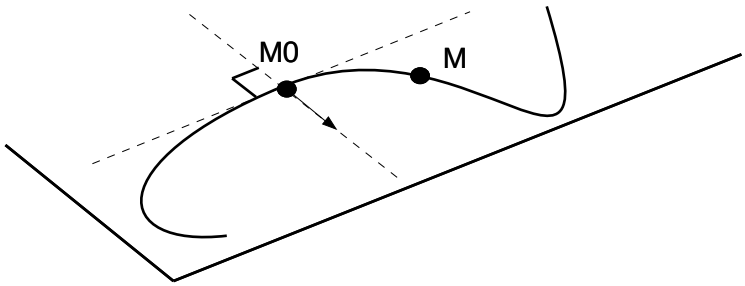
$$\Delta(t) = 2\sin\frac{\alpha(s,h)}{2} \Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{\alpha(s,h)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{\frac{1}{2}\alpha(s,h)}{\sin\frac{1}{2}\alpha(s,h)} \times \frac{|\Delta t|}{h}\right) = 1 \times |t'(s)| = |f''(s)|.$$



Si C est un arc de cercle de rayon R, tous ces quotients valent $\frac{1}{R}$. Sinon, plus son quotient est élevé, plus l'arc se «courbe» ... . Ces résultats conduisent à définir la courbure comme suit. (Commentaires et illustrations Atlas des mathématiques p.u.f. p. 395)

Définition 36.38. *Soit* (Γ, f) *une courbe paramétrée.*

- *Si* $f\colon I \to E$ *est* C^2 *et unitaire,* $\|f''(s)\|$ *est la* ***courbure non algébrique*** *de* f *au point* M *d'abscisse curviligne* s $(M = f(s))$.
- *Supposons que* f *est bi-régulière au point* s, $f''(s)$ *est appelé* ***vecteur courbure****, soit* n *un vecteur unitaire de la normale principale vectorielle au point* s, *on a* $f''(s) = \lambda\vec{n}, \lambda \in \mathbb{R}$, λ *s'appelle la* ***courbure algébrique*** *de* f *au point* s *relativement à l'orientation* n *de la normale.*



Remarque 36.39. Ainsi $|\lambda|$ est la courbure non algébrique et on note $|\lambda| = \|f''(s)\|$.

Définition 36.40. *Soit* $(\Gamma,\ f)$ *une courbe paramétrée de courbure algébrique* $|\lambda|$. *Notons que quand* $|\lambda| \neq 0, |R| = \frac{1}{|\lambda|}$ *où* $R = \frac{1}{\lambda}$ *est le* ***rayon de courbure*** *de* f *au point* s.

Remarque 36.41. Cette définition se justifie par le fait qu'en tout point de l'arc simple où la courbure n'est pas nulle, la «meilleure approximation» de l'arc simple par un arc de cercle est obtenue avec un cercle qui a pour rayon le rayon de courbure. On appelle ce cercle : cercle osculateur au point considéré (cf. fig. B3 p.398). Il se situe dans le plan osculateur, défini par la tangente et le vecteur normal principal. Il est centré au point appelé centre de courbure.

Définition 36.42. *On appelle* ***centre de courbure*** *le point* C *défini par :* $C = f(s) + R\vec{n}$.

36.1.12 Repère de Frénet

Lemme 36.43. *Soit* E *espace vectoriel euclidien* f: $\left|\begin{array}{ccc} I & \to & E^n \\ t & \mapsto & (u_1(t), ..., u_n(t)) \end{array}\right.$ *dérivable* $\forall t$, $(u_1(t), ..., u_n(t))$ *est une base orthonormée* $\frac{du_i}{dt}(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}u_j(t)$ *alors* $\forall t, \alpha_{ij}(t) + \alpha_{ji}(t) = 0$.

36.1.12.1 Définition

Définition 36.44. *Soit E un espace affine euclidien orienté, $\dim(E)=3$, $f\colon I\to E$, C^3 bi-regulière et unitaire. $\mathcal{T}=f'(s)$, $\vec{n}=\frac{\varepsilon f''(s)}{\|f''(s)\|}$ un vecteur unitaire de la normale principale, et $b=\mathcal{T}\wedge\vec{n}$, $(M,(\mathcal{T},\vec{n},b))$ est appelé* ***repère de Frenet****.*

Remarque 36.45.

1. $f''(s)=\lambda\vec{n}$ et $\frac{d\mathcal{T}}{ds}=\lambda\vec{n}$.
2. Matriciellement : $\begin{pmatrix}\frac{d\mathcal{T}}{ds}\\ \frac{dn}{ds}\\ \frac{db}{ds}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\lambda&0\\ -\lambda&0&n\\ 0&-\mu&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathcal{T}\\ n\\ b\end{pmatrix}$ car $\left\langle\frac{d\mathcal{T}}{ds}\middle|b\right\rangle=\lambda\langle n|b\rangle=0$ μ est la torsion de f au point s, $\frac{d\mathcal{T}}{ds}=\lambda\vec{n}$, $\frac{dn}{ds}=-\lambda\mathcal{T}+\mu b$, $\frac{db}{ds}=-\mu\cdot\vec{n}$ sont les formules de Frenet.

36.1.12.2 Torsion

Définition 36.46. *Le réel $\mu(s)$ définit par $\mu\cdot\vec{n}=-\frac{db}{ds}$ est appelé* ***torsion*** *de f au point $M(s)$, on dit que la torsion est droite ou gauche selon qu'elle est positive ou négative.*

Remarque 36.47.

1. La fonction μ est nulle pour tout arc plan ... . Aux points où elle ne s'annule pas, elle donne une indication sur la foçon dont la courbe s'écarte d'une courbe plane ... . Contrairement à la courbure la torsion peut être négative. la convention adoptée pour la définition fait que la torsion est positive pour une hélice circulaire directe. On notera que ni la courbure ni la torsion ne dépendent de l'orientation de l'arc simple auquel elles sont associées.
2. μ ne dépend pas du choix de n.
3. Soit $s\mapsto f(s)$ courbe unitaire, si s_1 est une autre abscisse curviligne le long de f, alors $\|f''(s)\|=\|g''(s_1)\|$, (pour $f(s)=g(s_1)$) et $f''(s)=g''(s_1)$ de plus, on a $\lambda=\lambda_1$ et $\mu=\mu_1$.

36.1.12.3 Formules donnant la torsions et la courbure

Proposition 36.48.

1. *$f\colon I\to E$, $\exists h$ difféomorphisme tel que $f\circ h$ est unitaire. Par définition, la courbure de f au point t est la courbure de $f\circ h$ au point s (pour f C^3 birégulière).*
2. *$f\colon I\to E$ C^3, on note $s'=\frac{ds}{dt}$ et $s''=\frac{d^2s}{dt^2}$, on a $\frac{dM}{dt}=\mathcal{T}s'=\frac{dM}{ds}\times\frac{ds}{dt}$ avec $M=f(t)=g(s)$, $\frac{d^2M}{dt^2}=\lambda\mathrm{n}s'^2+\mathcal{T}s''=\frac{d\mathcal{T}}{dt}s'+\mathcal{T}\frac{ds'}{dt}=\frac{d\mathcal{T}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}\cdot s'+\frac{ds'}{dt}$, $\frac{d^3M}{dt^3}=\lambda(-\lambda\mathcal{T}+\mu b)s'^3+\rho\vec{n}+\mathcal{T}s'''$ $\begin{pmatrix}s'&s''&\alpha\\ 0&\lambda s'^2&\beta\\ 0&0&\lambda\mu s'^3\end{pmatrix}$. Orientons Osc_t par la base $(\mathcal{T},n)$. On a un produit mixte dans ?*
   $[f'(t),f''(t)]=\lambda s'^3$ *or* $s'=\varepsilon\|f'(t)\|$ *donc* $\lambda=\varepsilon\frac{[f'(t),f''(t)]}{\|f'(t)\|^3}$
3. *On a aussi $f'(t)\wedge f''(t)=\lambda s'^3\mathcal{T}\wedge n=\lambda s'^3 b$ d'où $|\lambda|=\frac{\|f'(t)\wedge f''(t)\|}{\|f'(t)\|^3}$ $[f'(t),f''(t),f'''(t)]=\lambda^2\mu s'^6$ et $\|f'(t)\wedge f''(t)\|^2=\lambda^2 s'^6$ $\Rightarrow\mu=\frac{[f'(t),f''(t),f'''(t)]}{\|f'(t)\wedge f''(t)\|^2}$*

Index

Glossaire

Table des matières

Résumé . . . 3

1 L'alphabet grec . . . 5

2 Notions fondamentales sur les ensembles . . . 7

2.1 Divers . . . 8
2.2 Recouvrement . . . 8
2.3 Relations sur des ensembles . . . 9
2.4 Quelques notations usuelles . . . 9
2.5 Dénombrement . . . 10
2.5.1 . . . 10
2.5.2 Ensembles finis . . . 10

3 Topologie générale . . . 11

3.1 Espaces topologiques . . . 12
3.1.1 Topologies, ensembles Ouverts et Espaces Topologiques . . . 12
3.1.2 Ensembles Fermés . . . 12
3.1.3 Comparaison de topologies : topologies plus ou moins fines . . . 13
3.1.4 Recouvrement ouvert . . . 13
3.1.5 Voisinage d'un point et d'une partie . . . 13
3.1.6 Point d'Accumulation ou Limite, Ensemble Dérivé . . . 14
3.1.7 Point Isolé . . . 14
3.1.8 Adhérence, Intérieur, Extérieur et Frontière d'un ensemble . . . 14
3.1.8.1 Point Adhérent, Adhérence ou Fermeture d'un ensemble . . . 14
3.1.8.2 Point Intérieur, Intérieur d'un ensemble . . . 14
3.1.8.3 Point extérieur, Extérieur d'un ensemble . . . 15
3.1.8.4 Point frontière, Frontière d'un ensemble . . . 15
3.1.8.5 Propriétés . . . 15
3.1.9 Ensembles Denses . . . 16
3.1.10 Espace Rare ou non Dense . . . 17
3.1.11 Espace topologique Séparé au sens de Hausdorff . . . 17
3.2 Construction d'une topologie sur un ensemble. . . . 17
3.2.1 Topologie Engendrée . . . 17
3.2.2 Base de topologique . . . 18
3.2.3 Sous-base d'un espace topologique . . . 18
3.2.4 Base locale . . . 18
3.3 Convergence, limite et continuité . . . 19
3.3.1 Filtre, base de filtre et ultrafiltre . . . 19
3.3.2 Convergence et Limite suivant une base de filtre . . . 20
3.3.2.1 Définition . . . 20
3.3.2.2 Unicité de la limite . . . 21
3.3.2.3 Convergence et limite . . . 22
3.3.2.4 Convergence et limite de la composée de 2 applications . . . 22
3.3.3 Continuité . . . 22
3.3.3.1 En un point . . . 22
3.3.3.2 Sur un espace topologique . . . 23
3.3.3.3 C.N.S. de continuité et image réciproque d'ouverts ou de fermés . . . 23
3.3.3.4 C.S. de convergence pour la composée de deux applications . . . 23

3.3.3.5 C.S. de continuité pour la composée de deux applications 24
3.3.3.6 Convergence des suites du type $f \circ x_n$ i.e. $(f(x_n))$ 24
3.3.4 Application continue ouverte 24
3.4 Prolongement par continuité d'une fonction 24
3.5 Prolongement des égalités et inégalités 25
3.5.1 Egalité 25
3.5.2 Inégalité 25
3.6 Homéomorphisme 25
3.7 Valeur d'adhérence 26
3.7.1 ... sur un ensemble muni d'une base de filtre 26
3.7.1.1 Définition 26
3.7.1.2 Valeur d'adhérence d'une fonction convergente 27
3.7.1.3 Adhérence et valeur d'adhérence 27
3.7.2 ... sur un espace topologique 27
3.7.2.1 Pour une fonction quelconque 27
3.7.2.2 Pour une suite 27
3.8 Dual topologique d'un espace vectoriel topologique 27
3.9 «Autogamie» d'espaces topologiques 28
3.9.1 Sous-espace topologiques 28
3.9.1.1 Topologie induite 28
3.9.1.2 Définition 28
3.9.1.3 C.N.S. sur les voisinages, les fermés 28
3.9.1.4 Héridité de la séparation 29
3.9.1.5 Convergence d'une fonction 29
3.9.1.6 Continuité de l'injection canonique 29
3.9.1.7 Continuité d'une restriction 29
3.9.1.8 Continuité d'une fonction à valeurs dans un sous-espace topologique 29
3.9.2 Produits finis d'espaces topologiques 29
3.9.2.1 Topologie produit et ouvert élémentaire 29
3.9.2.2 Espace topologique produit 30
3.9.2.3 Adhérence et fermés 30
3.9.2.4 C.N.S. de séparation 30
3.9.2.5 Convergence d'une fonction à valeurs dans un espace topologique produit . . 30
3.9.2.6 Continuité d'une fonction à valeurs dans un espace topologique produit . . . 30
3.9.3 Produits infinis d'espace topologique 31
3.9.4 Espaces topologiques quotients 31
3.10 Espaces topologiques Compacts 32
3.10.1 Définitions 32
3.10.1.1 Axiome de Borel-Lebesgue 32
3.10.1.2 Espaces quasi-compacts 33
3.10.1.3 Espaces compacts 33
3.10.1.4 Parties compactes 33
3.10.1.5 Partie relativement compacte 33
3.10.1.6 Exemples d'espaces compacts 33
3.10.2 Fermés et compacité 34
3.10.2.1 Cas d'un espace topologique séparé 34
3.10.2.2 Cas d'un espace topologique compact 34
3.10.2.3 Exemples 34
3.10.3 Réunion et intersection d'espaces compacts 34
3.10.3.1 Réunion finie d'espaces compacts 34
3.10.3.2 Intersection quelconque d'espaces compacts 34
3.10.4 Sys. fonda. de vois. d'un point d'un compact 35
3.10.5 Valeur d'adhérence d'une fonction dans un compact 35
3.10.5.1 Valeur d'adhérence d'une application à valeurs dans un compact 35
3.10.5.2 Valeur d'adhérence d'une suite de points dans un espace compact 35
3.10.6 Convergence d'une fonction sur un compact 35

3.10.6.1 Limite d'une fonction admettant une seule valeur d'adhérence 35
3.10.6.2 Limite d'une suite admettant une seule valeur d'adhérence 35
3.10.7 Application, Continuité, Bijectivité et Compacité 35
3.10.7.1 Propriété des fonctions continues 35
3.10.7.2 Propriété des bijections continues 35
3.10.7.3 Fonction d'un espace topo. compact dans un espace métrique 35
3.10.7.4 Fonction d'un espace topo. compact dans $\mathbb{R}$ 35
3.10.8 Produit fini d'espaces compacts 36
3.10.8.1 C.N.S. de compacité 36
3.10.8.2 Applications 36
3.10.9 Espaces localement compacts 36
3.10.10 Compactification 36
3.10.10.1 Définitions 36
3.10.10.2 Exemples 36
3.10.10.3 Procédé de compactification d'Alexandrov 36
3.11 Espaces topologiques connexes 36
3.11.1 Définition 36
3.11.2 Autres C.N.S. de connexité pour un espace topologique 37
3.11.3 Exemples 37
3.11.4 Propriétés 37
3.11.4.1 Connexité et adhérence 37
3.11.4.2 Réunion de connexes qui se rencontrent 38
3.11.4.3 Image d'un connexe par une application continue 38
3.11.4.4 Théorème des valeurs intermédiaires 38
3.11.5 Eléments connectés, Composantes connexes, Discontinuité totale 38
3.11.6 C.N.S. de connexité pour un produit d'espace topologique 39
3.11.7 Chemin d'un espace topologique 39
3.11.8 Connexité par arcs 39
3.11.9 Espace localement connexe 39
3.11.10 Application de la connexité 40
3.11.10.1 Connexité et homéomorphisme 40
3.11.10.2 Connexité et résolution d'équation 40

4 Espaces métriques et leur topologie 41

4.1 Définitions et propriétés générales 41
4.1.1 Distance, semi-distance et écart sur un ensemble E 41
4.1.1.1 Définitions 41
4.1.1.2 Deuxième inégalité triangulaire 41
4.1.1.3 Inégalité quadrilatère 41
4.1.1.4 Exemples de distances 42
4.1.2 Définition d'un espace métrique 42
4.1.3 Extension de la notion de distance, diamètre d'une partie 43
4.1.3.1 Distance d'un point à un ensemble non vide 43
4.1.3.2 Distance entre deux ensembles non vides 43
4.1.3.3 Diamètre d'une partie 43
4.1.3.4 Propriétés 44
4.1.4 Boule d'un espace métrique 44
4.1.4.1 Boule ouverte 44
4.1.4.2 Boule fermée 44
4.1.4.3 Sphère 44
4.1.4.4 Boule et sphère généralisées 45
4.1.4.5 Remarques et Exemples 45
4.1.5 Isométrie; Fonction lipschitziennes et contractantes 45
4.1.5.1 Isométrie 45
4.1.5.2 Condition de Lipschitz d'ordre α et de rappport k 46
4.1.5.3 Fonctions Lipschitziennes et contractantes 46

4.2 Topologies des espaces métriques 46
4.2.1 Topologie métrique 47
4.2.2 Ouverts 47
4.2.3 Voisinages d'un point 48
4.2.4 Fermés 48
4.2.5 Adhérence, Intérieur 48
4.2.6 Densité 48
4.2.7 Espaces séparables 48
4.2.8 Convergence et limite d'une fonction 49
4.2.9 Convergence et limite d'une suite 49
4.2.9.1 Définition 49
4.2.9.2 C.N.S. Adhérence-Suite et Fermé-Suite 49
4.2.10 Continuité 49
4.2.10.1 Définition 49
4.2.10.2 C.N.S. de continuité utilisant les suites 50
4.2.11 Valeur d'adhérence d'une fonction 50
4.2.12 Valeur d'adhérence d'une suite 50
4.2.13 Nombre de Lebesgue 51
4.2.14 Espace métrique compact 51
4.2.14.1 C.N.S. de compacité 51
4.2.14.2 Propriétés 51
4.2.14.3 Exemples 51
4.2.14.4 Compacité, suite et C.N.S. de compacité dans un espace métrique 52
4.3 Continuité uniforme 52
4.3.1 Définition 52
4.4 Distances équivalentes 53
4.4.1 Distances topologiquement équivalentes 53
4.4.2 Distances uniformément équivalentes 53
4.4.3 Distances métriquement équivalentes 53
4.4.4 Relation entre ces distances 54
4.5 Connexité 54
4.6 Autogamie d'espaces métriques 54
4.6.1 Sous-espace métrique 55
4.6.1.1 Ouverts dans un sous-espace métrique 55
4.6.1.2 Fermés dans un sous espace-métrique 55
4.6.1.3 Voisinage dans un sous espace-métrique 55
4.6.1.4 Limite d'une suite dans un sous-espace métrique 55
4.6.2 Produit d'espaces métriques 55
4.6.2.1 Exemple de distances sur un produit d'espaces métriques 55
4.6.2.2 Fonctions définies sur un espace produit 56
4.6.2.3 Fonctions à valeurs dans un espace produit 56
4.6.2.4 Suites dans un espace produit 56
4.6.2.5 Limite d'une fonction à valeur dans un espace produit 56
4.7 Suite de Cauchy. Espace métrique complet 56
4.7.1 Suite de Cauchy d'un espace métrique 56
4.7.1.1 Définition 56
4.7.1.2 Propriétés 57
4.7.1.3 Image d'une suite de Cauchy par une application uniformément continue . . 57
4.7.2 Espace Complet 57
4.7.2.1 Définition 57
4.7.2.2 Propriétés 58
4.7.3 Espace produit complet 59
4.7.4 Théorème du point fixe 59
4.7.4.1 Théorème du point fixe 59
4.7.4.2 Théorème du point fixe avec paramètre 60
4.7.5 Prolongement de fonction 60

4.7.5.1 Critère de Cauchy et prolongement . . . 60
4.7.5.2 Prolongement d'une application uniformément continue . . . 60
4.8 Espaces topologiques connexes . . . 61
4.8.1 Définition . . . 61
4.8.2 Autres C.N.S. de connexité pour un espace topologique . . . 61
4.8.3 Exemples . . . 61
4.8.4 Propriétés . . . 62
4.8.4.1 Connexité et adhérence . . . 62
4.8.4.2 Réunion de connexes qui se rencontrent . . . 62
4.8.4.3 Image d'un connexe par une application continue . . . 62
4.8.4.4 Théorème des valeurs intermédiaires . . . 62
4.8.5 Eléments connectés, Composantes connexes, Discontinuité totale . . . 63
4.8.6 C.N.S. de connexité pour un produit d'espace topologique . . . 63
4.8.7 Chemin d'un espace topologique . . . 63
4.8.8 Connexité par arcs . . . 63
4.8.9 Espace localement connexe . . . 64
4.8.10 Application de la connexité . . . 64
4.8.10.1 Connexité et homéomorphisme . . . 64
4.8.10.2 Connexité et résolution d'équation . . . 64

5 Algèbre linéaire et multilinéaire . . . 65

5.1 Espaces vectoriels et applications linéaires . . . 66
5.1.1 Epaces vectoriels . . . 66
5.1.1.1 Définition . . . 66
5.1.1.2 Segment d'un espace vectoriel . . . 66
5.1.1.3 Partie convexe d'un espace vectoriel . . . 66
5.1.1.4 Espace vectoriel produit ou produit direct d'espace vectoriel . . . 66
5.1.1.5 $\mathcal{F}(E,F)$ [mettre en exemple ?] . . . 67
5.1.2 Sous-espaces vectoriels . . . 67
5.1.3 Applications linéaires . . . 67
5.1.4 Quotient d'un espace vectoriel par un de ses sous-espaces vectoriels . . . 68
5.1.5 Somme de sous-espaces vectoriels . . . 69
5.1.6 Somme directe de sous-espaces vectoriels . . . 69
5.1.6.1 Sous-espaces vectoriels supplémentaires. . . . 69
5.1.6.2 Projecteur . . . 70
5.1.7 Formes linéaires et dual d'un espace vectoriel . . . 70
5.1.7.1 Formes linéaires . . . 70
5.1.7.2 Dual d'un espace vectoriel . . . 70
5.1.7.3 Orthogonalité entre un espace vectoriel et son dual, orthogonal et antéorthogonal . . . 70
5.1.7.4 Transposée d'une application linéaire . . . 71
5.1.7.5 Bidual . . . 71
5.1.8 Familles génératrices, familles libres . . . 71
5.1.8.1 Familles génératrices . . . 71
5.1.8.2 Famille libre . . . 72
5.1.8.3 Base et composant d'un vecteur . . . 72
5.1.8.4 Parties libres . . . 72
5.1.8.5 Parties basiques . . . 72
5.2 Dimension, rang et codimension . . . 72
5.2.1 Dimension d'un espace vectoriel . . . 72
5.2.2 Rang d'une partie d'un espace vectoriel . . . 72
5.2.3 Codimension d'un sous-espace vectoriel . . . 73
5.3 Droite, plan et hyperplan vectoriels . . . 73
5.4 Applications linéaires et multilinéaires en dimension finie . . . 74
5.4.1 Dimension de $L(E,F)$ . . . 74
5.4.2 Rang d'une application linéaire . . . 74

5.4.3 Dualité en dimension finie . . . 74
5.4.4 Applications multilinéaires . . . 75
5.4.4.1 Définition et propriété générale . . . 75
5.4.4.2 Applications multilinéaires alternées . . . 75
5.4.5 Déterminants . . . 76
5.4.5.1 Déterminant d'une famille de vecteurs . . . 76
5.4.5.2 Déterminant d'un endomorphisme . . . 76
5.4.5.3 Application : Orientation d'un espace vectoriel de dimension finie . . . 77
5.5 Algèbre . . . 78
5.5.1 Définition . . . 78
5.5.2 Sous-algèbre . . . 78

6 Espaces Vectoriels, Algèbres Normés et leur topologie . . . 81

6.1 Espace vectoriel normé . . . 82
6.1.1 Norme, Espace vectoriel normé . . . 82
6.1.2 Autogomie d'espaces vectoriels normés . . . 84
6.1.3 Limites des applications « somme » et « produit par un scalaire » . . . 84
6.1.4 Continuités des applications « somme », « produit par un scalaire » et norme . . . 84
6.1.5 Normes équivalentes et topologiquement équivalentes . . . 85
6.1.6 Espace normé de dimension finie . . . 85
6.1.6.1 Equivalence des normes en dimension finie . . . 85
6.1.6.2 Complétude et fermeture en dimension finie . . . 86
6.1.6.3 Continuité des applications linéaires sur un e.v.n. en dimension finie . . . 86
6.1.6.4 Continuité d'une application linéaire sur un produit d'espace vectoriel de dimension finie . . . 86
6.1.7 Espace de Banach . . . 86
6.2 Algèbre normée . . . 86
6.2.1 Norme compatible avec la multiplication d'une algèbre . . . 86
6.2.2 Norme d'algèbre, définition . . . 87
6.3 Applications linéaires sur un $\mathbb{K}$-e.v.n. et $\mathcal{L}(E,F)$ . . . 87
6.3.1 C.N.S. de continuité . . . 87
6.3.2 $\mathcal{L}(E,F)$ . . . 87
6.3.3 Norme et Norme d'opérateur ou subordonnée sur $\mathcal{L}(E,F)$ . . . 87
6.3.4 Dual d'un espace vectoriel . . . 88
6.3.5 Isométrie entre E et $\mathcal{L}(\mathbb{K};E)$ . . . 88
6.3.6 C.S. de complétude pour $\mathcal{L}(E;F)$ . . . 88
6.4 Applications multilinéaires sur un $\mathbb{K}$-e.v.n et $\mathcal{L}(E_1,...,E_n,F)$ . . . 88
6.4.1 C.N.S. de continuité . . . 89
6.4.2 $\mathcal{L}(E_1,...,E_n,F)$ . . . 89
6.4.3 Norme et Norme d'opérateur ou subordonnée sur $\mathcal{L}(E_1,...,E_n,F)$ . . . 89
6.4.4 Divers . . . 89
6.5 Topologie des espaces vectoriels normés . . . 90
6.5.1 En dimension finie . . . 90
6.5.2 En dimension infinie . . . 90
6.6 Série . . . 90
6.6.1 Définitions et propriétés générales . . . 90
6.6.2 ... dans un espace de Banach . . . 91
6.7 Exponentielle d'un endomorphisme d'un espace de Banach . . . 91
6.7.1 Définition . . . 91
6.7.2 Propriétés . . . 91
6.7.2.1 Relation entre exponentielles . . . 91
6.7.2.2 Continuité . . . 91
6.7.2.3 Commutation avec la conjugaison . . . 92
6.7.2.4 Exponentielle d'une somme . . . 92
6.7.2.5 Toute exponentielle est un carré . . . 92
6.7.2.6 Déterminant d'une exponentielle . . . 92

6.7.2.7 Application $\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathrm{GL}(E) \\ t & \mapsto & \exp(t\cdot A)\end{array}\right.$ . . . 92

7 Les nombres réels et leur topologie . . . 93

7.1 Inégalité du réordonnement . . . 94
7.2 Inégalité de Cheybychev . . . 94
7.3 Inégalité de la moyenne . . . 95
7.4 Inégalité de Cauchy-Schwarz . . . 95
7.5 Inégalité de Minkowski ou triangulaire . . . 95
7.6 Inégalité de Hölder . . . 95
7.7 Fonction Convexe . . . 96
7.8 Topologie de $\mathbb{R}$ . . . 96
7.8.1 Compact de $\mathbb{R}$ . . . 96
7.8.2 Compact de $\mathbb{R}^n$ . . . 96
7.8.3 Connexité . . . 96

8 Fonctions . . . 97

8.1 Fonctions numériques d'une variable réelle (i.e. définie sur $\mathbb{R}$) . . . 98
8.1.1 Propriétés d'une fonction continue sur un intervalle . . . 98
8.1.2 Propriétés d'une fonction continue sur un fermé borné . . . 98
8.1.3 Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone . . . 98
8.1.4 Dérivabilité . . . 98
8.1.4.1 Opérations algébrigues sur les fonctions dérivables. . . . 98
8.1.4.2 Dérivabilité d'une fonction composée. . . . 99
8.1.4.3 Dérivabilité d'une fonction réciproque . . . 99
8.1.4.4 Dérivée logarithmique . . . 99
8.1.5 Fonctions de classe C^r . . . 99
8.1.6 Fonctions de classe C^r par morceaux . . . 100
8.1.7 Théorème de Rolle . . . 100
8.1.8 Sens de variation d'une fonction. . . . 100
8.1.9 Primitives. . . . 101
8.1.10 Développements limités. . . . 101
8.1.11 Fonction convexe . . . 102
8.1.12 Fonctions usuelles numériques . . . 102
8.1.12.1 Fonction affines et linéaires . . . 102
8.1.12.2 Fonctions exponentielles . . . 102
8.1.12.3 Fonctions logarithmes . . . 103
8.1.12.4 Fonctions puissances . . . 103
8.1.12.5 Fonctions hyperboliques . . . 103
8.1.12.6 Fonctions hyperboliques réciproques . . . 105
8.1.12.7 Fonctions circulaires . . . 105
8.1.12.8 Fonctions circulaires réciproques . . . 106
8.2 Fonction vectorielle d'une variable réelle (i.e. définie sur $\mathbb{R}$) . . . 106
8.2.1 Dérivation . . . 106
8.2.1.1 Dérivée d'un produit . . . 106
8.2.1.2 Inégalité des accroissements finis . . . 106
8.2.1.3 Caractérisation des applications constantes . . . 106
8.2.1.4 Prolongement des application de classe C^1 . . . 106
8.2.2 Intégration . . . 106
8.2.2.1 Théorème des accroissements finis . . . 106
8.2.2.2 Formule de Taylor . . . 107
8.3 Fonction de plusieurs variables . . . 107
8.4 Suite numérique . . . 107
8.5 Fonction réelle ou complexe d'une variable réelle . . . 107
8.5.1 Continuité . . . 107

8.5.1.1 Continuité sur un intervalle . . . 107
8.5.1.2 Continuité sur un intervalle fermé . . . 107
8.6 Comparaison et évaluation locale des fonctions à valeur dans $\mathbb{R}$ (i.e. fonctions numériques) . . . 107
8.6.1 Négligeabilité, Domination, Equivalence . . . 108
8.6.1.1 Domination . . . 108
8.6.1.2 Négligeabilité . . . 108
8.6.1.3 Equivalence . . . 108
8.6.1.4 Similitude . . . 108
8.6.1.5 Propriétés . . . 108
8.6.1.6 Exemples fondamentaux au voisinage de 0 . . . 109
8.6.2 Developpement dans une échelle de comparaison . . . 109
8.6.2.1 Développement limité . . . 109
8.6.2.2 Développement asymptotique . . . 109
8.7 Fonctions et résultats usuels . . . 109
8.7.1 Support d'une fonction numérique . . . 109
8.7.2 Fonctions numériques usuelles définies sur $\mathbb{R}$ . . . 109
8.7.2.1 Fonctions logarithmiques et exponentielles . . . 109
8.7.2.2 Fonctions puisances . . . 109
8.7.2.3 Fonctions hyperboliques . . . 109
8.7.2.4 Fonctions hyperboliques récriproques . . . 110
8.7.2.5 Fonctions circulaires . . . 110
8.7.2.6 Fonctions circulaires réciproques . . . 112
8.7.3 Tableau des dérivées usuelles . . . 112
8.7.4 Tableau des primitives usuelles . . . 112

9 Série d'un espace vectoriel normé. Suites et séries d'applications . . . 115

9.1 Série d'un espace vectoriel normé. . . . 116
9.1.1 Convergence . . . 116
9.1.2 Convergence normale et semi-convergence . . . 117

10 Séries numériques à termes réels ou complexes. . . . 119

10.1 Séries numériques à termes réels ou complexes . . . 120
10.1.1 Convergence . . . 120
10.1.2 Séries à termes réels positifs . . . 121
10.1.2.1 Comparaison avec une intégrale. . . . 121
10.1.2.2 Séries de Riemann. . . . 121
10.1.2.3 Séries de Bertrand. . . . 121
10.1.3 Convergence absolue et semi-convergence . . . 122
10.1.4 Séries de $\mathbb{R}$ alternées. . . . 122

11 Espaces d'applications leurs structures, leurs topologies 123

11.1 Suite de fonction dans un espace métrique . . . 124
11.1.1 Convergence simple . . . 124
11.1.2 Convergence uniforme . . . 125
11.1.3 Convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées . . . 125
11.2 Topologie des espaces de fonctions bornées . . . 125
11.2.1 Distance définie sur un espace de fonctions . . . 125
11.2.2 C.S. de complétude . . . 125
11.3 Suites et séries de fonctions . . . 126
11.3.1 Convergence simple et uniforme des suites de fonctions . . . 127
11.3.2 Convergence uniforme des séries de fonctions . . . 128
11.4 Séries entières . . . 130
11.4.1 Rayon de convergence . . . 130
11.4.1.1 Rayon de convergence. . . . 130

11.4.1.2 Somme et produit de deux séries entières. 130
11.4.2 Dérivation et intégration 131
11.4.3 Développement d'une fonction en série entière 131
11.4.4 Développements en série entière usuels 132
11.4.5 Fonctions transcendantes élémentaires complexes 132
11.4.5.1 Fonction exponentielle complexe 132
11.4.5.2 Fonctions trigonométriques complexes 133
11.4.6 Série de Fourier 133
11.4.6.1 Coefficients de Fourier d'une dérivée 134
11.4.6.2 Convergence simple 134
11.4.6.3 Convergence normale 134
11.5 Fonctions à valeurs réelles en « treillis » ! 134
11.6 Théorème de Stone-Weierstrass 135
11.7 Approximation de fonction 136
11.7.1 ... continue par des polynômes sur un compact de $\mathbb{C}^n$ 136
11.7.2 ... continue périodique par des polynômes trigonométriques 136

12 Séries entières 137

12.1 Développements en série entière : DSE 138
12.1.1 Définitions 138
12.1.2 Développements usuels en série entière centrée en 0 : DSE(0) 138

13 Dérivation 139

13.1 Théorème de Rolle et des accroissements finis 140
13.1.1 Théorème de Rolle 140
13.1.2 Théorème des accroissements finis 140

14 Matrices 141

14.1 Notion de matrice 142
14.2 Exemples d'application 143
14.2.1 ... en algèbre linéaire 143
14.2.1.1 Matrice associé à un vecteur 143
14.2.1.2 Matrice associée à une famille de vecteur 143
14.2.1.3 Matrice associée à une application linéaire 143
14.2.1.4 Matrice associée à un endomorphisme 144
14.2.2 ... en calcul différentiel 144
14.3 Rang d'une matrice 144
14.4 Construction de l'espace vectoriel normé $M_{n,p}(\mathbb{K})$ 144
14.4.1 Addition et multiplication sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$ 145
14.4.2 Normes sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$ 145
14.5 Multiplication des matrices 146
14.6 Transposition et transposée d'une matrice 147
14.7 Transconjugaison ou Matrice adjointe 147
14.8 Opérations élémentaires 148
14.9 Spécificités propres aux matrices carrées 148
14.9.1 Construction de l'anneau et de l'algèbre normée $M_n(\mathbb{K})$ 148
14.9.2 Trace d'une matrice carrée 149
14.9.3 Matrice carrée nilpotente 149
14.9.4 Matrice carrée inversible et groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ 149
14.9.4.1 Matrice carrée inversible 149
14.9.4.2 Groupe Linéaire 150
14.9.4.3 Transposé d'une matrice carrée inversible 150
14.9.4.4 Transconjugaison et matrice adjointe d'une matrice carrée inversible 150
14.9.4.5 Rang et matrice carrée inversible 150
14.9.5 Matrices carrées symétrique et antisymétrique 150

14.9.5.1 Matrice carrée symétrique . . . 150
14.9.5.2 Matrice carrée antisymétrique . . . 151
14.9.5.3 Relation entre les deux notions . . . 151
14.9.5.4 Matrice carrée symétrique semi-définie positive et définie positive . . . 151
14.9.6 Matrice orthogonale . . . 151
14.9.7 Matrices carrées hermitienne et antihermitienne . . . 151
14.9.7.1 Matrices hermitiennes . . . 151
14.9.7.2 Matrices antihermitienne . . . 151
14.9.7.3 Matrice carrée hermitienne semi-définie positive et définie positive . . . 151
14.9.8 Matrice unitaire . . . 152
14.9.9 Matrice normale . . . 152
14.9.10 Matrices carrées triangulaires . . . 152
14.9.11 Matrices carrées diagonales . . . 152
14.10 Matrices équivalentes, changement de base . . . 153
14.10.1 Matrices de passage . . . 153
14.10.2 Formules de changement de base . . . 154
14.10.3 Matrices équivalentes . . . 154
14.10.4 Matrices carrées semblables . . . 154
14.11 Exponentielle d'une matrice carrée . . . 155
14.11.1 Définition . . . 155
14.11.2 Propriétés . . . 155
14.12 Déterminant d'une matrice carrée . . . 155
14.12.1 Définition . . . 155
14.12.2 Méthodes élémentaires de calcul . . . 156
14.12.2.1 Lignes ou colonnes liées . . . 156
14.12.2.2 Mineur, Cofacteur et Développement par rapport à une rangée . . . 156
14.12.2.3 Comatrice . . . 157
14.12.3 Cas d'une matrice triangulaire . . . 157
14.12.4 Manipulation de lignes et de colonnes . . . 157
14.12.5 Déterminants d'ordre 2 et 3 . . . 158
14.12.6 Déterminant de Vandermonde . . . 158
14.13 Rang et sous-matrice . . . 158
14.14 Réduction des matrices carrées . . . 159
14.14.1 Eléments propres, spectre et rayon spectral . . . 159
14.14.1.1 Valeur ou vecteur propres . . . 159
14.14.1.2 Spectre, Sous-espace propre d'une matrice . . . 159
14.14.2 Polynôme caractéristique . . . 160
14.14.3 Diagonalisabilité . . . 160
14.14.4 Polynômes de matrices . . . 160
14.14.5 Application de la diagonalisation . . . 160
14.14.6 Trigonalisationbilité . . . 160
14.14.7 Polynômes annulateurs . . . 161
14.14.8 Décompostion de Dunford . . . 161
14.14.9 Réduction de Jordan . . . 161
14.14.10 Réduction de matrices symétriques réelle . . . 161
14.14.11 Réduction des matrices hermitienne . . . 161
14.15 Blocs . . . 161
14.16 Valeur singulière d'une matrice rectangulaire . . . 161

15 Intégration selon Cauchy-Riemann et Riemann . . . 163

15.1 Intégrale de Riemann . . . 164
15.1.1 Structures construites sur $E([a,b])$ . . . 165
15.1.2 Première formule de la moyenne . . . 165
15.1.3 Valeur moyenne d'une fonction . . . 165
15.1.4 Intégrale sur la réunion de segments adjacents . . . 165
15.1.5 Changement de variable . . . 166

15.1.6 Intégration par parties . . . 166
15.1.7 Fonction définie par une intégrale . . . 166
15.1.8 Application $g: x \mapsto \int_a^x f(t)dt$: . . . 166
15.1.8.1 Continuite, variation . . . 166
15.1.8.2 Dérivabilité, primitive et intégrale . . . 166
15.1.8.3 Intégrale convergente et intégrale généralisée ou impropre . . . 166
15.1.8.4 Critères de convergence pour des fonctions positives . . . 167
15.1.8.5 Convergence absolue . . . 168
15.1.8.6 Semi-convergence . . . 168
15.1.9 Application $g: x \mapsto \int_a^b f(x,t)dt$: . . . 168
15.1.10 Intégrales classiques . . . 168
15.1.10.1 Intégrale de Walis . . . 168
15.1.10.2 Intégrales d'Euler . . . 169
15.1.10.3 Intégrale de Poisson . . . 169
15.1.10.4 Fonction gamma (ou Fonctions eulériennes de deuxième espèce) . . . 169
15.1.10.5 Fonction bêta (ou Fonctions eulériennes de première espèce) . . . 169
15.1.10.6 Intégrale de Dirichlet . . . 169

16 Mesure et Intégrale de Lebesgue . . . 171

16.1 Enseignement de l'intégration . . . 172
16.1.1 Bref Historique . . . 173
16.1.1.1 Mise en place intuitive . . . 173
16.1.1.2 Première définition par Cauchy . . . 173
16.1.1.3 Généralisation par Riemann . . . 173
16.1.1.4 Nouvelle approche de Lebesgue . . . 173
16.1.1.5 On peut encore faire mieux ! . . . 174
16.1.1.6 Ce n'est pas fini ... Riemann est de retour ! . . . 174
16.1.2 Photographie de l'enseignement actuel . . . 174
16.1.2.1 Premier contact en terminale . . . 174
16.1.2.2 Apparition du formalisme en BAC+2 . . . 175
16.1.2.3 Au delà, il faut tout reprendre ! . . . 175
16.1.3 Exposé rapide des différentes théories . . . 176
16.1.3.1 Intégrale de Riemann . . . 176
16.1.3.2 Intégrale de Lebesgue . . . 176
16.1.3.3 Kurzweil-Henstock . . . 177
16.1.3.4 Relations entre toutes ses intégrales . . . 178
16.1.4 Conclusion . . . 180
16.2 Convention de calcul dans $\overline{\mathbb{R}}$ . . . 180
16.3 Anneau, Algèbre et Tribu de parties d'un ensemble . . . 180
16.3.1 Anneau ou clan de parties d'une ensemble . . . 180
16.3.2 Algèbre de partie d'un ensemble . . . 181
16.3.3 σ-Anneau ou σ-clan de partie d'un ensemble. Espace et ensemble mesurables . . . 182
16.3.4 Tribu ou σ-algèbre ou corps de Borel de partie d'un ensemble. Espace probabilisable . . . 183
16.3.5 Anneau, algèbre, σ-Anneau et Tribu engendrés par $C \subset \mathcal{P}(E)$ . . . 184
16.3.6 Tribu produit . . . 184
16.3.7 Tribu engendrée par une topologie . . . 184
16.3.7.1 Définition générale . . . 184
16.3.7.2 Cas d'un Espace métrique . . . 185
16.3.7.3 Tribu borélienne de $\mathbb{R}$ . . . 185
16.3.7.4 Tribu borélienne de $\mathbb{R}^n$ . . . 185
16.3.7.5 $\mathcal{P}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$? . . . 185
16.3.7.6 σ-Anneau engendré par les compacts . . . 185
16.3.8 π-Classe et λ-Classe . . . 185
16.4 Fonctions étagées . . . 185
16.4.1 Définitions . . . 186

16.4.2 Fonctions numériques étagées (Cas $E_2 = \mathbb{R}, \bar{\mathbb{R}}$) . . . 186
16.5 Applications mesurables et espace $\mathcal{L}_0$ . . . 186
16.5.1 Définition . . . 186
16.5.2 Propriétés générales . . . 187
16.5.2.1 "Critère de mesurabilité" . . . 187
16.5.2.2 Composition d'applications mesurables . . . 187
16.5.2.3 Applications continues et mesurabilité . . . 187
16.5.2.4 Notation . . . 187
16.5.3 Applications mesurables à valeurs dans un espace métrique . . . 187
16.5.4 Application à valeurs dans un espace produit . . . 187
16.5.5 Applications numériques mesurables . . . 187
16.5.5.1 "Critère de mesurabilité" . . . 187
16.5.5.2 Opérations sur les applications numériques mesurables . . . 188
16.5.5.3 Suite d'applications numériques mesurables . . . 188
16.6 Approximation de $\overset{\text{fonctions}}{\text{mesurables}}$ par des $\overset{\text{fonctions étagées}}{\text{mesurables}}$ . . . 189
16.7 Mesures . . . 189
16.7.1 Application additive d'ensemble . . . 190
16.7.2 Application σ-additive d'ensemble . . . 190
16.7.3 Mesure sur un anneau d'ensemble . . . 190
16.7.4 Mesures définies sur une algèbre . . . 192
16.7.5 Mesures définies sur une tribu . . . 192
16.7.6 Espace mesuré . . . 192
16.8 Mesures extérieures, ensemble négligeable . . . 192
16.8.1 Mesure extérieure . . . 193
16.8.2 Mesure extérieure associée à une mesure et ensemble négligeable . . . 193
16.8.3 Ensembles μ-mesurables (au sens de Carathéodory) . . . 194
16.8.4 Mesure canonique de Lebesgue . . . 194
16.8.5 Propriété vraie presque partout . . . 195
16.9 Intégrale . . . 195
16.9.1 Intégrale supérieure sur un espace probabilisable . . . 195
16.9.2 Mesure positive définie par une intégrale supérieure . . . 196
16.9.3 Intégrale définie par une mesure positive . . . 196
16.9.3.1 Pour une fonction étagée . . . 196
16.9.3.2 Pour une fonction mesurable . . . 196
16.9.3.3 Propriétés générales . . . 197
16.9.3.4 Relation entre mesure et intégrale . . . 197

17 Espace $\mathcal{L}^1$ des fonctions μ-intégrables . . . 199

17.1 Fonction μ-intégrable et espace $\mathcal{L}^1$ . . . 200
17.1.1 Définition . . . 200
17.1.2 Propriétés . . . 201
17.1.3 Fonction localement μ-intégrable . . . 201
17.2 Théorèmes de convergence dominée . . . 201
17.2.1 ... pour une suite définie par $(\int f_n d\mu)_{n\in\mathbb{N}}$ . . . 201
17.2.2 ... pour une suite définie par $(\int \sum f_n d\mu)_{n\in\mathbb{N}}$ . . . 202
17.2.3 ... pour une fonction définie par $x \mapsto \int_E f(x,t)d\mu(t)$ . . . 202
17.2.3.1 Limite . . . 203
17.2.3.2 Continuité . . . 203
17.3 Théorème de dérivation pour une fonction définie par $x \mapsto \int_E f(x,t)d\mu(t)$ . . . 203
17.4 Relation entre l'intégrale de Lebesgue et l'intégrale 204
17.4.1 ... de Riemann sur $[a,b] \in \mathbb{C}$ . . . 204
17.4.2 ... généralisée de Riemann sur $\underset{a\in\mathbb{R},\,b\in\bar{\mathbb{R}}}{[a,b[}$ $\underset{a\in\bar{\mathbb{R}},\,b\in\mathbb{R}}{]a,b]}$ $\underset{a\in\bar{\mathbb{R}},\,b\in\bar{\mathbb{R}}}{]a,b[}$ $a<b$ . . . 205
17.5 Construction de mesures particulières et leur applications . . . 205
17.5.1 Mesures définies par des densités . . . 205

17.5.1.1 Définitions . . . 205
17.5.1.2 Propriétés générales . . . 205
17.5.1.3 Cas particulier de la mesure de Lebesgue . . . 206
17.5.1.4 Mesures absolument continues . . . 206
17.5.2 Mesures images . . . 206
17.5.2.1 Définition . . . 206
17.5.2.2 Propriété générale . . . 206
17.5.2.3 C.S. d'intégration par rapport à une mesure image . . . 206
17.5.2.4 Mesure image et formalisme probabiliste . . . 206
17.5.2.5 Mesure image et mesure de courbes et de surface de $\mathbb{R}^n$ . . . 206
17.5.2.6 Mesure image et formule du changement de variable dans $\bar{\mathbb{R}}$ . . . 207
17.5.3 Mesures produits . . . 207
17.5.3.1 Existence et Définition . . . 207
17.5.3.2 Mesure produit et intégration sur un espace produit (théorèmes de Fubini) . 208
17.5.3.3 Mesure produit et intégration sur un produit fini d'espaces . . . 208
17.5.3.4 Cas particulier de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ . . . 208

18 Les coniques . . . 209

19 Calcul scientifique . . . 211

19.1 Résolution numérique d'équations et systèmes d'équations non linéaires . . . 212
19.1.1 Cas scalaire $f:\left|\begin{array}{l}\mathbb{R}\\ \mathbb{R}\end{array}\right.$ . . . 212
19.1.1.1 Théorème des valeurs intermédiaires et dichotomie (Algorithme de dichotomie) . . . 212
19.1.1.2 Méthode du point fixe attractif contractions Théorème du point fixe contractant et suite (Algorithme des approximations successives) . . . 212
19.1.1.3 Méthode de la corde . . . 213
19.1.1.4 Méthode de Newton . . . 213
19.1.2 Cas Vectoriel $F:\left|\begin{array}{l}\mathbb{R}^n\\ \mathbb{R}^n\end{array}\right.$ . . . 213
19.1.2.1 Méthode de la corde . . . 213
19.1.2.2 Méthode de Newton-Raphson . . . 213
19.1.3 Ordre (de convergence) d'une méthode itérative . . . 213
19.1.3.1 Définition . . . 213
19.1.3.2 Condition de convergence suivant l'ordre . . . 213
19.1.3.3 Ordre et vitesse de convergence . . . 214
19.2 Résolution numérique d'équation et système linéaire. . . . 214
19.2.1 Interprétations . . . 214
19.2.1.1 Interprétation Affine . . . 214
19.2.1.2 Interprétation matricielle . . . 214
19.2.1.3 Interprétation vectorielle . . . 214
19.2.2 Méthode directe de résolution. Cas r=n=p dit Système de Cramer . . . 214
19.2.2.1 Méthode de Cramer . . . 214
19.2.2.2 Méthode d'élimination de Gauss . . . 214
19.2.2.3 Méthode de Cholesky . . . 214
19.2.2.4 Méthodes Itératives Jacobi/Gauss-Seidel/Relaxation . . . 215
19.2.3 Méthodes itératives Jacobi/Gauss-Seidel/Relaxation; gradiant; gradian conjugué . 215
19.2.3.1 **vitesse asymptotique de convergence** . . . 215
19.2.3.2 Conditionnement d'un système . . . 216
19.2.4 Résolution : cas $r = n < p$ . . . 216
19.2.5 Résolution : cas $r < n$ . . . 216
19.2.6 Cas des systèmes linéaires-homogènes . . . 216
19.3 Equation différentielle à conditions initiales . . . 216
19.4 Approximation polynomiale . . . 216
19.4.1 Introduction . . . 216

19.4.2 Approximation par le polynôme d'interpolation de Lagrange . . . 216
19.4.2.1 Existence, unicité et définition . . . 217
19.4.2.2 Calcul effectif . . . 217
19.4.2.3 Calcul d'erreur . . . 217
19.4.2.4 Choix optimal des points d'interpolation . . . 217
19.4.3 Approximation au sens des moindres carrés discret (MCD) . . . 217
19.4.3.1 Existence et unicité . . . 217
19.4.3.2 Calcul effectif . . . 218
19.4.3.3 Droite de régression . . . 218
19.4.4 Approximation au sens des moindres carrés continu (MCC) . . . 218
19.4.4.1 Définition . . . 218
19.4.4.2 Problème de meilleur approximation au sens de MCC (pour f donné) . . . 218
19.4.4.3 Calcul effectif de P . . . 218

20 Applications dérivables et différentiables . . . 219

20.1 Dérivée directionnelle et G–dérivée . . . 220
20.1.1 Dérivée directionnelle . . . 220
20.1.2 Dérivée au sens de Gâteaux . . . 220
20.1.3 Points critiques, Extremums . . . 221
20.1.3.1 Cas général : points critiques . . . 221
20.1.3.2 Cas ou E est quelconque et $F = \mathbb{R}$ . . . 221
20.1.4 Dérivabilité sur un espace produit . . . 221
20.2 Différentielle ou F-dérivée . . . 222
20.2.1 Différentiabilité et différentielle en un point . . . 222
20.2.1.1 Définition . . . 222
20.2.1.2 Unicité . . . 223
20.2.1.3 Relation entre différentielle et dérivée directionnelle . . . 223
20.2.1.4 Différentiabilité et continuité en un point . . . 223
20.2.2 Différentiabilité et Différentielle sur un ouvert d'un e.v.n. . . . 223
20.2.3 Différentielle partielle . . . 224
20.2.4 Remarques générales . . . 224
20.2.5 Cas $E = \mathbb{K}$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) . . . 225
20.2.6 Cas d'une application constante . . . 225
20.2.7 Cas d'une application linéaire . . . 225
20.2.8 Cas d'une application bilinéaire . . . 225
20.2.9 Généralisation : Cas d'une fonction n-linéaire . . . 225
20.2.10 Trace d'une application différentiable . . . 225
20.2.11 Linéarité de la différentielle en un point a (sur l'ensemble des fonctions différentiables) . . . 225
20.2.12 Différentielle d'une application composée . . . 226
20.2.13 Cas d'une application dans une somme directe (espace produit) . . . 226
20.2.14 Formule de Leibniz . . . 227
20.2.15 Cas d'une application définie sur une somme directe . . . 227
20.3 Matrice jacobienne . . . 228
20.3.1 Définition . . . 228
20.3.2 Calcul de la matrice jacobienne . . . 228
20.3.2.1 Théorème de changement de variable . . . 228
20.4 Théorèmes des accroissements finis . . . 228
20.4.1 Cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ $(F = \mathbb{R})$ . . . 228
20.4.1.1 Fonction définie sur $\mathbb{R}$ . . . 228
20.4.1.2 Fonction définie sur un e.v.n. . . . 229
20.4.2 Cas des fonctions à valeurs dans un e.v. F quelconque . . . 229
20.4.2.1 Applications d'une variable réelle . . . 230
20.4.2.2 Applications définies sur un ouvert d'un e.v.n. quelconque . . . 230
20.4.2.3 Applications définies sur un convexe . . . 230
20.4.3 Applications . . . 230

20.4.3.1 Application de différentielle 0: $x \mapsto 0$ . . . 230
20.4.3.2 Comportement d'une application d'une variable réelle . . . 231
20.4.4 Relation entre différentiabilité et Lipschitziennité . . . 231
20.4.4.1 Condition suffisante pour qu'une application soit lipschitzienne. . . . 231
20.4.4.2 Condition suffisante pour qu'une application soit localement lipschitzienne . 231
20.5 Difféomorphisme . . . 231
20.6 Théorème d'inversion locale . . . 231
20.7 Théorème des fonctions implicites . . . 232
20.8 Différentielle d'ordre supérieur . . . 232
20.8.1 Différentielle d'ordre 2 . . . 232
20.8.1.1 Définition . . . 232
20.8.1.2 Interprétation de $d_a^2 f$: Application bilinéaire associée à $d_a^2 f$ . . . 233
20.8.1.3 Calcul de $d_a^2 f$ . . . 233
20.8.1.4 Théorème de Schwarz . . . 233
20.8.2 Différentielle d'ordre n . . . 233
20.8.2.1 Définition . . . 233
20.8.2.2 Interprétation de $d_a^n f$: Application multilinéaire associée à $d_a^n f$ . . . 234
20.8.2.3 Calcul de $d_a^n f$ . . . 234
20.8.2.4 Théorème de Schwarz . . . 234
20.8.2.5 Propriétés . . . 234
20.8.2.6 Règles de calcul . . . 234
20.8.3 Application de classe $\mathcal{C}^1, ...; \mathcal{C}^n; ...; \mathcal{C}^\infty$ . . . 235
20.8.3.1 Définition . . . 235
20.8.3.2 Les espaces $\mathcal{C}^\infty(U, F)$ . . . 235
20.8.3.3 Propriété . . . 235
20.8.3.4 Cas où $E = \Lambda$ . . . 235
20.9 Formules de Taylor . . . 235
20.9.1 Formule de Taylor asymptotique . . . 235
20.9.2 Formule de Taylor avec reste de Lagrange . . . 236
20.9.3 Formule de Taylor avec reste de Intégrale . . . 236
20.10 Maxima et minima relatifs (ou local) libre . . . 236
20.10.1 Première condition nécessaire . . . 236
20.10.2 Condition du second ordre . . . 236
20.10.3 Condition suffisante pour le minimum relatif . . . 237
20.11 Maxima et minima relatifs (ou local) liés (ou avec contraintes) . . . 237

21 Equation différentielle . . . 239

21.1 Définitions et remarques générales . . . 240
21.2 Equation différentielle d'ordre 1 . . . 240
21.3 Equation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 à coefficients constants . . . 241
21.4 Equation différentielle d'ordre supérieur . . . 242
21.4.1 Définition . . . 242
21.4.2 Réduction à un système d'équa. diff. d'ordre 1 . . . 242
21.4.2.1 Equipotence des ensembles de solution . . . 243
21.4.2.2 Equipotence des ensembles de solution maximale . . . 243
21.4.3 Equa. diff. d'ordre sup. linéaire, homogène et à coefficients constants . . . 243
21.4.4 Définitions . . . 243
21.4.5 Méthode de résolution . . . 244
21.5 Equation différentielle linéaire d'ordre 1 . . . 244
21.5.1 Définitions . . . 244
21.5.2 Théorème d'existence . . . 244
21.5.3 Etude de l'équation homogène : $y' = A_t(y)$ (*) . . . 244

22 Théorie des Graphes . . . 247

22.1 Notion de Graphe . . . 248

22.1.1 Graphes non orientés . . . 248
22.1.2 Graphe orienté . . . 249
22.1.3 Définitions Communes . . . 250
22.2 Représentation de graphes . . . 251
22.2.1 Graphes non orientés (i.e. multigraphes) . . . 251
22.2.1.1 Matrice d'incidence . . . 251
22.2.1.2 Matrice adjacente . . . 251
22.2.1.3 Liste d'adjacence . . . 252
22.2.2 Graphes orientés (i.e. graphes) . . . 252
22.2.2.1 Matrice d'incidence . . . 252
22.2.2.2 Matrice adjacente . . . 252
22.2.2.3 Liste d'adjacence . . . 252
22.3 Chaînes, cycles, circuits et chemins . . . 252
22.4 Sous graphes . . . 254
22.5 Connexité et forte connexité . . . 254
22.5.1 Graphe connexe . . . 254
22.5.2 Graphe orienté fortement connexe . . . 255
22.5.3 Arêtes/sommets séparat(eur/rices), graphe séparable, bloc . . . 255
22.5.4 **Excentricité d'un sommet, diamètre, rayon et centre d'un graphe** . . . 255
22.5.5 Forêts, Arbres . . . 256

23 Hypergraphes, Systèmes d'indépendants et matroïdes . . . 259

23.1 Hypergraphe . . . 260
23.2 Matroïde . . . 260
23.2.1 Définition . . . 260
23.2.2 Propriété . . . 260
23.2.3 Exemples . . . 261

24 Théorie des langages formels . . . 263

24.1 Définitions . . . 264

25 Informatique . . . 265

25.1 Survol du Cours . . . 266
25.1.1 Sujet, Livres, Site Internet . . . 266
25.1.2 Algorithmes et Heuristiques : Philosophie et Terminologie . . . 266
25.2 Pseudocode . . . 266
25.2.1 Analyse d'Algorithmes . . . 267
25.2.2 Rappel : Taux de Croissance des Fonctions . . . 268
25.3 Algorithmes de Tri . . . 268
25.3.1 Enoncé du Problème de Tri . . . 268
25.3.2 Tri par Insertion . . . 268
25.3.3 Tri par Division-Fusion . . . 269
25.3.4 Tri Rapide . . . 270
25.3.5 Analyse du Tri par Insertion . . . 271
25.3.6 Analyse du Tri par Fusion . . . 272
25.3.7 Analyse du Tri Rapide . . . 272
25.4 Heuristique GLOUTON . . . 272
25.4.1 Définition . . . 272
25.4.2 Heuristique GLOUTON appliquée aux Matroïdes . . . 272
25.4.2.1 Propriétés . . . 272
25.4.2.2 Exemples : . . . 272
25.5 Algorithmes de parcours dans les graphes . . . 274
25.5.1 Arbres de parcours . . . 274
25.5.2 Parcours en largeur . . . 275
25.5.2.1 Algorithme PARCOURS EN LARGEUR . . . 275

25.5.2.2 Propriétés de PARCOURS EN LARGEUR . . . 276
25.5.2.3 Applications de PARCOURS EN LARGEUR . . . 276
25.5.3 Parcours en profondeur . . . 277
25.5.3.1 Algorithme PARCOURS EN PROFONDEUR . . . 277
25.5.3.2 Propriétés de PARCOURS EN PROFONDEUR . . . 278
25.5.3.3 Applications de PARCOURS EN PROFONDEUR . . . 278
25.5.4 Algorithme de Prim . . . 279
25.6 Complexité algorithmique . . . 280
25.6.1 Problèmes de Décision . . . 280
25.6.2 Codages . . . 280
25.6.3 Les classes de complexité $\mathcal{P}$, NP et co-NP . . . 281
25.6.3.1 La classe $\mathcal{P}$ . . . 281
25.6.3.2 La classe NP . . . 281
25.6.3.3 La classe co-NP . . . 282
25.6.3.4 Remarques . . . 282
25.6.4 Réductibilité, NP-complétude et la classe NPC . . . 283
25.6.4.1 Réductibilité . . . 283
25.6.4.2 NP-complétude . . . 283
25.6.5 Satisfaisabilité . . . 284
25.6.5.1 Le problème SAT . . . 284
25.6.5.2 Le problème k-SAT . . . 284
25.6.6 Problèmes NP-complets . . . 285
25.6.6.1 COUVERTURE EXACTE . . . 285
25.6.6.2 CIRCUIT HAMILTONIEN ORIENTÉ . . . 285

26 L.C.I., Magma, Semi-groupe, Monoïde . . . 287

26.1 Loi de composition interne ou loi de composition . . . 287
26.2 Magma . . . 289
26.3 Semi-groupe . . . 290
26.4 Monoïde . . . 290

27 Théorie des Groupes . . . 291

27.1 Structure de groupe . . . 291
27.1.1 Définition d'un groupe . . . 292
27.1.2 Groupe fini . . . 292
27.1.3 Ordre d'un groupe . . . 293
27.1.4 Groupe commutatif . . . 293
27.1.5 Propriétés . . . 295
27.1.6 Table de Cayley d'un groupe fini . . . 295
27.2 Structure de sous-groupe . . . 295
27.2.1 Définition d'un sous-groupe . . . 295
27.2.2 Intersection de sous-groupes . . . 299
27.2.3 Sous-groupe propre . . . 299
27.2.4 Sous-groupe maximal . . . 299
27.2.5 Sous-groupe G engendré par A . . . 299
27.2.5.1 Cas Général . . . 299
27.2.5.2 Parties génératrices, générateurs (cas particulier) . . . 299
27.2.5.3 Ordre d'un élément dans un groupe . . . 299
27.2.6 Sous-groupe de Frattini . . . 300
27.2.7 Groupes Monogènes . . . 300
27.2.8 Groupes Cycliques . . . 300
27.2.8.1 Définition . . . 301
27.2.8.2 Propriétés . . . 301
27.2.9 Sous-groupes particuliers . . . 301
27.2.9.1 Centre d'un groupe . . . 301
27.2.9.2 Centralisateur de A dans G . . . 301

27.2.9.3 Normalisateur de A dans G . . . 301
27.3 Morphisme de groupe . . . 302
27.3.1 Définitions générales et propriétés . . . 302
27.3.2 Epimorphisme et Monomophisme de groupes . . . 302
27.4 Groupes Quotients et Classe modulo un sous-groupe . . . 303
27.4.1 Relation d'équivalence modulo un sous-groupe . . . 303
27.4.1.1 Propriété . . . 303
27.4.1.2 Définitions . . . 304
27.4.2 Théorème de Lagrange . . . 304
27.4.2.1 Enoncé . . . 304
27.4.2.2 Equipotence de $(G/H)_d$ et $(G/H)_g$ . . . 304
27.4.2.3 Indice d'un groupe . . . 304
27.4.2.4 Formule des indices . . . 304
27.4.3 Compatibilité de $\mathcal{R}_H$ et de ${}_H\mathcal{R}$ avec la loi de composition interne de G et premier théorème d'isomorphisme . . . 305
27.4.3.1 Cas général . . . 306
27.4.3.2 Cas où le groupe G est abélien . . . 306
27.4.3.3 Cas où $H = \ker(f)$ où f est un morphisme de groupe . . . 306
27.4.4 Sous-groupe normaux (ou distingués) et groupe quotient . . . 308
27.4.5 Groupes simples . . . 308
27.5 Etude des groupes quotients . . . 308
27.5.1 Sous groupe d'un groupe quotient . . . 308
27.5.2 Théorème d'isomorphisme . . . 308
27.6 Groupes symétriques et le groupe symétrique $(S_n, \circ)$ . . . 309
27.6.1 Définition et propriété . . . 309
27.6.2 Etude de S_n . . . 309
27.6.2.1 Support d'une permutation . . . 310
27.6.2.2 σ-orbite (ou orbite d'un élément de E suivant σ) . . . 310
27.6.3 Cycle et longueur d'un cycle . . . 310
27.6.4 Transposition . . . 310
27.6.5 Décomposition d'une permutation . . . 310
27.6.5.1 Décomposition en cycle . . . 311
27.6.5.2 Décomposition en transposition . . . 311
27.6.5.3 Décomposition en transposition simple . . . 311
27.6.6 Inversion d'une permutation . . . 311
27.6.7 Signature d'une permutation . . . 312
27.6.8 Groupe alterné A_n . . . 312
27.6.9 Groupes diédraux D_n . . . 312
27.7 Groupe opérant sur un ensemble . . . 312
27.8 Fixateur, Sous-groupe d'isotropie ou stabilisateur, orbites . . . 313
27.8.1 Fixateur . . . 313
27.8.2 Stabilisateur . . . 314
27.8.3 Orbite . . . 315
27.8.4 Exemples classiques . . . 315
27.8.5 Propriétés des stabilisateurs et orbites . . . 316
27.9 Groupes finis, p-sous-groupe d'un groupe fini et théorèmes de Sylow . . . 316
27.9.1 p-sous-groupe d'un groupe fini . . . 316
27.9.2 Premier théorème de Sylow . . . 316
27.9.3 Second théorème de Sylow . . . 316
27.10 Produit direct de groupes . . . 316
27.10.1 Produit direct de deux groupes . . . 317
27.10.2 Produit direct d'un nombre fini de groupe . . . 317
27.11 Structure des groupes abéliens finis . . . 318

28 Structure d'Anneau . . . 318

28.1 Généralités sur les anneaux . . . 320

28.1.1 Définitions de base . . . 320
28.1.2 Sous-anneau . . . 320
28.1.2.1 Sous-anneau engendré par une partie non vide . . . 320
28.1.3 Centre d'un anneau . . . 320
28.1.4 Propriétés dans un anneau quelconque . . . 321
28.1.4.1 Règles de calcul . . . 322
28.1.4.2 Binôme de Newton dans un anneau quelconque . . . 322
28.1.5 Propriétés dans un anneau unitaire . . . 322
28.1.5.1 Règles de calcul . . . 323
28.1.5.2 Formule du binôme de Newton . . . 323
28.1.5.3 Groupes des éléments inversibles d'un anneau unitaire . . . 324
28.1.5.4 Caractéristique d'un anneau unitaire . . . 324
28.1.6 Diviseur de zéro . . . 325
28.1.7 Anneau intègre . . . 326
28.1.8 Eléments associés . . . 326
28.1.9 Idéal d'un anneau . . . 327
28.1.9.1 Idéal à gauche, à droite et bilatère . . . 327
28.1.9.2 Intersection, somme d'ideaux et idéal engendré . . . 327
28.1.9.3 Idéal principal d'un anneau commutatif . . . 328
28.1.9.4 Idéal premier d'un anneau commutatif . . . 328
28.1.10 Divisibilité dans les anneaux intègres et éléments irréductibles . . . 328
28.1.11 Anneau principal . . . 328
28.1.12 Morphisme d'anneaux . . . 329
28.1.12.1 Prolongement isomorphe d'un anneau dans un anneau unitaire . . . 329
28.1.13 Anneau quotient . . . 329
28.1.14 Factorisation canonique d'un morphisme d'anneaux commutatifs . . . 329
28.2 Anneau factoriel . . . 330
28.3 Anneau euclidien . . . 330
28.4 Elément premier . . . 330
28.4.1 Elément nilpotent . . . 331
28.5 Extension par adjonction d'un élément . . . 331
28.5.1 Eléments algébriques, transcendants . . . 331
28.5.2 Extension algébrique . . . 331
28.5.3 Extension transcendante (Anneau des polynômes sur un anneau commutatif) . . . 331
28.5.3.1 Définition . . . 332
28.5.3.2 Degré d'un polynôme . . . 332
28.5.3.3 Division euclidienne . . . 333
28.5.3.4 Evaluation ou fonction d'évaluation . . . 334
28.5.3.5 Interpolation de Lagrange . . . 334
28.5.3.6 Contenu d'un polynôme . . . 335
28.5.3.7 Polynôme primitif . . . 336
28.5.3.8 Critères d'irréductibilité . . . 336
28.5.3.9 Polynôme symétrique . . . 336

29 Corps . . . 337

29.1 Corps . . . 337
29.2 Corps des fractions d'un anneau A . . . 337
29.3 Extension algébriques . . . 338
29.3.1 Extension . . . 338
29.3.2 Extension algébrique . . . 339
29.3.3 Adjonction de Racines . . . 339
29.4 Corps finis . . . 340

30 Divers . . . 341

30.1 Loi de compostion externe ou loi d'action . . . 341
30.2 Module . . . 342

30.3 Espace vectoriel . . . 342
30.4 Algèbre . . . 343

31 Arithmétique . . . 343

31.1 L'anneau $(\mathbb{Z}, +, \times)$ . . . 344
31.1.1 Nombres premiers entre eux . . . 344
31.1.2 Nombres premiers . . . 345
31.2 L'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ . . . 345

32 Analyse Réelle . . . 346

32.1 Objectifs . . . 346
32.1.1 Plan d'étude . . . 346
32.1.2 Le cas $p=1$ . . . 346
32.1.3 Le cas $p=2$ . . . 347
32.1.4 Le cas $p=\infty$ . . . 348
32.1.5 le groupe $(\mathbb{S}^1, \times)$ . . . 348
32.1.6 Méthode de résolution des exercices par densité: . . . 348
32.2 Espace $\mathcal{L}^0$ . . . 348
32.3 Applications mesurables et espace $\mathcal{L}_0$ . . . 349
32.3.1 Définition . . . 350
32.3.2 Propriétés générales . . . 350
32.3.2.1 "Critère de mesurabilité" . . . 351
32.3.2.2 Composition d'applications mesurables . . . 351
32.3.2.3 Applications continues et mesurabilité . . . 351
32.3.2.4 Notation . . . 352
32.3.3 Applications mesurables à valeur dans un espace métrique . . . 352
32.3.4 Application à valeurs dans un espace produit . . . 352
32.3.5 Applications numériques mesurables . . . 353
32.3.5.1 "Critère de mesurabilité" . . . 355
32.3.5.2 Opérations sur les applications numériques mesurables . . . 356
32.3.5.3 Suite d'applications numériques mesurables . . . 357
32.3.6 Inégalité de convexité sur $\mathcal{L}^{0+}$ . . . 357
32.4 Espaces $\mathcal{L}^1$,$\mathcal{L}^2$ et $\mathcal{L}^p$ . . . 358
32.4.1 Etude de $\mathcal{L}^1$ . . . 358
32.4.1.1 Définition . . . 359
32.4.1.2 Structure d'espace vectoriel, Semi-norme et inégalités convexes sur $\mathcal{L}^1$ . . . 359
32.4.2 Etude de $\mathcal{L}^2$ . . . 360
32.4.2.1 Définition . . . 360
32.4.2.2 Exemple de fonction de $\mathcal{L}^2$ . . . 361
32.4.2.3 Structure d'espace vectoriel, Semi-norme et inégalités convexes sur $\mathcal{L}^2$ . . . 362
32.4.2.4 Existence d'une forme hermitienne . . . 362
32.4.3 Etude générale . . . 362
32.4.3.1 Définitions . . . 363
32.4.3.2 Semi-norme et inégalités convexes sur $\mathcal{L}^p$ . . . 365
32.4.3.3 Relation d'équivalence sur $\mathcal{L}^p$ . . . 366
32.5 Espace L^1, L^2 et L^p, $p \in [1, +\infty]$ . . . 366
32.5.1 Etude de L^1 . . . 366
32.5.1.1 L^1 espace normé . . . 367
32.5.1.2 L^1 espace de Banach . . . 367
32.5.1.3 Théorème de densité dans L^1 . . . 367
32.5.2 Etude de L^2 . . . 367
32.5.2.1 L^2 espace normé, L^2 espace de Banach, théorème de densité . . . 369
32.5.2.2 Relation entre L^2 et L^1 . . . 373
32.5.2.3 L^2 espace de Hilbert . . . 374
32.5.3 Etude générale . . . 374
32.5.3.1 Définition . . . 375

32.5.3.2 L^p espace normé . . . 375
32.5.3.3 Inégalités de convexité . . . 375
32.5.3.4 L^p espace de Banach . . . 375
32.5.3.5 Théorème de densité . . . 376
32.6 Convolution des fonctions intégrables . . . 376
32.6.1 Convolution des fonctions intégrables dans L^1 . . . 376
32.6.1.1 Définition . . . 376
32.6.1.2 Propriétés élémentaires du produit de convolution . . . 377
32.6.1.3 Approximation de l'identité . . . 377
32.7 Transformée et Transformation de Fourier . . . 377
32.7.1 Transformée et Transformation de Fourier dans L^1 . . . 377
32.7.1.1 Transformée de Fourier . . . 377
32.7.1.2 Transformation de Fourier . . . 377
32.7.1.3 Transformation de Fourier et dérivation . . . 377
32.7.1.4 Transformation de Fourier et produit de convolution . . . 378
32.7.1.5 Théorème d'inversion dit aussi théorème de synthèse spectrale L^1 . . . 378
32.7.1.6 L'espace de Schwarz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . . . 378
32.7.2 Transformation de Fourier dans L^2 . . . 379
32.7.2.1 Théorème de Plancherel . . . 380
32.7.3 Transformée de Fourier d'une fonction périodique . . . 380
32.7.3.1 La synthèse spectrale . . . 380
32.8 Application à la théorie L^2 des série de Fourier . . . 380
32.9 Applications . . . 380
32.9.1 Calcul de la somme de la série : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ . . . 380
32.9.2 Théorème de synthèse spectrale pour les fonctions continues et périodiques . . . 381
32.10 Tableau comparatif . . . 381

33 Formes sesquilinéaires, Espaces Préhilbertiens, Hermitiens, Euclidiens et Hilbertien . . . 381

33.1 Formes sesquilinéaires . . . 381
33.1.1 Forme sesquilinéaire relativement à un automorphisme . . . 381
33.1.2 Forme (sesquilinéaire) hermitienne . . . 381
33.1.3 Formes (sesquilinéaires) hermitiennes complexes . . . 382
33.1.4 Formes bilinéaires réelles symétriques . . . 382
33.1.5 forme (sesquilinéaire) hermitienne complexe et formes bilinéaires réelles symétriques, définies positives ou positives . . . 382
33.1.6 Inégalité de Cauchy Schwarz . . . 382
33.2 Espaces Préhilbertiens, Hermitiens, Euclidiens et Hilbertien et produits scalaires . . . 382
33.2.1 Définitions . . . 383
33.2.1.1 Espace préhilbertien complexe et réel et leurs produits scalaires . . . 383
33.2.1.2 Espace hermitien et Euclidien et leurs produits scalaires . . . 384
33.2.1.3 Exemples . . . 384
33.2.2 Sous-espace préhilbertien, euclidien et hermitien . . . 384
33.2.3 Semi-norme et Norme associées à un produit scalaire . . . 385
33.2.3.1 Définitions . . . 385
33.2.3.2 Identités et inégalité remarquables . . . 385
33.2.3.3 Exemples . . . 385
33.3 Espace Hilbertien . . . 385
33.4 Orthogonalité . . . 385
33.4.1 Vecteurs othogonaux . . . 385
33.4.2 Parties orthogonales . . . 386
33.4.3 Théorèmes de Pythagone . . . 386
33.4.4 Orthogonal d'une partie . . . 386
33.4.5 Hyperplan médiateur dans un espace préhibertien réel . . . 386
33.4.6 Angle de deux vecteurs non nuls dans un préhilbertien réel . . . 386
33.5 Projection orthogonale d'un espace préhilbertien . . . 387

33.5.1 Théorème de projection . . . 387
33.5.2 Projection sur un cône convexe complet . . . 387
33.5.3 Projection sur un sous-espace vectoriel complet . . . 388
33.5.4 Transitivité des projections . . . 388
33.5.5 Application aux sous-espaces orthogonaux d'un espace de Hilbert . . . 389
33.6 Dual d'un espace de Hilbert . . . 389
33.7 Systèmes orthogonaux et bases Hilbertiennes . . . 389
33.7.1 Définitions . . . 390
33.7.2 Inégalité de Bessel . . . 390
33.7.3 Base Hilbertienne . . . 391
33.8 Géométrie euclidienne . . . 391
33.8.1 Orthonormalisation de Schmitt . . . 392
33.8.2 Spectre d'un endomorphisme . . . 392
33.8.3 Isométrie vectorielle, Rotation et Antirotation . . . 392
33.8.4 Espace $\mathbb{C}^n$. . . . 393
33.8.5 Base . . . 393
33.8.6 Produit mixte . . . 395
33.8.7 Produit vectoriel . . . 396
33.8.8 Angle orienté de vecteurs dans un plan vectoriel orienté . . . 396
33.8.9 Angle orienté d'une rotation vectorielle dans un plan vectoriel orienté . . . 396
33.8.10 Rotation en dimension 3 . . . 396

34 Géométrie affine . . . 397

34.1 Espace affine associé à un espace vectoriel . . . 397
34.2 Repère cartésien . . . 397
34.3 $\mathbb{R}$-espace Affine orienté . . . 398
34.4 Application affine . . . 398
34.4.1 Translation . . . 398
34.4.2 Homothétie . . . 398
34.4.3 Groupe des automorphismes . . . 399
34.5 Sous-espace ou variété affine d'un espace affine E . . . 399
34.5.1 Sous-espaces affines particuliers . . . 399
34.5.2 Parallélisme . . . 399
34.5.3 Intersection de sous-espaces affines et sous-espace affine engendré par une partie . 399
34.5.4 Propriétés des sous-espace affines . . . 400
34.6 Familles affinement libres, repère ou base affine . . . 400
34.6.1 Famille libre . . . 400
34.6.2 repère ou base affine . . . 401
34.6.3 Sous-espaces affines supplémentaires . . . 401
34.7 Projection . . . 401
34.8 Théorème de Thalès . . . 401
34.9 Image d'un sous-espace affine par une application affine . . . 402
34.10 Equation d'un hyperplan en dimension finie . . . 402
34.11 Barycentre . . . 402
34.12 Convexité . . . 402
34.12.1 Enveloppe convexe . . . 402
34.13 Demi-espaces définis par un hyperplan dans un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension finie . . . 403
34.14 Espace Affine normé . . . 403
34.14.1 Définition . . . 403
34.14.2 Application différentiable dans un espace affine . . . 403
34.14.3 Espaces tangents à une partie d'un espace vectoriel normé E . . . 403
34.14.3.1 Définitions . . . 404
34.14.3.2 Propriétés . . . 404
34.14.3.3 Cas particuliers . . . 404
34.14.4 Sous-variété . . . 404

34.14.4.1 Définitions . . . 405
34.14.4.2 Propriétés . . . 405
34.14.4.3 Espace tangent vectoriel d'une sous-variété ($k \geqslant 1$) . . . 406
34.14.4.4 Injectivité de la différentielle . . . 407
34.14.4.5 Surjectivité de la différentielle ($k \geqslant 1$) . . . 409
34.14.4.6 Généralisation . . . 410
34.14.4.7 Carte . . . 410
34.15 Espace affine euclidien . . . 410
34.15.1 Espace afffine euclidien . . . 411
34.15.1.1 Définition . . . 411
34.15.1.2 Structure métrique et structure affine . . . 412
34.15.1.3 Isométries affines . . . 413
34.15.1.4 Rotations affines . . . 414
34.15.2 Projections et symétries orthogonales . . . 415
34.15.2.1 Projection orthogonale sur un sous espace affine A d'un espace affine euclidien E . . . 415
34.15.2.2 Symétrie orthogonale par rapport à un sous espace affine d'un espace affine euclidien E . . . 415
34.15.3 Propriétés des espaces affines euclidiens . . . 416
34.15.4 Théorème de factorisation canonique d'une isométrie affine . . . 416
34.15.5 Isométrie affine en dimension 2 et 3 . . . 417
34.15.5.1 Déplacement en dimension 2 . . . 417
34.15.5.2 Rotation en dimension 3 . . . 417

35 Géométrie différentielle . . . 417

35.1 Arc et Courbe paramétrés dans un E espace affine euclidien . . . 418
35.1.1 Arc paramétré . . . 418
35.1.1.1 Définition . . . 419
35.1.1.2 Changement de paramètre ou reparamétrage et Arcs équivalents . . . 419
35.1.1.3 Arcs géométriques . . . 419
35.1.2 Courbe paramétrée . . . 420
35.1.3 Limite d'une famille de sous-espaces affines . . . 420
35.1.4 Régularité d'un point et d'une courbe . . . 420
35.1.4.1 Point et courbe réguliers . . . 420
35.1.4.2 Point et courbe biréguliers . . . 421
35.1.5 Tangente . . . 422
35.1.6 Plan normal . . . 423
35.1.7 Plan osculateur . . . 423
35.1.8 Normale principale et normale . . . 424
35.1.9 . . . 424
35.1.10 Courbe . . . 424
35.1.11 Changement de paramètre ou reparamétrage . . . 424
35.1.11.1 Courbes paramétrées unitaires . . . 424
35.1.11.2 Paramétrage normal et abscisse curviligne . . . 424
35.1.11.3 abscisse curviligne . . . 425
35.1.11.4 Courbures non algébrique et algébrique . . . 425
35.1.12 Repère de Frénet . . . 425
35.1.12.1 Définition . . . 425
35.1.12.2 Torsion . . . 426
35.1.12.3 Formules donnant la torsions et la courbure . . . 426

Index . . . 426

Glossaire . . . 426

Table des matières . . . 426